ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2014
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Управление в нелинейных системах

Устойчивость в целом и бифуркации инвариантных мер для дискретных коциклов уравнений проводящей системы сердца

А. А. Мальцева[*], Ф. Райтманн

Математико-механический факультет,

Санкт-Петербургский государственный университет,

Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

В работе рассматриваются зависящие от параметра коциклы порожденные неавтономными разностными уравнениями. Примером таких уравнений может служить дискретная по времени модель проводящей системы сердца. Для такой системы с управляющей переменной построен коцикл. Приводится теорема об устойчивости в целом дискретных по времени коциклов. Рассматривается существование инвариантной меры для такого коцикла с использованием некоторых элементов теории операторов Перрона-Фробениуса, а также обсуждаются бифуркации мер зависимых от параметра.

[*]Работа выполнена при поддержке Немецко-российского междисциплинарного научного центра (G-RISC) и Германской службы академических обменов (DAAD), Министерства Образования и Науки РФ и Санкт-Петербургского государственного университета.

Abstract

In this paper parameter-dependent cocycles generated by nonautonomous difference equations are considered. As an example of equations of this type a discrete-time cardiac conduction model are investigated. For this system with a control variable a cocycle is constructed. The theorem about stability in the whole of discrete-time cocycles is stated. Existence of an invariant measure for such a cocycle is investigated using some elements of the Perron-Frobenius operator theory, and bifurcations of parameter-dependent measures are discussed.

Введение

В настоящей работе рассматриваются неавтономные дискретные по времени системы зависящие от параметра. Такие системы возникают, например, если ввести управление в автономных дискретных по времени системах, чтобы уравновесить заданную систему. Итоговая система может быть исследована с помощью теории коциклов [4, 10]. Таким образом полная система состоит из движущей или базисной системы (управляющие переменные) и коцикла над этой базисной системой (фазовые переменные). Рассматриваются инвариантные множества и инвариантные меры зависящие от управляющих переменных.

Приведем краткое содержание работы. В первой главе приведены основные определения дискретных по времени коциклов и их инвариантных множеств. Во второй главе показана процедура построения дискретного по времени коцикла для дискретного неавтономного уравнения. В третьей главе представлены дискретные уравнения, описывающие проводящую систему сердца и строится коцикл для таких уравнений. В четвертой главе рассматривается устойчивость в целом дискретных коциклов, порожденных разностными уравнениями с периодической нелинейностью. Уравнения такого типа также используются для моделирования проводящей системы сердца. В пятой главе изучается вопрос построения инвариантной меры для дискретного по времени измеримого коцикла, с использованием оператора Перрона-Фробениуса. В последней главе представлены основные идеи бифуркаций инвариантных мер для коциклов. В качестве примера рассматривается уравнение Реньи.

1 Элементы теории дискретных коциклов

Введем основные понятия теории коциклов, которые будут использованы далее ([10, 1, 2]). Пусть (Q, d) - полное метрическое пространство с метрикой d.

Дискретным (по времени) базисным потоком на метрическом пространстве (Q, d) называется пара $(\{\tau^k\}_{k\in\mathbb{Z}}, (Q, d))$, где

$$\tau^{(\cdot)}(\cdot)\colon \mathbb{Z}\times Q \to Q, (k, q) \mapsto \tau^k(q)$$

– отображение, удовлетворяющее следующим свойствам:

1) $\tau^0(\cdot) = \mathrm{id}_Q$;

2) $\tau^{k+j}(\cdot) = \tau^k(\cdot)\circ\tau^j(\cdot)$, $\forall k, j \in \mathbb{Z}$.

Пусть (M, ρ) – метрическое пространство отличное от (Q, d), назовем его фазовым пространством.

Дискретным коциклом на пространстве (M, ρ) над дискретным базисным потоком $(\{\tau^k\}_{k\in\mathbb{Z}}, (Q, d))$ называется пара $(\{\varphi^k(q, \cdot)\}_{\substack{k\in\mathbb{Z}_+\\ q\in Q}}, (M, \rho))$, где отображение φ обладает следующими свойствами:

1) $\varphi^k(q, \cdot)\colon M \to M$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}_+$, $\forall\, q \in Q$;

2) $\varphi^0(q, \cdot) = \mathrm{id}_M$, $\forall\, q \in Q$;

3) $\varphi^{k+j}(q, \cdot) = \varphi^k(\tau^j(q), \varphi^j(q, \cdot))$, $\forall\, k, j \in \mathbb{Z}_+$, $\forall\, q \in Q$.

Для краткости коцикл $(\{\varphi^k(q, \cdot)\}_{\substack{k\in\mathbb{Z}_+\\ q\in Q}}, (M, \rho))$ над дискретным базисным потоком $(\{\tau^k\}_{k\in\mathbb{Z}}, (Q, d))$ обозначим через (τ, φ).

Семейство подмножеств $\hat{Z} = \{Z(q)\}_{q\in Q}$ пространства M называется *инвариантным* для дискретного коцикла (τ, φ), если $\varphi^k(q, Z(q)) = Z(\tau^k(q))$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $q \in Q$.

Семейство ограниченных подмножеств $\hat{Z} = \{Z(q)\}_{q\in Q}$ называется *глобально $\mathcal{B}$-pullback притягивающим* для коцикла (τ, φ), если для любых $q \in Q$ и произвольного ограниченного множества $B \subset M$ имеем $dist(\varphi^k(\tau^{-k}(q), B), Z(q)) \xrightarrow{k\to\infty} 0$ для любых $q \in Q$ и произвольного ограниченного множества $B \subset M$.

Семейство компактных подмножеств $\hat{A} = \{A(q)\}_{q\in Q}$ называется *глобальным $\mathcal{B}$-pullback* аттрактором, если оно инвариантно и глобально $\mathcal{B}$ - pullback притягивающее.

Рассмотрим коцикл и базисный поток, над которым он построен, в паре. Пусть $W := Q \times M$. Обозначим через $\tilde{\rho}$ метрику на W, которая задается следующим образом: для любых $(q,u),(q',u') \in W$ $\tilde{\rho}((q,u),(q',u')) := \sqrt{d^2(q,q') + \rho^2(u,u')}$.

Динамической системой типа косого произведения называется пара $(\{S^k\}_{k\in\mathbb{Z}},(W,\tilde{\rho}))$, где отображение $S^k : W \to W$ – непрерывно, $S^k(q,u) := (\tau^k(q),\varphi^k(q,u))$ для любых $(q,u) \in W$ и любых $k \in \mathbb{Z}$.

2 Коциклы с дискретным временем, порожденные разностными уравнениями

Рассмотрим неавтономное разностное уравнение

$$u_{k+1} = f(p_k,u_k), k \in \mathbb{Z}_+, \tag{1}$$

где $f\colon \mathbb{R}^m \times M \to M$ – отображение, M – гладкое многообразие. Предположим, что $\{p_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{R}^m)$. Тогда можно ввести топологическое пространство

$$Q := \overline{\{p_{k+\cdot} \mid k \in \mathbb{Z}\}}, \tag{2}$$

где замыкание берется в топологии пространства $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{R}^m)$.

Предположим, что $\tau^k\colon Q \to Q, k \in \mathbb{Z}$ есть отображение сдвига на Q, которое определяется для $q = \{q_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in Q$ через

$$\tau^k(q) := \{q_{j+k}\}_{j\in\mathbb{Z}}, k \in \mathbb{Z}.$$

Вместе с системой (1) – (2) мы рассмотрим семейство систем

$$u_{k+1} = \hat{f}(\tau^k(q),u_k), k = 0,1,2,\ldots, \tag{3}$$

где $q = \{q_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in Q$ и $\hat{f}$ – продолжение f в смысле [10]. Перепишем систему (3) в виде семейства систем

$$u_{k+1} = f^{(q)}(k,u_k), k \in \mathbb{Z}_+. \tag{4}$$

Предположим, что $\{u_k^{(q)}(0,u_0)\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ есть решение уравнения (4), удовлетворяющее условию $u_0^{(q)}(0,u_0) = u_0$. Тогда можно определить отображение:

$$\varphi^k(q,u_0) := u_k^{(q)}(0,u_0), u_0 \in M, q \in Q, k \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим, как частный случай (1), квазилинейное неавтономное разностное уравнение в виде

$$u_{k+1} = A(k)u_k + g(k, u_k) =: f(k, u_k), \tag{5}$$

где $\{A(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – п.п. последовательность $n \times n$-матриц, $\{g(k,\cdot)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – п.п. относительно k последовательность непрерывных функций. Считаем, что $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция относительно второго аргумента.

Введем эволюционный оператор $\varPhi(k, j), k \geqslant j,\ k, j \in \mathbb{Z}$ линейной части уравнения (5):

$$\varPhi(k, j) := \begin{cases} I, \text{ если } k = j; \\ A(k-1)A(k-2)\dots A(j), \text{ если } k > j. \end{cases}$$

Тогда решение квазилинейного уравнения (5) можно представить в виде

$$u_k = \varPhi(k, k_0)u_{k_0} + \sum_{j=k_0}^{k} \varPhi(k, j)g(j, u_j),\ k \geqslant k_0.$$

По определению здесь

$$\sum_{j=k_0}^{k} a_j := \begin{cases} \sum\limits_{j=k_0+1}^{k} a_j,\ k > k_0, \\ 0,\ k = k_0, \\ -\sum\limits_{j=k+1}^{k_0} a_j,\ k < k_0. \end{cases}$$

Эволюционный оператор $\varPhi(k, j)$ продолжается в область $k < j$ по формуле

$$\varPhi(k, j) = A^{-1}(k)A^{-1}(k-1)\dots A^{-1}(j-1),\ k < j.$$

Наряду с уравнением (5) рассмотрим уравнение

$$u_{k+1} = A^{(q)}(k)u_k + g^{(q)}(k, u_k),\ k \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}_B, \tag{6}$$

где $\mathbb{Z}_B$ – компактификация Бора группы $\mathbb{Z}$. Здесь $A^{(q)}(k) = \hat{A}(q+k)$, $q \in \mathbb{Z}_B$, $k \in \mathbb{Z}$, где $\hat{A}(\cdot)$ – продолжение матричной функции $A(\cdot)$ на $\mathbb{Z}_B$.

Далее $g^{(q)}(k, u) = \hat{g}(q+k, u)$, $g \in \mathbb{Z}_B$, $k \in \mathbb{Z}$, $u \in \mathbb{R}^n$, где $\hat{g}(\cdot,\cdot)$ – продолжение функции $g(\cdot,\cdot)$ на $\mathbb{Z}_B \times \mathbb{R}^n$ непрерывное относительно второго аргумента. Каждое из уравнений (6) имеет единственное решение $\{u_k^{(q)}\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

3 Разностные уравнения проводящей системы сердца

Определенная часть сердечной мышцы специализируется на выдаче остальному сердцу управляющих сигналов в форме импульсов. Эта специализированная часть сердца называется проводящей системой сердца. В норме ритм сердца задается синоатриальным (СА) узлом, который располагается в правом предсердии. Из СА-узла сердечный импульс последовательно распространяется по проводящей системе сердца: через мускулатуру предсердия, атриовентрикулярный (АВ) узел и далее через пучок Гиса, ножки пучка и специализированную проводимую ткань, называемую волокнами Пуркинье, которые передают возбуждение на рабочий миокард.

Нарушение ритма сердца часто связано с отклонениями в генерации ритма в СА-узле и с другими явлениями.

Представим динамику возбуждения сердца в виде конечномерной разностной системы в соответствии с работой [9]. Предположим для этого, что за каждым импульсом (S), который периодически достигает сердечную ткань, будет следовать ответное возбуждение (R) после некоторого промежутка времени. Обозначим время между импульсом и ответной реакцией через SR (время прохождения импульса), это время зависит от времени прошедшего между предыдущим ответным возбуждением и импульсом (рефрактерный период), т.е.

$$SR_{i+1} = g(RS_i),\ i = 0, 1, 2, \dots, \tag{7}$$

где SR_{i+1} – время прохождения импульса, а RS_i – время предшествующего рефрактерного периода. Уравнение (7)можно переписать в виде

$$SR_{i+1} = g(t_s - SR_i),\ i = 0, 1, 2, \dots\ , \tag{8}$$

где t_i – временной интервал между периодическими импульсами. В альтернативной форме можно записать (8) в виде

$$RS_{i+1} = t_s - g(RS_i),\ i = 0, 1, 2, \dots\ , \tag{9}$$

где $t_s = SR_i + RS_i = SR_{i+1} + RS_{i+1}$.

Разделим обе части уравнения (9) на некоторую специальную положительную константу T_0([9]) и получим

$$\theta_{i+1} = F(\theta_i) + \tau \bmod 1\, i = 0, 1, 2, \dots\ , \tag{10}$$

где

$$\theta_i = \frac{RS_i}{T_0},\ \tau = \frac{t_s}{T_0},\ F(\theta_i) = \frac{-g(\theta_i, T_0)}{T_0} \bmod 1.$$

Переменная θ_i – фаза ($0 \leqslant \theta_i < 1$), в которую действует i-ый импульс.

Уравнения вида (10)рассматривается в примерах в главах 4 и 6.

Рассмотрим двумерную модель модель проводящей системы сердца, предложенную в работе [15]. Данная модель представляет собой двумерное кусочно-гладкое отображение. С её помощью можно прогнозировать различные экспериментально наблюдаемые сложные сердечные ритмы. Альтернация сердца, при которой происходит чередование времени проведения импульса, связана с бифуркацией удвоения периода.

Модель можно представить в виде дискретной по времени неавтономной системы в следующем виде:

$$\begin{cases} A_{k+1} = A_{min} + R_k \exp\Big(-\frac{A_k+H_k}{\tau_{fat}}\Big) + \gamma \exp\Big(-\frac{H_k}{\tau_{fat}}\Big) + \\ \beta(A_k)\exp\Big(-\frac{H_k}{\tau_{rec}}\Big), \\ R_{k+1} = R_k \exp\Big(-\frac{A_k+H_k}{\tau_{fat}}\Big) + \gamma \exp\Big(-\frac{H_k}{\tau_{fat}}\Big), k = 0, 1, \dots, \end{cases} \tag{11}$$

где $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – кусочно-гладкая линейная функция:

$$\beta(x) := \begin{cases} 201 - 0.7x, \text{ если } x < 130, \\ 500 - 3.0x, \text{ если } x \geqslant 130. \end{cases}$$

Предполагается, что A_{min}, τ_{rec}, γ and τ_{fat} – положительные константы. Переменная A_k – время проведения k-*того* импульса; R_k – смещение во времени проведения k-*того* импульса; H_k – интервал между активацией пучка Гиса и последующей активацией. Предполагается, что

$$H_k = \alpha + p_k,\ k = 0, 1, 2, \dots, \tag{12}$$

где α – параметр и $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ – управляющая переменная.

Запишем систему (11) – (12) в следующем виде

$$u_{k+1} = f(p_k, u_k, \alpha),\ k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $u = (A, R)$ и $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \to \mathbb{R}^2$ правая часть уравнения (11).

4 Устойчивость в целом дискретных коциклов, порожденных разностными уравнениями с периодической нелинейностью

Рассмотрим систему

$$y_{k+1} = Ay_k + b\phi(k, w_k),\ w_k = (c, y_k),\ k = 0, 1, 2, \dots, \tag{13}$$

где A – постоянная матрица порядка $n \times n$, имеющая 1 как собственное значение, b и c – n-мерные вектора. Далее $\phi\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – нелинейная функция, относительно которой мы предположим, что существует число $\kappa > 0$ такое, что

$$\phi(k,w)w \leqslant \kappa w^2,\ \forall k\in\mathbb{Z},\ \forall w\in\mathbb{R}. \tag{14}$$

Кроме того предположим, что ϕ – периодическая функция с периодом $\zeta > 0$ относительно второго аргумента, т.е.

$$\phi(k,w+\zeta) = \phi(k,w),\ \forall k\in\mathbb{Z},\ \forall w\in\mathbb{R}. \tag{15}$$

Пусть $\chi(p) = (c,(A-pI)^{-1}b)$, $p\in\mathbb{C}\colon \det(A-pI)\neq 0$ – передаточная функция линейной части системы (13). Предположим, что $\chi(p)$ – невырожденная, т.е. представима как собственная дробно-рациональная функция, для которой числитель и знаменатель не имеют общих корней и степень знаменателя равна n. Невырожденность функции $\chi(p)$ равносильна тому, что пара (A,b) – полностью управляема и пара (A,c) – полностью наблюдаема.

При сделанных предположениях существует вектор $r\in\mathbb{R}^n, r\neq 0$ такой, что

$$Ar = r \text{ и } (c,r) = \zeta. \tag{16}$$

Учитывая свойства (15) и (16) легко показать, что систему (13) можно рассматривать на цилиндре $M = \mathbb{R}^n/G$, где $G = \{lr \mid l\in\mathbb{Z}\}$ – дискретная подгруппа $\mathbb{R}^n$.

Наряду с (13) рассмотрим коцикл (τ,φ), введенный в главе 2. Тогда имеем семейство систем

$$y_{k+1} = Ay_k + b\hat{\phi}(\tau^k(q),w_k),\ w_k = (c,y_k),\ k = 0,1,2,\dots,$$

где $\hat{\phi}$ – продолжение ϕ в смысле главы 2, и которое запишем в виде

$$y_{k+1} = Ay_k + b\phi^{(q)}(k,w_k),\ w_k = (c,y_k),\ k = 0,1,2,\dots, \tag{17}$$

Предположим, что расширенная нелинейность $\hat{\phi}$ удовлетворяет также условиям (14) и (15).

Пусть $\{y_k^{(q)}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ – решение системы (17) при параметре q и $w_k^{(q)} = (c,y_k^q)$, $k = 0,1,2,\dots$ – соответствующий выход системы.

Определение 1 *Пусть задано число $\varrho\in(0,1]$. Система (17) называется $\varrho\zeta$-устойчивой в целом, если для любого $q\in Q$ и любого решения $\{w_k^{(q)}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ существует такое $k_0\geqslant 0$, что $|w_{k_1}^{(q)} - w_{k_2}^{(q)}|\leqslant\varrho\zeta$, $\forall k_1,k_2\geqslant k_0$.*

Следующая теорема обобщает результат из [11] на класс дискретных коциклов.

Теорема 1 *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *Существует число $\lambda \in (0,1)$ такое, что матрица $\frac{1}{\lambda}A$ имеет одно собственное значение вне и $n-1$ собственных значений внутри единичной окружности, и выполнено частотное условие*

$$\mathrm{Re}\chi(\lambda p) + \kappa|\chi(\lambda p)|^2 < 0 \tag{18}$$

для всех комплексных p с $|p| = 1$.

2) *Существуют числа $\delta_0 > 0$ и $\delta_1 > 0$ с $\delta_0 + \delta_1 < \zeta$ и существует непрерывная ζ-периодическая функция $\phi_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что имеет место:*

   a) *Для каждого $\delta \in (0, \delta_0]$ имеем*

   $$\hat{\phi}(\tau^k(q), w) \leqslant \phi_1(w) < \kappa(w-\delta),\ \forall w \in [\delta, \zeta],\ k = 0,1,2,\ldots,\ \forall q \in Q; \tag{19}$$

   b) *Для каждого $\delta \in [-\delta_1, 0)$ имеем*

   $$\hat{\phi}(\tau^k(q), w) \geqslant \phi_1(w) > \kappa(w-\delta),\ \forall w \in [-\zeta, \delta],\ k = 0,1,2,\ldots,\ \forall q \in Q;$$

3) $(c, b) < 0$.

Пусть числа $\varepsilon_0 \in (0, \delta_0)$ и $\varepsilon_1 \in (0, \delta_1)$ произвольные.

Тогда для каждого решения $\{y_k^{(q)}\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ системы (17), которое не стремится к одному из lr, $l \in \mathbb{Z}$, существуют такие целые числа m и $k \geqslant 0$, что

$$w_k^{(q)} = (c, y_k^{(q)}) \in \mathit{\Gamma}_m(\varepsilon_0, \varepsilon_1),\ \forall k \geqslant k_0,$$

где

$$\mathit{\Gamma}_m(\varepsilon_0, \varepsilon_1) := [m\zeta + \delta_0 - \varepsilon_0, (m+1)\zeta - \delta_1 + \varepsilon_1].$$

Следствие 1 *В условиях теоремы 1 система (17) $\varrho\zeta$-устойчива в целом. При этом*

$$\varrho := 1 - \frac{1}{\zeta}(\delta_0 + \delta_1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_1),$$

где $\varepsilon_0 \in (0, \delta_0)$ и $\varepsilon_1 \in (0, \delta_1)$ – произвольны.

Доказательство.

Из неравенства (18) и невырожденности передаточной функции χ следует, что выполнены все условия дискретной частотной теоремы [3] (теорема Калмана-Якубовича-Попова). В силу этой теоремы существуют вещественная $n \times n$-матрица $P = P^*$ и число $\varepsilon_2 > 0$ такие, что

$$\frac{1}{\lambda^2}(Ay+b\xi, P(Ay+b\xi))-(y,Py)+(\kappa(c,y)-\xi)(c,y) \leqslant -\varepsilon_2 \parallel y \parallel^2, \ \forall y \in \mathbb{R}^n, \ \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

Из неравенства (20) и условия 1) теоремы 1 следует, что матрица P имеет одно отрицательное и $n-1$ положительных собственных значений. В этой ситуации применима лемма из [13], в силу которой имеет место

$$\{y \mid (y, Py) \leqslant 0\} \cap \{y \mid (c,y) = 0\} = \{0\}. \tag{21}$$

Введем семейство функций $V_h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, где $V_h(y) := (y - hr, P(y - hr))$ и семейство множеств $\Omega_h := \{y \in \mathbb{R}^n \mid V_h(y) \leqslant 0\}$.

Из результатов работы [14] вытекает, что для любого решения $\{y_k^{(q)}\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ системы (17), которое не стремится к какому-либо $lr, l \in \mathbb{Z}$ существуют $m \in \mathbb{Z}$ и k_1 такие, что

$$y_k^{(q)} \in \mathit{\Gamma}_m, \ \forall k \geqslant k_1. \tag{22}$$

В силу условия (26) последнее соотношение имеет место для всех $q \in Q$. При этом

$$\mathit{\Gamma}_m := \Omega_m \cap \Omega_{m+1} \cap \{y \mid m\zeta \leqslant (c,y) \leqslant (m+1)\zeta\}.$$

Выберем произвольное $\varkappa_0 \in (0, \frac{\delta_0}{\zeta})$ и покажем, что для каждого решения $\{y_k^{(q)}\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ системы (17), которое удовлетворяет соотношению (22) и для которого выполнено

$$\forall k_1 \in \mathbb{R}_+ \, \exists k_2 > k_1 \colon y_{k_2}^{(q)} \neq mr \tag{23}$$

имеет место

$$\forall \varkappa \in (0, \varkappa_0) \, \exists k_\varkappa \, \forall k > k_\varkappa \colon y_k^{(q)} \in \mathit{\Gamma}_{m,\varkappa}, \tag{24}$$

где

$$\mathit{\Gamma}_{m,\varkappa} := \Omega_{m+\varkappa} \cap \Omega_{m+1} \cap \{y \mid (m+\varkappa)\zeta \leqslant (c,y) \leqslant (m+1)\zeta\}.$$

Для произвольного $\varkappa \in (0, \varkappa_0)$ из (21) следует соотношение

$$\{y \mid (y-(m+\varkappa)r, P(y-(m+\varkappa)r) \leqslant 0\} \cap \{y \mid (c,y) = (m+\varkappa)r\}.$$

Отсюда получаем, что множества $\Omega_{m+\varkappa} \cap \{y \mid (m+\varkappa)\zeta \leqslant (c,y)\}$ и $\Omega \cap \{y \mid (c,y) \leqslant (m+1)\zeta\}$ выпуклы. Из этого следует выпуклость множества $\Gamma_{m,\varkappa}$.

Подставим в неравенство (20) выражения $y = y_k^{(q)} - (m+\varkappa)r$ и $\xi = \hat{\phi}(\tau^k(q),(c,y_k^{(q)}))$. Тогда получим

$$\frac{1}{\lambda^2}(Ay_k^{(q)} + b\hat{\phi}(\tau^k(q),(c,y_k^{(q)})) - (m+\varkappa)r, P[Ay_k^{(q)} + b\hat{\phi}(\tau^k(q),(c,y_k^{(q)}))- (m+\varkappa)r]) - (y_k^{(q)} - (m+\varkappa)r, P[y_k^{(q)} - (m+\varkappa)r]) + [\kappa(c,y_k^{(q)} - (m+\varkappa)r)- \hat{\phi}(\tau^k(q),(c,y_k^{(q)}))] \times ((c,y_k^{(q)} - (m+\varkappa)r) \leqslant -\varepsilon_2 \parallel y_k^{(q)} - (m+\varkappa)r \parallel^2,\ k \geqslant 0. \tag{25}$$

Умножая (25) на λ^2 получаем неравенство

$$\Delta V_{m+\varkappa}(y_k^{(q)}) + (1-\lambda^2)V_{m+\varkappa}(y_k^{(q)}) \leqslant -\varepsilon_2\lambda^2 \parallel y_k^{(q)} - (m+\varkappa)r \parallel^2 -\lambda^2[\kappa(c,y_k^{(q)}- (m+\varkappa)r) - \hat{\phi}(\tau^k(q),(c,y_k^{(q)}))](c,y_k^{(q)} - (m+\varkappa)r),\ k \geqslant 0, \tag{26}$$

где

$$\Delta V_{m+\varkappa}(y_k^{(q)}) := V_{m+\varkappa}(y_{k+1}^{(q)}) - V_{m+\varkappa}(y_k^{(q)}) -$$

первая разность в силу системы (17).

Покажем, что для каждого решения $\{y_k^{(q)}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ системы (17) и произвольного $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ из $y_{k_0}^{(q)} \in \Gamma_{m,\varkappa}$ следует, что $y_k^{(q)} \in \Gamma_{m,\varkappa}$, $\forall k > k_0$.

Допустим, что это не так, т.е. допустим, что существует решение $\{y_k^{(q)}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ системы (17) и моменты времени $k_0 < k_1$ такие, что

$$y_k^{(q)} \in \Gamma_{m,\varkappa},\ k_0 \leqslant k \leqslant k_1 \text{ и } y_{k+1}^{(q)} \notin \Gamma_{m,\varkappa}. \tag{27}$$

Используя включение $y_{k_1}^{(q)} \in \Omega_{m+\varkappa}$, соотношение (26) и неравенство

$$[\kappa(c,y_{k_1}^{(q)} - (m+\varkappa)r) - \hat{\phi}(\tau^{k_1}(q),(c,y_{k_1}^{(q)}))](c,y_{k_1}^{(q)} - (m+\varkappa)r) \geqslant 0,$$

получаем, что $y_{k_1+1}^{(q)} \in \Omega_{m+\varkappa}$. Учитывая далее соотношение (24), мы видим, что свойство (27) возможно лишь в том случае, если

$$m\zeta \leqslant (c,y_{k_1+1}^{(q)}) < (m+\varkappa)\zeta. \tag{28}$$

Чтобы показать, что влючение (28) невозможно, введем две вспомогательные функции. Обозначим для этого $z_1^{(q)} := y_{k_1}^{(q)}$, $w_1^{(q)} := (c,z_1^{(q)})$,

$\xi_1^{(q)} := \hat{\phi}(k_1, w_1^{(q)})$ и рассмотрим в множестве $\varGamma_{m,\varkappa}$ точку $z_2 := (m+\varkappa')r$ такую, что $\varkappa < \varkappa' < \frac{\delta_0}{\zeta}$ и $(m+\varkappa')\zeta \neq (c, z_1^{(q)})$. Кроме того, введем обозначения $w_2 := (c, z_2)$ и $\xi_2 := \hat{\phi}(k_1, w_2)$. При этом можно считать, что $m\zeta < w_1^{(q)} < w_2 < (m+1)\zeta$. Первая вспомогательная функция $\tilde{\phi}^{(q)}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет вид

$$\tilde{\phi}^{(q)}(w) := \begin{cases} \dfrac{\xi_1}{w_1^{(q)} - m\zeta}(w - m\zeta),\ w \in [m\zeta, w_1^{(q)}], \\ \dfrac{\xi_2 - \xi_1}{w_2 - w_1^{(q)}}(w - w_1),\ w \in (w_1^{(q)}, w_2), \\ -\dfrac{\xi_2}{(m+1)\zeta - w_2}(w - w_2) + \xi_2,\ w \in [w_2, (m+1)\zeta], \end{cases}$$

$$\tilde{\phi}^{(q)}(w+\zeta) = \tilde{\phi}^{(q)}(w),\ \forall w \in \mathbb{R}.$$

Легко видеть, что функция $\tilde{\phi}^{(q)}$ удовлетворяет условиям (14), (15) и (19). Вторая вспомогательная функция $f^{(q)} : [0,1] \to \mathbb{R}$ имеет вид

$$f^{(q)}(s) := (c, A(sw_1^{(q)} + (1-s)w_2) + b\tilde{\phi}^{(q)}(sw_1^{(q)} + (1-s)w_2)) - (m+\varkappa)\zeta.$$

Очевидно, что для этой функции имеют место соотношения

$f^{(q)}(0) = (c, Aw_1^{(q)}) + (c, b\tilde{\phi}^{(q)}(w_2) - (m+\varkappa)\zeta) = (m+\varkappa') + (c, b\phi(\tau^{k_1}(q), w_2)) -$
$(m+\varkappa)\zeta > (\varkappa' - \varkappa)\zeta > 0,$
$f^{(q)}(1) = (c, y_{k_1+1}^{(q)}) - (m+\varkappa)\zeta < 0.$

Функция $f^{(q)}(\cdot)$ непрерывна. Следовательно, существует $\bar{s}^{(q)} \in (0,1)$ такое, что

$$f^{(q)}(\bar{s}^{(q)}) = 0. \tag{29}$$

В силу выпуклости множества $\varGamma_{m,\varkappa'}$ имеет место включение

$$z^{(q)}(s) := sz_1^{(q)} + (1-s)z_2 \in \varGamma_{m,\varkappa'},\ \forall s \in [0,1]. \tag{30}$$

Из этого, в частности, следует, что

$$V_{m+\varkappa}(z^{(q)}(s)) \leqslant \text{и}\,(c, z^{(q)}(s)) > (m+\varkappa)\zeta,\ \forall s \in [0,1].$$

Из неравенства (14) имеем соотношение

$$[\kappa(c, z^{(q)}(s) - (m+\varkappa)r) - \tilde{\phi}((c, z^{(q)}(s)))](c, [z^{(q)}(s) - (m+\varkappa)r]) \geqslant 0,\ \forall s \in [0,1].$$

Таким образом из (25) получаем неравенство

$$V_{m+\varkappa}(Az^{(q)}(s)+b\tilde{\phi}^{(q)}((c,z^{(q)}(s)))-V_{m+\varkappa}(z^{(q)}(s))\leqslant 0,$$

из него вытекает включение

$$Az^{(q)}(s)+b\tilde{\phi}^{(q)}((c,z^{(q)}(s)))\in\Omega_{m+\varkappa},\ \forall s\in[0,1].$$

Из последнего соотношения и из (29) с учетом соотношения (21) следует, что

$$Az^{(q)}(\bar{s}^{(q)})+b\tilde{\phi}^{(q)}((c,z^{(q)}(\bar{s}^{(q)})))=(m+\varkappa)r. \tag{31}$$

Далее имеет место неравенство

$$z^{(q)}(\bar{s}^{(q)})\neq(m+\varkappa)r. \tag{32}$$

В противном случае мы имеем скалярное уравнение

$$\bar{s}^{(q)}w_1^{(q)}+(1-\bar{s}^{(q)})w_2=(m+\varkappa)\zeta.$$

С другой стороны имеет место неравенство

$$\bar{s}^{(q)}w_1^{(q)}+(1-\bar{s}^{(q)})w_2>\bar{s}^{(q)}w_1^{(q)}+(1-\bar{s}^{(q)})w_1^{(q)}=w_1^{(q)}\geqslant(m+\varkappa)\zeta.$$

Из (26), (30) и (32) следует, что

$$V_{m+\varkappa}(Az^{(q)}(\bar{s}^{(q)})+b\tilde{\phi}^{(q)}((c,z^{(q)}(\bar{s}^{(q)})))\leqslant\lambda^2V_{m+\varkappa}(z^{(q)}(\bar{s}^{(q)}))-\varepsilon_2\lambda^2\parallel z^{(q)}(\bar{s}^{(q)})-(m+\varkappa)r\parallel^2<0,$$

что противоречит равенству (31). Полученное противоречие доказывает инвариантность множества $\mathit{\Gamma}_{m,\varkappa}$ с произвольным $\varkappa\in(0,\varkappa_0]$ относительно решений $\{y_k^{(q)}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ системы (17).

Покажем сейчас, что любое решение системы (17), обладающее свойством (22), попадает в множество $\mathit{\Gamma}_{m,\varkappa_0}$. Допустим, что это не так, т.е. что существует такое решение $\{y_k^{(q)}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ системы (17), которое удовлетворяет включению (22) и одновременно включению

$$y_k^{(q)}\in\mathit{\Gamma}_m\backslash\mathit{\Gamma}_{m,\varkappa_0},\ \forall k\geqslant k_0.$$

Из доказанной инвариантности множества $\mathit{\Gamma}_m$ следует, что существует $\varkappa_1\in(0,\varkappa_0]$ такое, что имеет место соотношение

$$y_k^{(q)}\notin\mathit{\Gamma}_{m,\varkappa_1},\ \forall k\geqslant k_0. \tag{33}$$

Кроме того, для любого $\varepsilon \in (0, \varkappa_1)$ существует такое $k_\varepsilon^{(q)} \in \mathbb{Z}_+$, что

$$y_k^{(q)} \in \mathit{\Gamma}_m, \; \forall k \geqslant k_\varepsilon^{(q)}. \tag{34}$$

Тогда существует последовательность моментов времени $\{k_j^{(q)}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ с $k_j^{(q)} \to \infty$ при $j \to \infty$ такая, что

$$\lim_{j\to\infty} y_{k_j^{(q)}}^{(q)} = (m+\varkappa_1)r.$$

Допустим, что это не так. В силу предположения $2a$) теоремы имеем $\phi_1((m+\varkappa_1)\zeta) < 0$. Из непрерывности ϕ_1 и предложения $2a$ теоремы вытекает, что существует такое $\delta_3 > 0$, что при $\parallel y - (m+\varkappa_1)r \parallel < \delta_3$ имеем $\hat{\phi}(\tau^k(q), (c, y)) \leqslant \phi_1((c, y)) \leqslant \frac{1}{2}\phi_1(m+\varkappa_1)\zeta$, $\forall k \geqslant 0$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выбираем число j_ε такое, что $\parallel Ay_{k_j^{(q)}}^{(q)} - (m+\varkappa_1)r \parallel < \varepsilon$ и $\parallel y_{k_j^{(q)}}^{(q)} - (m+\varkappa_1)r \parallel < \delta_3$, $\forall j \geqslant j_\varepsilon$.

Из неравенства (20) следует неравенство $(b, Pb) \leqslant 0$. Отсюда и из неравенства $(c, b) < 0$ получаем включение

$$(m+\varkappa_1)r+\alpha b \in \mathrm{int}\mathit{\Gamma}_{m,\varkappa_0} = \{y \mid V_{m+\varkappa_1}(y) < 0\} \cap \{y \mid (c, y) > (m+\varkappa_1)\zeta, \; \forall \alpha \geqslant 0.$$

Но тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеем также $y_{k_j^{(q)}+1}^{(q)} \in \mathrm{int}\mathit{\Gamma}_{m,\varkappa_1}$ для всех целых $j \geqslant j_\varepsilon$. Из последнего включения с учетом (34) получаем включение $y_k^{(q)} \in \mathit{\Gamma}_{m,\varkappa_1}$, $\forall k \geqslant k_\varepsilon^{(q)} + 1$, что противоречит (33).

Можно сделать заключение, что с учетом (34) существует такое $\delta_3 > 0$, что для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_\varepsilon > 0$ и $k_\varepsilon > 0$ такие, что для всех $k \geqslant k_\varepsilon$ имеем неравенства

$$\begin{aligned} &-\varepsilon < V_{m+\varkappa_1-\delta_\varepsilon}(y_k^{(q)}) < 0, \\ &\parallel y_k^{(q)} - (m+\varkappa_1-\delta_\varepsilon)r \parallel \geqslant \delta_3, \\ &(c, y_k^{(q)}) \geqslant (m+\varkappa_1-\delta_\varepsilon)\zeta. \end{aligned} \tag{35}$$

Из последнего неравенства (35) и неравенства (14) следует, что

$$[\kappa(c, y_k^{(q)} - (m+\varkappa_1-\delta_\varepsilon)r) - \hat{\phi}(\tau^k(q), (c, y_k^{(q)}))](c, y_k^{(q)} - (m+\varkappa_1-\delta_\varepsilon)r) \geqslant 0, \; \forall k \geqslant k_\varepsilon. \tag{36}$$

Из (25), (35) и (36) вытекают соотношения

$$\frac{1}{\lambda^2}V_{m+\varkappa_1-\delta_\varepsilon}(y_k^{(q)}) \leqslant V_{m+\varkappa_1-\delta_\varepsilon}(y_k^{(q)}) - \varepsilon_2 \parallel y_k^{(q)} - (m+\varkappa_1-\delta_\varepsilon)r \parallel^2 \leqslant$$
$$V_{m+\varkappa_1-\delta_\varepsilon}(y_k^{(q)}) - \varepsilon_2\delta_3^2 \leqslant -\varepsilon_2\delta_3^2, \text{ для любых } k \geqslant k_\varepsilon.$$

Следовательно имеем

$$V_{m+\varkappa_1-\delta_\varepsilon}(y_k^{(q)}) \leqslant -\lambda^2\varepsilon_2\delta_3^2,\ \forall k \geqslant k_\varepsilon.$$

Очевидно, что последнее неравенство противоречит первому неравенству из соотношений (35), если выбрать $\varepsilon > 0$ достаточно малым. Таким образом показано, что для каждого решения $\{y_k^{(q)}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ системы (17), для которых имеют место соотношения (22) и (23), выполнено (24).

Аналогичным образом можно показать, что для каждого решения $\{y_k^{(q)}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, для которого имеют место соотношения (22) и (23) с параметром $m+1$ вместо m и с произвольным $\varkappa \in (0, \frac{\delta_1}{\zeta})$ существует $k_0 \geqslant 0$ такое, что

$$y_k^{(q)} \in \Omega_m \cap \Omega_{m+1-\varkappa} \cap \{y \mid m\zeta \leqslant (c,y) \leqslant (m+1-\varkappa)\zeta\}.$$

Таким образом, теорема доказана полностью. □

Пример 1. Рассмотрим неавтономную дискретную систему на единичной окружности S^1 в виде

$$w_{k+1} = w_k - \alpha q_k F(w_k),\ k = 0, 1, 2, \dots\ . \tag{37}$$

Считаем, что $\alpha > 0$ – параметр, а $\{q_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – последовательность управляющих воздействий. Предположим, что $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – 2π-периодическая функция, которая на $[0, 2\pi)$ имеет вид

$$F(w) = \begin{cases} -(\alpha+\delta), 0 \leqslant w < \pi, \\ \alpha - \delta, \pi \leqslant w < 2\pi. \end{cases}$$

Здесь $\delta > 0$ – параметр, удовлетворяющий условию $\alpha > \delta$. Покажем, что при некоторых ограничениях на α, δ и q выполнены условия теоремы 1.

Система (37) принимает вид системы (13) если положим $n = 1, A = 1$, $b = -\alpha$, $c = 1$ и

$$\phi(k, w) := q_k F(w),\ \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall w \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, что выполнено условие 3) теоремы 1, т.к. $(c, b) = cb = -\alpha < 0$. Передаточная функция $\chi(p)$ линейной части системы (37) имеет вид

$\chi(p) = \frac{\alpha}{p-1}$, $p \in \mathbb{C}, p \neq 1$. Ясно, что она невырождена. Проверим частотное условие (18) теоремы 1. Пусть $\lambda \in (0,1)$ варьируемый параметр и $\kappa > 0$ параметр из неравенства (14). Запишем $p \in \mathbb{C}, |p| = 1$, в виде $p = e^{i\omega}, \omega(-\pi, \pi]$. Тогда имеем

$$\chi(\lambda p) = \frac{\alpha}{(\lambda \cos w - 1) + i\lambda \sin w} = \frac{\alpha[(\lambda \cos w - 1) - i\lambda \sin w]}{[\lambda \cos w - 1]^2 + \lambda^2 \sin^2 w}. \qquad (38)$$

Выполнение неравенства (18) эквивалентно тому, что для некоторых $\lambda \in (0,1)$ имеет место

$$\alpha(\lambda \cos w - 1) + \kappa\alpha^2 < 0, \, \forall \omega(-\pi, \pi]. \qquad (39)$$

Очевидно, что неравенство (39) выполнено, если

$$0 < \alpha < \frac{1}{\kappa}. \qquad (40)$$

Предположим для простоты, что в нелинейности (34) $q_k \equiv 1$. Тогда легко видно, что выполнены все условия теоремы 1. В силу следствия 1 этой теоремы имеет место следующее. Пусть $\{w_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ произвольное решение системы (37) со свойством $w_k \not\equiv 2\pi l$ для произвольного $l \in \mathbb{Z}$. Тогда для произвольных $\varepsilon_0 \in (0, \pi - (\alpha - \delta))$ и $\varepsilon_1 \in (0, \pi - (\alpha + \delta))$ существуют числа $m \in \mathbb{Z}$ и $k_0 \geqslant 0$ такие, что

$$w_k \in \mathit{\Gamma}_m(\varepsilon_0, \varepsilon_1) = [m2\pi + \pi - (\alpha - \delta) - \varepsilon_0, (m+1)2\pi - \pi + (\alpha + \delta)\varepsilon_1], \, \forall k \geqslant k_0. \quad (41)$$

5 Инвариантная мера для дискретных измеримых коциклов и оператор Перрона-Фробениуса

Изложим в этой главе основные свойства измеримых коциклов с инвариантной мерой. Во многом мы следуем аналогично подходу для стохастических коциклов ([4, 7, 8]).

Пусть $(Q, \mathfrak{A}, \mu)$ – вероятностное пространство, где $\mathfrak{A}$ – заданная на Q σ-алгебра множеств, а μ – мера на этой σ-алгебре.

Измеримой базисной системой называется базисная система, которая задается семейством измеримых отображений

$$\tau^k \colon Q \to Q, k \in \mathbb{Z}, \qquad (42)$$

которые удовлетворяют свойствам группы:

1) $\tau^0(\cdot) = \mathrm{id}_Q$;

2) $\tau^{k+j}(\cdot) = \tau^k(\cdot) \circ \tau^j(\cdot), \forall k, j \in \mathbb{Z}$.

Предположим, что μ – инвариантная мера для измеримой динамической системы, т.е.

$$\mu(\tau^{-k}(A)) = \mu(A),\ \forall A \in \mathfrak{A},\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть (M, ρ) – компактное метрическое пространство. Предположим далее, что $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(M)$ – σ-алгебра множеств на M.

Дискретный измеримый коцикл над измеримой базисной системой (42) определяется отображением

$$\varphi^k(q, \cdot)\colon \mathbb{Z}_+ \times Q \times M \to M,$$

которое для фиксированного времени является $(\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ – измеримым отображением и удовлетворяет для всех $k, j \in \mathbb{Z}_+$ и μ – почти всех $q \in Q$ и $u \in M$ соотношению

$$\varphi^{k+j}(q, u) = \varphi^k(\tau^j(q), \varphi^j(q, u)).$$

Такой дискретный измеримый коцикл φ над базисным потоком τ порождает измеримую систему косого произведения, заданную как

$$(q, u) \in Q \times M \mapsto (\tau^k(q), \varphi^k(q, u)) =: S^k(q, u), \text{где}\, k \in \mathbb{Z}_+. \tag{43}$$

Рассмотрим семейство непустых замкнутых множеств $\hat{Z} = \{Z(q)\}_{q\in Q}$, где $Z\colon Q \to 2^M$ – измеримое отображение. Назовем такое семейство коротко *измеримым семейством множеств.*

Измеримое семейство множеств называется *инвариантным* для измеримого коцикла (τ, φ), если для μ-п.в. $q \in Q$

$$\varphi^k(Z(q)) = Z(\tau^k(q))\, \text{для всех}\, k \in \mathbb{Z}.$$

Измеримая функция $u(\cdot)\colon Q \to M$ называется *измеримым состоянием равновесия* для измеримого коцикла (τ, φ), если $\varphi^k(q, u(q)) = u(\tau^k(q))$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$.

Будем говорить, что измеримое семейство множеств $\hat{A} = \{A(q\}_{q\in Q}$ *притягивает* измеримое семейство множеств $\hat{B} = \{B(q)\}_{q\in Q}$ относительно коцикла (τ, φ), если для μ-п.в. $q \in Q$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{dist}(\varphi^k(\tau^{-k}(q), B(\tau^{-k}(q))), A(q)) = 0.$$

Если $\hat{Z} = \{Z(q)\}_{q\in Q}$ и $\hat{B} = \{B(q)\}_{q\in Q}$ – измеримые семейства множеств такие, что для μ-п.в. $q \in Q$ существует время $k_{\hat{B}}(q)$ такое, что для всех $k \geqslant k_{\hat{B}}(q)$ имеем

$$\varphi^k(\tau^{-k}(q), B(\tau^{-k}(q))) \subset Z(q),$$

то говорят, что *семейство $\hat{Z}$ притягивает семейство $\hat{B}$* относительно коцикла (τ, φ).

Измеримое семейство множеств $\hat{A} = \{A(q)\}_{q\in Q}$ называется *глобальным $\mathcal{B}$- аттрактором при вытягивании назад* для коцикла (τ, φ), если имеет место:

1) Множество $A(q)$ компактно для каждого $q \in Q$;

2) Для каждого ограниченного множества $B \subset M$ имеет место

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{dist}(\varphi^k(\tau^{-k}(q), B), A(q)) = 0$$

для μ-п.в. $q \in Q$;

3) Для каждого ограниченного множества $B \subset M$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{dist}(\varphi^k(q, B), A(\tau^k(q))) = 0.$$

для μ-п.в. $q \in Q$.

Измеримое семейство множеств $\hat{A} = \{A(q)\}_{q\in Q}$ называется *глобальным $\mathcal{B}$- аттрактором при вытягивании вперед* для коцикла (τ, φ), если:

1) Множество $A(q)$ компактно для каждого $q \in Q$;

2) Семейство $\hat{A}$ инвариантно относительно коцикла (τ, φ);

3) Для каждого ограниченного множества $B \subset M$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{dist}(\varphi^k(q, B), A(\tau^k(q))) = 0.$$

для μ-п.в. $q \in Q$.

Пусть $Z\colon Q \to 2^M$ – измеримое семейство множеств. ω - *предельным множеством* этого семейства относительно коцикла (τ, φ) называется множество

$$\omega(Z, q) := \bigcap_{k>0} \overline{\bigcup_{j\geqslant k} \varphi^j(\tau^{-j}(q), Z(\tau^{-j}(q)))}.$$

Теорема 2 *Предположим, что существует измеримое семейство* $q \in Q \mapsto K(q)$ *компактных* $\mathcal{B}$*-притягивающих множеств в* M. *Тогда множество* $\hat{A} = \{A(q)\}_{q \in Q}$, *для которых* $A(q)$ *определяется через*

$$A(q) = \overline{\bigcup_{B \subset M} \omega(B, q)}, \; q \in Q,$$

есть глобальный $\mathcal{B}$*-аттрактор при вытягивании назад коцикла* (τ, φ).

Доказательство.

Теорема доказывается методом, которым аналогичная теорема доказана для стохастических систем ([4]). □

Инвариантная мера ν для коцикла (τ, φ) есть вероятностная мера на σ-алгебре $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, которая является инвариантной относительно косого произведения (43), т.е.

$$\nu(S^{-k}(C)) = \nu(C), \forall C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \forall k \in \mathbb{Z}_+ \qquad (44)$$

и удовлетворяет условию

$$\pi_Q \nu = \mu.$$

Здесь $\pi_Q \colon Q \times M \to Q$ обозначает проекцию на Q. Инвариантная мера ν характеризуется с помощью дезинтегрирования $\{\nu_q(\cdot)\}_{q \in Q}$, которое удовлетворяет интегральному соотношению

$$\nu(C) = \int_Q \nu_q(C(q)) d\mu(q), \forall C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}.$$

Последнее эквивалентно тому, что для дифференциалов

$$\nu(dq, du) = \nu_q(du)\mu(dq).$$

Тогда свойство инвариантности (44) можно выразить как

$$\varphi^k(q, \nu_q) = \nu_{\tau^k(q)}, \forall k \in \mathbb{Z}_+, \forall q \in Q.$$

Оператор Перрона-Фробениуса $\mathcal{P}$ для ν сейчас можно записать в виде

$$\mathcal{P}\nu_q(Z(q)) = \nu_q(\varphi^{-1}(q, Z(\tau^1(q)))), \forall q \in Q,$$

где $\varphi^{-1}(q, Z(\tau^1(q))$ – прообраз множества $Z(\tau^1(q))$ отображения $\varphi = \varphi^1$. Напомним, что оператор Перрона-Фробениуса тесно связан с оператором Купмана, который определяется следующим образом.

Пусть задано гильбертово пространство H. Подпространство $\mathcal{H} \subset H$ выбирается со свойствами:

1) $\mathcal{H}$ имеет топологию $\mathcal{T}$, относительно которой оно является локально выпуклым векторным пространством.

2) Пространство $(\mathcal{H}, \mathcal{T})$ непрерывно и плотно вложено в H, т.е. топология $\mathcal{T}$ на $\mathcal{H}$ более сильная, чем топология на H и пространство $\mathcal{H}$ всюду плотно в H.

3) Пространство $(\mathcal{H}, \mathcal{T})$ плотно и бочечно.

Тройка $\mathcal{H} \subset H \subset \mathcal{H}'$, в которой $\mathcal{H}'$ топологически сопряженное к $\mathcal{H}$ пространство, образует оснащение пространства H.

Допустим, что $A \in \mathbb{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$. Тогда *сопряженный* к A относительно H оператор $A^+ \in \mathbb{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ определяем через соотношение

$$(A\eta, \nu) = (A^+\nu, \eta), \forall \eta, \nu \in \mathcal{H},$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скобка двойственности относительно H. Оператор называется самосопряженным относитело H, если $A^+ = A$.

Пусть φ эндоморфизм измеримого пространства $(M, \mathfrak{B})$. Тогда оператор эволюции $\mathcal{U}$ задан как *оператор Купмана* через

$$(\mathcal{U}g)(x) = g(\varphi(x)),\ x \in M. \tag{45}$$

Здесь g – квадратично-суммированная функция на M. Оператор Перрона-Фробениуса получается как сопряженный к $\mathcal{U}$ оператор.

6 Бифуркации инвариантных мер в зависящих от параметра коциклах с дискретным временем

Пусть $(\mathbb{A}, \rho_{\mathbb{A}})$ – метрическое пространство параметров и $\{(Q_\alpha, \alpha, \mu_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ – семейство пространств с вероятностной мерой. Предположим, что $(\{\tau_\alpha^k\}_{k \in \mathbb{Z}}, (Q_\alpha, \mathfrak{A}_\alpha, \mu_\alpha))_{\alpha \in \mathbb{A}}$ – семейство измеримых базисных систем с дискретным временем, т.е. для каждого $\alpha \in \mathbb{A}$ и каждого $k \in \mathbb{Z}$

$$\tau_\alpha^k(\cdot) : Q_\alpha \to Q_\alpha$$

есть измеримое относительно $\mathfrak{A}_\alpha$ отображение. При этом выполняется соотношения

1) $\tau_\alpha^0 = \mathrm{id}_{Q_\alpha}$;

2) $\tau_\alpha^{k+j} = \tau_\alpha^k \circ \tau_\alpha^j$, $\forall k, j \in \mathbb{Z}$, $\forall \alpha \in \mathbb{A}$.

Каждая динамическая система $\{\tau_\alpha^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ сохраняет соответствующую ей меру μ_α, т.е.

$$\mu_\alpha(\tau_\alpha^{-k}(A)) = \mu_\alpha(A),\ \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall \alpha \in \mathbb{A},\ \forall A \in \mathfrak{A}_\alpha.$$

Предположим далее, что $(M, \mathfrak{B})$ – измеримое пространство.

Зависящая от параметра измеримый коцикл с дискретным временем задан, если есть зависящее от параметра семейство отображений

$$\varphi_\alpha^k(\cdot) : Q_\alpha \times M \to M,\ \forall k \in \mathbb{Z}_+, \forall \alpha \in \mathbb{A},$$

которое измеримо относительно пары σ-алгебра $(\mathfrak{A}_\alpha \otimes \mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ и обладаюшее свойствам $1) - 3)$ коцикла из главы 1. Будем писать соответствующий коцикл с дискретным временем и с параметром в виде $\{(\tau_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$. Это семейство измеримых коциклов порождает семейство измеримых систем косого произведения через

$$(q, u) \in Q_\alpha \times M \to (\tau_\alpha^k(q), \varphi_\alpha^k(q, u)) =: S_\alpha^k(q, u),\ \forall k \in \mathbb{Z}_+,\ k \in \mathbb{Z}_+,\ \forall \alpha \in \mathbb{A}. \tag{46}$$

Пусть $\{\nu\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ семейство вероятностных мер на семействе измеримых пространств $\{Q_\alpha \times M, \mathfrak{A}_\alpha \otimes \mathfrak{B}\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$.

Будем говорить, что это семейство мер инвариантно относительно семейства измеримых систем косого произведения (46), если для каждого $\alpha \in \mathbb{A}$ каждого $k \in \mathbb{Z}$ имеют место

$$\nu_\alpha(S_\alpha^{-k}(C)) = \nu_\alpha(C),\ \forall C \in \mathfrak{A}_\alpha \otimes \mathfrak{B},$$
$$\pi_{q_\alpha}\nu_\alpha = \mu,$$

где $\pi_{Q_\alpha} : Q_\alpha \times M \to Q_\alpha$ есть семейство проекторов на $\{Q_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$.

Значение параметра $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$ называется *бифуркационным* для семейства инвариантных вероятностных мер $\{\nu_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ относительно семейства коциклов $\{(\tau_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, если это семейство в точке $\alpha = \alpha_0$ не является структурно устойчивым, т.е. если в любой окрестности точки α_0 найдется значение $\alpha \in \mathfrak{A}$ такое, что система косого произведения $\{S_{\alpha_0}^k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ и $\{S_\alpha^k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ не являются топологически эквивалентыми ([4, 1]).

Пример 2. Рассмотрим отображение Реньи ([6]) $\varphi_\alpha : [0, 1] \to [0, 1]$, которое задается через

$$\varphi_\alpha := \alpha x \bmod 1, x \in [0, 1], \tag{47}$$

где $\alpha > 1$ – параметр. Отображение Реньи используется в [9] как простейшая модель для описания нерегулярных ритмов в сердце.

Отображение (47) порождает дискретную по времени измеримую динамическую систему с параметром на измеримом пространстве $(M, \mathfrak{A}_L)$, где $M = [0,1]$ и $\mathfrak{A}_L$ – σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств на $[0,1]$. Пусть μ_L – мера Лебега на $\mathfrak{A}_L$.

Рассмотрим семейство трансфер-операторов ([6]) $\{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha>1}$ в виде $\mathcal{L}_\alpha\colon L^2(\mu_L) \to L^2(\mu_L)$, заданное через

$$\mathcal{L}_\alpha \eta := \frac{d}{d\mu_L} \int\limits_{\varphi_\alpha^{-1}(\cdot)} \eta d\mu_L,\ \eta \in L^2(\mu_L),$$

где $\frac{d}{d\mu_l}$ – производная Радона-Никодима относительно μ_L. Спектральные свойства семейства трансфер-операторов $\{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha>1}$ изучены для тестовых функций η из разных оснащенных гильбертовых пространств ([6]). В зависимости от выбранных оснащенных гильбертовых пространств в [6] получено семейство инвариантных мер.

Учет временных возмущений в виде пространств $\{Q_\alpha\}_{\alpha>1}$ приведет к семейству неавтономных отображений

$$\varphi_\alpha(q,x) := \varphi_\alpha(x) + q,\ \forall q \in Q_\alpha,\ x \in [0,1]$$

и к семейству систем косого произведения

$$S_\alpha^{(\cdot)}(\cdot)\colon Q_\alpha \times [0,1] \to Q_\alpha \times [0,1].$$

Пространства возмущений можно определить для $\alpha > 1$, например, как $Q_\alpha := \ell_\alpha^2(\mathbb{Z};\mathbb{R})$, где для $q = \{q_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in Q_\alpha$ имеем $\| \, q \, \|^2_{\ell^2_\alpha} (\mathbb{Z};\mathbb{R}) := \sum\limits_k |\alpha^{-k} q_k|^2$.

Список литературы

[1] Райтманн, Ф., *Динамические системы, аттракторы и оценки их размерности*, Изд-во С.-Петерб. ун-та, Санкт-Петербург, 2013.

[2] Райтманн Ф., Слепухин, А., О верхних оценках размерности Хаусдорфа отрицательно инвариантных множеств локальных коциклов, *Вестн. С-Петербург. ун-та. Сер. 1. Мат., мех. и астрон.*, 2011, вып. 4, стр. 61–70.

[3] Якубович, В. А., Частотная теорема в теории управления, *Сиб. мат. журн.*, 1973, вып. 2, том 14, стр. 384–420.

[4] Arnold, L., *Random Dynamical Systems*, Springer Monographs in Mathematics, Berlin: Springer, 1998.

[5] Baladi, V., Viana, M., Strong stochastic stability and rate of mixing for unimodal maps, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér*, 1996, no. 4, vol. 29, pp. 483–517.

[6] Bandtlow, F., Antoniou, I., Suchanecki, Z., Resonances of dynamical systems and Fredholm-Riesz operators on rigged Hilbert spaces, *Comput. Math. Appl.*, 1997, no. 2–4, vol. 34, pp. 95–102.

[7] Crauel, H., Flandoli, F., Hausdorff dimension of invariant sets for random dynamical systems, *J. Dyn. Differ. Equations*, 1998, no. 3, vol. 10, pp. 449–474.

[8] Crauel, H., Lyapunov exponents and invariant measures of stochastic systems on manifolds, pp. 271–291. *In: Arnold, L, Wihstutz, V. (eds.): Lyapunov Exponents. Berlin: Springer*, 1986.

[9] Glass, L., Guevera, M. R., Shrier, A., Universal bifurcations and the classification of cardiac arrhythmias, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 1987, vol. 504, pp. 168–178.

[10] Kloeden, P. E., Schmalfuss, B., Nonautonomous systems, cocycle attractors and variable time-step discretization, *Numer. Algorithms*, 1997, no. 1-3, vol. 14, pp. 141–152.

[11] Leonov, G. A., Reitmann, V., Lokalisierung der Lösung diskreter Systeme mit instationärer periodischer Nichtlinearität, *ZAMM*, 1986, no. 3, vol. 66, pp. 103 – 111.

[12] Maltseva, A., Reitmann, V., Bifurcations of invariant measures in discrete-time parameter dependent cocycles, *Proc. Equadiff 2013, Prag*, p. 288.

[13] Reitmann V., Über Instabilität im ganzen von nichtlinearen diskreten Systemen, *ZAMM*, 1979, vol. 59, pp. 652 – 655.

[14] Reitmann V., Über die Beschränktheit der Lösungen diskreter nichtstationärer Phasensysteme, *ZAA*, 1982, no. 1, vol. 1, pp. 83 – 93.

[15] Sun, J., Amellal, F., Glass L., and Billete, J. Alternans and period-doubling bifurcations in atrioventricular nodal conduction, *J. theor. Biol.*, 1995, vol. 173, pp. 79–91.