ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 3, 2017
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

групповой анализ дифференциальных уравнений

Факторизация уравнений морской электродинамики

С.Ю. Маламанов

БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Устинова,
Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

В работе рассматривается факторизация уравнений морской электродинамики. Получена система дифференциальных уравнений, связывающая только инварианты подгруппы основной группы, допускаемой рассматриваемой системой. Рассматриваются решения инвариантные относительно оператора растяжения. Такого рода решения наиболее характерны для задач, возникающих при моделировании физических процессов.

Ключевые слова: группы симметрии, инвариантное решение, понижение порядка, базис инвариантов, дифференциальные уравнения.

Abstract

The paper deals with the factorization of the equations of marine electrodynamics. A system of differential equations is obtained that relates only the invariants of the subgroup of the basic group admissible by the system under consideration. Solutions are invariant with respect to the extension operator. Such solutions are most typical for problems arising in the modeling of physical processes.

Keywords: symmetry group, invariant solution, order decreasing, the basis of invariants, differential equations.

Введение

Групповой анализ дифференциальных уравнений является мощным средством исследования нелинейных уравнений. В последние годы методы теории групп начинают применяться в геофизической гидродинамике, для анализа сложных неоднородных течений, в том числе в атмосфере и гидросфере. Групповой анализ применяется, в частности, как метод построения промежуточных моделей – с целью создания более комфортных исходных позиций для применения численных методов и как метод, позволяющий провести сравнение общих свойств уже существующих моделей, получивших распространение. Инвариантность уравнений (системы уравнений), описывающих постановку любой задачи физики и механики относительно группы растяжения (подобия) является необходимым и обязательным условием. С другой стороны, для отыскания конкретных инвариантных решений надо выбрать подгруппу основной группы или взять подалгебру операторов основной алгебры Ли. Поэтому в нашем случае это будет оператор растяжения.

Рассмотрим уравнения магнитной гидродинамики. Для изотермического течения вязкой, несжимаемой, проводящей жидкости закон сохранения импульса имеет вид [1]:

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right)=-\nabla p+\mu\Delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}, \tag{1}$$

где плотность тока находится из обобщенного закона Ома:

$$\boldsymbol{j}=\sigma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}).$$

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right)=-\nabla p+\mu\Delta\boldsymbol{u}+\sigma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}. \tag{2}$$

Уравнение переноса вектора $\boldsymbol{B}$ представим в форме:

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\frac{1}{\mu_m\sigma}\Delta\boldsymbol{B}+\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}). \tag{3}$$

Уравнение переноса вектора напряжённости электрического поля может быть получено следующим образом. Подействуем оператором rot на уравнение

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

системы уравнений Максвелла:

$$\nabla\times\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{B})=-\frac{\partial}{\partial t}\big(\nabla\times(\mu\mu_0\boldsymbol{H})\big)=-\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{H}).$$

Используя уравнение $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}$, обобщённый закон Ома $\boldsymbol{j}=\sigma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})$ и правила векторного анализа, получим:

$$\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{1}{\mu_m\sigma}\Delta\boldsymbol{E}-\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}). \tag{4}$$

Введем неоднородные растяжения всех переменных в виде:

$$t=a^{\alpha}\hat{t}\,;\ \ \boldsymbol{x}=a\widehat{\boldsymbol{x}}\,;\ \ \boldsymbol{u}=a^{\beta}\widehat{\boldsymbol{u}}\,;\ \ \boldsymbol{B}=a^{\gamma}\widehat{\boldsymbol{B}}\,;\ \boldsymbol{E}=a^{\delta}\widehat{\boldsymbol{E}}\,;\ p=a^{\varphi}\hat{p}. \tag{5}$$

Также подвергнем «преобразованию» дифференциальные операторы:

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{1}{a^{\alpha}\partial\hat{t}}\ ;\ \ \nabla=\frac{1}{a}\widehat{\nabla}\,;\ \ \Delta=\frac{1}{a^2}\widehat{\Delta}.$$

Из приведенных выражений видно, что прямоугольные координаты, проекции скорости, проекции индукции магнитного поля и напряжённости электрического поля преобразуются по одному и тому же (в каждом случае своему) закону. «Галочкой» сверху обозначена преобразованная величина и оператор. Теперь подставим преобразованные переменные в уравнения (2)–(4). В качестве примера проделаем эту процедуру с уравнением (2)

$$\rho\left(\frac{a^{\beta}}{a^{\alpha}}\frac{\partial\widehat{\boldsymbol{u}}}{\partial\hat{t}}+\frac{a^{2\beta}}{a}(\widehat{\boldsymbol{u}}\widehat{\nabla})\widehat{\boldsymbol{u}}\right)+\frac{a^{\varphi}}{a}\widehat{\nabla}p=\eta\frac{a^{\beta}}{a^2}\widehat{\Delta}\widehat{\boldsymbol{u}}+\sigma a^{\gamma+\delta}\big(\widehat{\boldsymbol{E}}\times\widehat{\boldsymbol{B}}\big)+\sigma a^{\beta}a^{2\gamma}\big(\widehat{\boldsymbol{u}}\times\widehat{\boldsymbol{B}}\big)\times\widehat{\boldsymbol{B}}.$$

Разделим обе части уравнения на степенной комплекс $\left(\frac{a^{\beta}}{a^{\alpha}}\right)$ у нестационарного члена в левой части. В результате получим

$$\rho\left(\frac{\partial\widehat{\boldsymbol{u}}}{\partial\hat{t}}+\frac{a^{2\beta}}{a}\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}(\widehat{\boldsymbol{u}}\widehat{\nabla})\widehat{\boldsymbol{u}}\right)+\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}\frac{a^{\varphi}}{a}\widehat{\nabla}p=\eta\ \frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}\frac{a^{\beta}}{a^2}\widehat{\Delta}\widehat{\boldsymbol{u}}+\sigma\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}\ a^{\beta}a^{2\gamma}\big(\widehat{\boldsymbol{u}}\times\widehat{\boldsymbol{B}}\big)\times\widehat{\boldsymbol{B}}$$

или

$$\rho\left(\frac{\partial\widehat{\boldsymbol{u}}}{\partial\hat{t}}+a^{\beta+\alpha-1}(\widehat{\boldsymbol{u}}\widehat{\nabla})\widehat{\boldsymbol{u}}\right)+a^{\varphi+\alpha-\beta-1}\widehat{\nabla}p=\eta\ a^{\alpha-2}\widehat{\Delta}\widehat{\boldsymbol{u}}+\sigma a^{\gamma+\delta-\beta+\alpha}\big(\widehat{\boldsymbol{E}}\times\widehat{\boldsymbol{B}}\big)+\sigma a^{2\gamma+\alpha}\big(\widehat{\boldsymbol{u}}\times\widehat{\boldsymbol{B}}\big)\times\widehat{\boldsymbol{B}}.$$

Требование инвариантности уравнения (2) относительно преобразований (5) сводится к сравнению множителей, появляющихся в отдельных слагаемых. Следовательно, в нашем случае должно быть:

$$a^{\beta+\alpha-1}=a^{\varphi+\alpha-\beta-1}=a^{\alpha-2}=a^{2\gamma+\alpha}=a^{\gamma+\delta-\beta+\alpha}\equiv 1. \tag{6}$$

Таким образом, получается система уравнений относительно показателей степени – $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \delta$.

$$\begin{cases} a^{\beta+\alpha-1} = 1, \\ a^{\varphi+\alpha-\beta-1} = 1, \\ a^{\alpha-2} = 1, \\ a^{2\gamma+\alpha} = 1, \\ a^{\gamma+\delta-\beta+\alpha} = 1. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta+\alpha-1=0, \\ \varphi+\alpha-\beta-1=0, \\ \alpha-2=0, \\ 2\gamma+\alpha=0, \\ \delta=\beta-\alpha-\gamma \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \gamma=-1, \\ \beta=-1, \\ \varphi=-2, \\ \alpha=2, \\ \delta=-2. \end{cases} \tag{7}$$

Полученное решение позволяет окончательно записать вид преобразований (5), соответствующий нашей системе уравнений:

$$t = a^2\hat{t}\,; \;\; \boldsymbol{x} = a\hat{\boldsymbol{x}}\,; \;\; \boldsymbol{u} = \tfrac{1}{a}\hat{\boldsymbol{u}}\,; \;\; \boldsymbol{B} = \tfrac{1}{a}\hat{\boldsymbol{B}}\,; \; \boldsymbol{E} = \tfrac{1}{a^2}\hat{\boldsymbol{E}} \;\; p = \tfrac{1}{a^2}\hat{p}. \tag{8}$$

На следующем этапе, руководствуясь традиционным алгоритмом [2] необходимо найти инварианты группы растяжений и выразить через них независимые и зависимые переменные. Этим мы уменьшим суммарное количество переменных и тем самым, в определенной мере, упростим задачу. Для нахождения инвариантов следует решить уравнение:

$$\boldsymbol{X}(I) = \xi^i(x)\frac{\partial I}{\partial x^i} = 0. \qquad\qquad i = (1, \ldots, N) \tag{9}$$

В нашем случае $N = 14$ и (9) примет следующий вид:

$$\boldsymbol{X}(I) = \xi_t\frac{\partial I}{\partial t} + \xi_x\frac{\partial I}{\partial x} + \xi_y\frac{\partial I}{\partial y} + \xi_z\frac{\partial I}{\partial z} + \eta_u\frac{\partial I}{\partial u} + \eta_v\frac{\partial I}{\partial v} + \eta_w\frac{\partial I}{\partial w} + \eta_p\frac{\partial I}{\partial p} +$$

$$+\eta_{B_x}\frac{\partial I}{\partial B_x} + \eta_{B_y}\frac{\partial I}{\partial B_y} + \eta_{B_z}\frac{\partial I}{\partial B_z} + \eta_{E_x}\frac{\partial I}{\partial E_x} + \eta_{E_y}\frac{\partial I}{\partial E_y} + \eta_{E_z}\frac{\partial I}{\partial E_z} = 0.$$

Координаты векторного поля $\xi_i, i = (1, \ldots, 4)$ и η_j, $j = (1, \ldots, 10)$ находятся из уравнений Ли и формул преобразования растяжения (8). Имеем последовательно:

$$\xi_t = \left.\frac{dt}{da}\right|_{a=1} = 2a\hat{t}|_{a=1} = 2\hat{t},$$

$$\xi_x = \left.\frac{dx}{da}\right|_{a=1} = \hat{x},$$

аналогично находим $\quad \xi_y = \hat{y}$ и $\xi_z = \hat{z}$,

$$\xi_u = \left.\frac{du}{da}\right|_{a=1} = \frac{d}{da}(a^{-1}\hat{u}) = -\left.\frac{\hat{u}}{a^2}\right|_{a=1} = -\hat{u},$$

аналогично находим $\quad \xi_v = -\hat{v} \quad$ и $\quad \xi_w = -\widehat{w},$

$$\xi_{B_x} = \left.\frac{dB_x}{da}\right|_{a=1} = \frac{d}{da}\left(a^{-1}\widehat{B_x}\right) = -\left.\frac{\widehat{B_x}}{a^2}\right|_{a=1} = -\widehat{B_x},$$

аналогично находим $\xi_{B_y} = -\widehat{B_y}$ и $\xi_{B_z} = -\widehat{B_z}$,

$$\xi_{E_x} = \left.\frac{dE_x}{da}\right|_{a=1} = \frac{d}{da}\left(a^{-2}\widehat{E_x}\right) = -\left.\frac{2\widehat{E_x}}{a^3}\right|_{a=1} = -\widehat{2E_x},$$

аналогично находим $\xi_{E_y} = -2\widehat{E_y}$ и $\xi_{E_z} = -2\widehat{E_z}$,

$$\xi_p = \left.\frac{dp}{da}\right|_{a=1} = \frac{d}{da}\left(a^{-2}\hat{p}\right) = -\left.\frac{\widehat{2p}}{a^3}\right|_{a=1} = -\widehat{2p}.$$

Окончательно оператор группы растяжения примет вид («галочки» над переменными опущены для упрощения записи):

$$\boldsymbol{X} = X = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} - u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v} - w\frac{\partial}{\partial w} - 2p\frac{\partial}{\partial p} -$$

$$-B_x\frac{\partial}{\partial B_x} - B_y\frac{\partial}{\partial B_y} - B_z\frac{\partial}{\partial B_z} - 2E_x\frac{\partial}{\partial E_x} - 2E_y\frac{\partial}{\partial E_y} - 2E_z\frac{\partial}{\partial E_z}. \qquad (10)$$

Заметим, что в отсутствии магнитного и электрического полей ($\boldsymbol{B} \equiv 0,\ \boldsymbol{E} \equiv 0$), оператор (10) упрощается и получается хорошо известный результат для группы растяжений допускаемой уравнениями Навье-Стокса. Теперь инварианты можно найти из уравнения:

$$\boldsymbol{X}(I) = 2t\frac{\partial I}{\partial t} + x\frac{\partial I}{\partial x} + y\frac{\partial I}{\partial y} + z\frac{\partial I}{\partial z} - u\frac{\partial I}{\partial u} - v\frac{\partial I}{\partial v} - w\frac{\partial I}{\partial w} - 2p\frac{\partial I}{\partial p} -$$

$$-B_x\frac{\partial I}{\partial B_x} - B_y\frac{\partial I}{\partial B_y} - B_z\frac{\partial I}{\partial B_z} - 2E_x\frac{\partial}{\partial E_x} - 2E_y\frac{\partial}{\partial E_y} - 2E_z\frac{\partial}{\partial E_z} = 0,$$

или из системы уравнений характеристик, для вышеприведенного уравнения

$$\frac{dt}{2t} = \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{dz} = -\frac{du}{u} = -\frac{dv}{v} = -\frac{dw}{w} = -\frac{dp}{2p} =$$

$$= -\frac{dB_x}{B_x} = -\frac{dB_y}{B_y} = -\frac{dB_z}{B_z} = -\frac{dE_x}{2E_x} = -\frac{dE_y}{2E_y} = -\frac{dE_z}{2E_z}.$$

Так, например, интегрирование уравнения

$$\frac{dt}{2t} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln C_1 = \ln x - \tfrac{1}{2}\ln t = \ln\frac{x}{\sqrt{t}},\ \text{откуда}\quad C_1 = \frac{x}{\sqrt{t}},$$

позволяет найти первый инвариант - $\frac{x}{\sqrt{t}}$.

Подобным образом можно найти и другие инварианты.

$$\frac{dt}{2t} = -\frac{dp}{2p}\ ,\text{интегрируя получим}\ \ \ln C_2 = \ln(pt)\quad C_2 = pt,$$

$$\frac{dt}{2t} = -\frac{du}{u}\ \rightarrow\ \ln C_3 = \ln\left(\sqrt{t}u\right)\ \rightarrow C_3 = \sqrt{t}u,$$

$$\frac{dt}{2t} = -\frac{dB_x}{B_x}\ \rightarrow\ \ln C_4 = \ln\left(\sqrt{t}B_x\right)\ \rightarrow C_4 = \sqrt{t}B_x\ ,$$

$$\frac{dt}{2t} = -\frac{dE_x}{2E_x}\ \rightarrow\ ln\,C_5 = ln(tE_x)\ \rightarrow C_5 = tE_x$$

В результате, инварианты имеют вид:

$$\frac{x}{\sqrt{t}}\,,\frac{y}{\sqrt{t}},\frac{z}{\sqrt{t}},pt,\sqrt{t}u,\sqrt{t}v,\sqrt{t}w,\sqrt{t}B_x,\sqrt{t}B_{y,}\sqrt{t}B_z,tE_x,tE_{y,}tE_z\ .$$

Введя автомодельные переменные:

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{t}}\ ,\text{где}\ \ \boldsymbol{\xi}(\xi,\eta,\varsigma)\ \text{и}\ \ \boldsymbol{x}(x,y,z),$$

можно инвариантные решения записать как:

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{t}}\boldsymbol{U}(\xi,\eta,\varsigma) \equiv \frac{1}{\sqrt{t}}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\xi}),$$

$$\boldsymbol{B} = \tfrac{1}{\sqrt{t}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi}),$$

$$\boldsymbol{E} = \tfrac{1}{t}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}), \tag{11}$$

$$p = \tfrac{1}{t}P(\boldsymbol{\xi}).$$

В координатной форме первые три уравнения (11) будут выглядеть так:

$$u = \tfrac{1}{\sqrt{t}}U(\xi,\eta,\varsigma),\quad B_x = \tfrac{1}{\sqrt{t}}H_\xi(\xi,\eta,\varsigma),\quad E_x = \tfrac{1}{\boldsymbol{t}}G_\xi(\xi,\eta,\varsigma)$$

$$v = \tfrac{1}{\sqrt{t}}V(\xi,\eta,\varsigma),\quad B_y = \tfrac{1}{\sqrt{t}}H_\eta(\xi,\eta,\varsigma),\quad E_y = \tfrac{1}{t}G_\eta(\xi,\eta,\varsigma) \tag{12}$$

$$w=\frac{1}{\sqrt{t}}W(\xi,\eta,\varsigma),\quad B_z=\frac{1}{\sqrt{t}}H_\varsigma(\xi,\eta,\varsigma),\quad E_z=\frac{1}{t}G_\varsigma(\xi,\eta,\varsigma).$$

Эти выражения вместе с представлением для давления надо подставить в исходные уравнения (2) – (4). Учитывая довольно громоздкие преобразования, сделаем это, в качестве примера, только для проекции уравнения (3) на ось x. Преобразовываем последовательно отдельные слагаемые:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}H_\xi\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)H_\xi+\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{\partial H_\xi}{\partial t}=-\frac{H_\xi}{2t\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{\partial H_\xi}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dt}+\frac{\partial H_\xi}{\partial\eta}\frac{d\eta}{dt}+\frac{\partial H_\xi}{\partial\varsigma}\frac{d\varsigma}{dt}\right)=$$

$$=-\frac{H_\xi}{2t\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{\partial H_\xi}{\partial\xi}\left(-\frac{\xi}{2t}\right)+\frac{\partial H_\xi}{\partial\eta}\left(-\frac{\eta}{2t}\right)+\frac{\partial H_\xi}{\partial\varsigma}\left(-\frac{\varsigma}{2t}\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{2t\sqrt{t}}\left(H_\xi+\xi\frac{\partial H_\xi}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial H_\xi}{\partial\eta}+\varsigma\frac{\partial H_\xi}{\partial\varsigma}\right).$$

Теперь преобразуем «лапласиан» B_x:

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H_\xi}{\sqrt{t}}\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial H_\xi}{\partial\xi}\right)=$$

$$=\frac{1}{t}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial H_\xi}{\partial\xi}\right)\frac{d\xi}{dx}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial H_\xi}{\partial\xi}\right)\frac{d\eta}{dx}+\frac{\partial}{\partial\varsigma}\left(\frac{\partial H_\xi}{\partial\xi}\right)\frac{d\varsigma}{dx}\right)=\frac{1}{t\sqrt{t}}\frac{\partial^2 H_\xi}{\partial\xi^2}.$$

Подобным же образом получаем:

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2}=\frac{1}{t\sqrt{t}}\frac{\partial^2 H_\xi}{\partial\eta^2},\qquad \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2}=\frac{1}{t\sqrt{t}}\frac{\partial^2 H_\xi}{\partial\varsigma^2}.$$

Последнее слагаемое преобразуется простой подстановкой:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(uB_y-vB_x\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(wB_x-uB_z\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U}{\sqrt{t}}\frac{H_\eta}{\sqrt{t}}-\frac{V}{\sqrt{t}}\frac{H_\xi}{\sqrt{t}}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{W}{\sqrt{t}}\frac{H_\xi}{\sqrt{t}}-\frac{U}{\sqrt{t}}\frac{H_\varsigma}{\sqrt{t}}\right)$$

$$=\frac{1}{t}\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\left(UH_\eta-VH_\xi\right)\frac{d\eta}{dy}-\frac{\partial}{\partial\varsigma}\left(WH_\xi-UH_\varsigma\right)\frac{d\varsigma}{dz}\right)=$$

$$=\frac{1}{t\sqrt{t}}\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\left(UH_\eta-VH_\xi\right)-\frac{\partial}{\partial\varsigma}\left(WH_\xi-UH_\varsigma\right)\right).$$

Получим окончательно, собрав все преобразованные слагаемые вместе:

$$-\frac{1}{2}\left(H_\xi+\xi\frac{\partial H_\xi}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial H_\xi}{\partial\eta}+\varsigma\frac{\partial H_\xi}{\partial\varsigma}\right)=\frac{1}{\mu_m\sigma}\left(\frac{\partial^2 H_\xi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 H_\xi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 H_\xi}{\partial\varsigma^2}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\left(UH_\eta - VH_\xi\right) - \frac{\partial}{\partial\varsigma}\left(WH_\xi - UH_\varsigma\right)\right).$$

Опуская подобные преобразования уравнений (2) и (4) для x, y и z-компонент, запишем окончательно полученную систему уравнений в векторной форме

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{U} = 0 \\ \frac{\rho}{2}(-\boldsymbol{U} - (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\boldsymbol{U} + 2(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\boldsymbol{U}) + \nabla\boldsymbol{P} = \mu\Delta\boldsymbol{U} + \sigma(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{H} \\ \frac{1}{2}(-\boldsymbol{H} - (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\boldsymbol{H}) = \frac{1}{\mu_m\sigma}\Delta\boldsymbol{H} + \nabla\times(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{H}) \\ \frac{1}{2}(-\boldsymbol{G} - (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\boldsymbol{G} - (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{H})\ ) = \frac{1}{\mu_m\sigma}\Delta\boldsymbol{G} + \boldsymbol{U}\times\boldsymbol{H}. \end{cases} \tag{13}$$

Таким образом, построена фактор-система для уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой изотермической проводящей жидкости. Видно, что дифференциальные уравнения связывают только инварианты допускаемой группы неоднородных растяжений. Главным упрощением является тот факт, это система не эволюционного типа, в отличие от первоначальной. Основная цель – уменьшение числа независимых переменных – достигнута.

Система уравнений (13) – наиболее общая. Постановка задач морской электродинамики допускает её существенное упрощение. Во-первых, одновременно уравнения для $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{E}$, как правило, не решают, а электрическое поле находят из выражения [3]:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\mu_m\sigma}\nabla\times\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B_0}),$$

где $\boldsymbol{B_0}$ геомагнитное поле Земли. Во-вторых, возникают определенные упрощения в уравнении переноса вектора напряженности магнитного поля. Рассмотрим их, разлагая вектор напряженности магнитного поля на две составляющие: $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{b},$ где $\boldsymbol{B}_0 = const.$

Тогда, уравнение (3) примет вид:

$$\frac{\partial(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{b})}{\partial t} = \frac{1}{Re_m}\Delta(\boldsymbol{B_0} + \boldsymbol{b}) + \nabla\times\left(\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{b})\right).$$

Здесь Re_m магнитное число Рейнольдса. Полагая, что слагаемые в правой части одного порядка, получим:

$$\frac{1}{Re_m}\Delta\boldsymbol{b} \sim \nabla\times\left(\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{b})\right),$$

и, следовательно, $\boldsymbol{b} \sim Re_m(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{b}).$

Таким образом:

$$\boldsymbol{b} \sim \frac{Re_m}{1 - Re_m} \boldsymbol{B_0}\Big|_{Re_m<1} \approx Re_m \boldsymbol{B}_0.$$

Для задач морской гео- и гидрофизики магнитное число Рейнольдса есть величина малая, поэтому индуцированное поле $\boldsymbol{b}$ значительно меньше внешнего поля $\boldsymbol{B}_0$. Исходя из этого, уравнение переноса вектора напряженности магнитного поля в безразмерном виде можно представить так:

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t} = \frac{1}{Re_m} \Delta \boldsymbol{b} + \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}_0).$$

Именно в такой форме уравнением пользуются многие исследователи [3]. Дальнейшее упрощение записанного уравнения, в свете вышеизложенного, не составляет большого труда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новожилов В. В., Павловский В. А.* Установившиеся турбулентные течения несжимаемой жидкости. – СПб: СПбГУ, 2013. – 483 с.

2. *Овсянников Л.В*. Групповой анализ дифференциальных уравнений. -М.: Наука, 1978. – 400 с.
3. *Савченко В.Н., Смагин В.П., Фонарев Г.А*. Вопросы морской электродинамики: Монография. – Владивосток: Изд-во ВГУЭ и С, 1999. – 208 с.