ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2005
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

РОЖДЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ИЗ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

С.Н.Нидченко

Россия, 620083, Екатеринбург, пр.Ленина, д.51,
Уральский государственный университет им.А.М.Горького,
Кафедра теоретической механики,
e-mail:nsn001@usla.ru

Аннотация

Для дифференциального уравнения с запаздыванием изучается бифуркация рождения периодических решений из положения равновесия. В основе построения уравнения разветвления лежит специальное интегральное уравнение. Предложена новая процедура его вывода, использующая специальные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для анализа системы уравнений разветвления использована модификация метода Хопфа. Получены условия существования и устойчивости периодических решений.

1 Постановка задачи

Рассматриваем скалярное дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = X(x(t), x(t-1), \varepsilon),$$

где X — вещественная функция вещественных аргументов, непрерывная по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируемая по первому и второму аргументам в малой окрестности точки $(0,0,0)^\top$, $\top$ — знак транспонирования, $X(x, x_{-1}, \varepsilon) \equiv 0$ при $x = x_{-1} = 0$, $\partial X(0,0,0)/\partial x = 0$, $\partial X(0,0,0)/\partial x_{-1} = -\pi/2$, ε — малый параметр. Требуется найти периодические решения этого уравнения в окрестности нулевого положения равновесия при малых значениях ε и исследовать их на устойчивость. Проблема рождения периодических решений из положения равновесия рассматривалась в работах [1–5].

В настоящей работе для рассматриваемого уравнения адаптируется методика исследований, описанная в работах [6, 7], где для построения уравнения разветвления используется специальное интегральное уравнение. Учитывая специфику условий данной задачи, предлагаем специальную процедуру построения функции Грина для интегрального уравнения. При нахождении системы уравнений разветвления не производится расщепление пространства и выделение специальной двумерной системы, отвечающей критическим корням характеристического уравнения, как это делается в работах [1–4]. Использование специального интегрального уравнения позволяет параметризовать многообразие, которому принадлежат искомые периодические решения в бесконечном пространстве состояний $C[-1,0]$.

Исходное уравнение преобразуется к виду

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{\pi}{2}x(t-1) + f(x(t), x(t-1), \varepsilon), \tag{1.1}$$

где f — непрерывная по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируемая по первому и второму аргументам функция в малой окрестности точки $(0,0,0)^\top$, $f(x, x_{-1}, \varepsilon) = a(\varepsilon)x + b(\varepsilon)x_{-1} + o\left(\left(x^2 + x_{-1}^2\right)^{1/2}\right)$, a и b — непрерывные функции в малой окрестности нуля, $a(0) = b(0) = 0$.

Соответствующее (1.1) порождающее уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{\pi}{2}x(t-1)$$

имеет однопараметрическое семейство периодических решений

$$x_0(t,\gamma) = \gamma \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right),\ \gamma, t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Метод Д-разбиения [8, с.62] показывает, что эти 4-периодические решения устойчивы. Нас интересуют периодические решения $x(t,\varepsilon)$, $t \in \mathbb{R}$, уравнения (1.1) в малой окрестности нулевого положения равновесия, с периодом $\omega(\varepsilon) = 4(1+\alpha(\varepsilon))$, отвечающие порождающим периодическим решениям $x_0(t,\gamma(\varepsilon))$, $t \in \mathbb{R}$. Здесь α и γ — вещественные непрерывные функции, удовлетворяющие условиям $\alpha(0) = 0$, $\gamma(0) = 0$.

Проведем в дифференциальном уравнении с запаздыванием (1.1) замены переменных: $t = (1+\alpha)s$, $x((1+\alpha)s) = \xi(s)$, $x(t-1) = x((1+\alpha)s-1) = \xi(s-1/(1+\alpha))$, $s \in \mathbb{R}$, α — малый параметр. Тогда уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{d\xi(s)}{ds} = -\frac{\pi}{2}\xi(s-1) + F\left(\xi(s), \xi(s-1), \xi\left(s - \frac{1}{1+\alpha}\right), \varepsilon, \alpha\right), \tag{1.3}$$

где $F(x_1, x_2, x_3, \varepsilon, \alpha) = (\pi/2)(x_2 - (1+\alpha)x_3) + (1+\alpha)f(x_1, x_3, \varepsilon)$.

Проведенные преобразования позволили свести задачу нахождения периодических решений исходного уравнения в малой окрестности нулевого положения равновесия, с периодом $\omega(\varepsilon) = 4(1+\alpha(\varepsilon))$ зависящим от параметра ε, к задаче нахождения 4-периодических решений уравнения (1.3) в малой окрестности нулевого положения равновесия этого уравнения.

2 Функция Грина периодической задачи

Для построения специального интегрального уравнения требуется найти функцию Грина, которая описывает представления 4-периодических решений дифференциального уравнения с запаздыванием

$$\frac{d\xi(s)}{ds} = -\frac{\pi}{2}\xi(s-1) + g(s), \tag{2.1}$$

где g — непрерывная 4-периодическая функция. Введя обозначения $\xi(i+\vartheta) = y_i(\vartheta)$, $g(i+\vartheta) = g_i(\vartheta)$, $i = \overline{1,4}$, $\vartheta \in [-1, 0]$, и используя метод, предложенный в работе [9, с.506], задачу нахождения 4-периодических решений уравнения с запаздыванием сводим к нахождению решений следующей краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_4(\vartheta)}{d\vartheta} = -\frac{\pi}{2}y_3(\vartheta) + g_4(\vartheta),$$

$$\frac{dy_3(\vartheta)}{d\vartheta} = -\frac{\pi}{2}y_2(\vartheta) + g_3(\vartheta),$$

$$\frac{dy_2(\vartheta)}{d\vartheta} = -\frac{\pi}{2}y_1(\vartheta) + g_2(\vartheta),$$

$$\frac{dy_1(\vartheta)}{d\vartheta} = -\frac{\pi}{2}y_4(\vartheta) + g_1(\vartheta), \vartheta \in [-1, 0], \tag{2.2}$$

$$y_1(-1) = y_4(0), y_2(-1) = y_1(0), y_3(-1) = y_2(0), y_4(-1) = y_3(0). \tag{2.3}$$

Запишем полученную краевую задачу в векторной форме

$$\frac{dy}{d\vartheta} = Ay + \tilde{g}(\vartheta), \tag{2.4}$$

$$y(-1) = Sy(0), \tag{2.5}$$

где $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^\top$, $\tilde{g}(\vartheta) = (g_1(\vartheta), g_2(\vartheta), g_3(\vartheta), g_4(\vartheta))^\top$, $\vartheta \in [-1, 0]$, $A = (-\pi/2)S$,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственным числам $\lambda_{1,2} = \pm\pi/2$, $\lambda_{3,4} = \pm i\pi/2$ матрицы A соответствуют собственные векторы $(-1, 1, -1, 1)^\top$, $(1, 1, 1, 1)^\top$, $(i, -1, -i, 1)^\top$, $(-i, -1, i,\ 1)^\top$. Нормированная в нуле фундаментальная матрица Y однородной системы дифференциальных уравнений, соответствующей (2.2), определяется формулой $Y(\vartheta) = \left(Y^1 e^{\frac{\pi}{2}\vartheta} + Y^2 e^{-\frac{\pi}{2}\vartheta} + Y^3 e^{i\frac{\pi}{2}\vartheta} + \overline{Y}^3 e^{-i\frac{\pi}{2}\vartheta}\right)/4$, $\vartheta \in [-1, 0]$, где

$$Y^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, Y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Y^3 = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 & i \\ i & 1 & -i & -1 \\ -1 & i & 1 & -i \\ -i & -1 & i & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу Коши, выпишем решение системы (2.4)

$$y(\vartheta) = Y(\vartheta)\left(y^0 + \int\limits_0^{\vartheta} Y^{-1}(z)\tilde{g}(z)dz\right), \ \vartheta \in [-1,0]. \tag{2.6}$$

Начальное значение y^0 найдем из краевого условия (2.5). Имеем линейную неоднородную систему алгебраических уравнений

$$\left(S^{-1}Y(-1) - I_4\right)y^0 = S^{-1}Y(-1)\int\limits_{-1}^{0} Y^{-1}(z)\tilde{g}(z)dz, \tag{2.7}$$

где I_4 — единичная матрица размерности 4×4. Система уравнений $(S^{-1}Y(-1)$ $-I_4)^\top d = 0$ имеет два линейно независимых решения $d^1 = (0,-1/2,0,1/2)^\top$ и $d^2 = (-1/2,0,1/2,0)^\top$. Решение системы (2.7) существует, если выполняется условие [10, с.21]

$$\int\limits_{-1}^{0} \Psi^\top(z)\tilde{g}(z)dz = 0, \tag{2.8}$$

где $\Psi(\vartheta) = \left(Y^{-1}(\vartheta)\right)^\top Y^\top(-1)(S^{-1})^\top D = \left(Y^{-1}(\vartheta)\right)^\top D =$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sin\frac{\pi}{2}\vartheta & -\cos\frac{\pi}{2}\vartheta & \sin\frac{\pi}{2}\vartheta & \cos\frac{\pi}{2}\vartheta \\ -\cos\frac{\pi}{2}\vartheta & \sin\frac{\pi}{2}\vartheta & \cos\frac{\pi}{2}\vartheta & -\sin\frac{\pi}{2}\vartheta \end{pmatrix}^\top, \vartheta \in [-1,0], D = \{d^1, d^2\}.$$

Оно определяется формулой $y^0 = 2D\gamma^1 + C^{-1}S^{-1}Y(-1)\int_{-1}^{0} Y^{-1}(z)\tilde{g}(z)dz$, где $C = S^{-1}Y(-1) - I - 2DD^\top$, $\gamma^1 \in R^2$ [10, с 22]. При нахождении решения краевой задачи (2.4), (2.5) с постоянной матрицей A можно положить $\gamma^1 = (\gamma, 0)^\top$. При выполнении условия (2.8), подставляя значение для y^0 в (2.6), находим решение краевой задачи (2.4), (2.5)

$$y(\vartheta) = Y(\vartheta)\left(2D\gamma^1 + C^{-1}S^{-1}Y(-1)\int\limits_{-1}^{0} Y^{-1}(z)\tilde{g}(z)dz + \int\limits_0^{\vartheta} Y^{-1}(z)\tilde{g}(z)dz\right),$$

где $\vartheta \in [-1,0]$. Преобразуя полученную формулу, имеем

$$y(\vartheta) = \Phi(\vartheta)\gamma^1 + \int\limits_{-1}^{0} G(\vartheta,z)\tilde{g}(z)dz, \ \vartheta \in [-1,0], \tag{2.9}$$

где $\Phi(\vartheta) = 2Y(\vartheta)D = 2\Psi(\vartheta)$, $\vartheta \in [-1, 0]$,

$$G(\vartheta, z) = \begin{cases} Y(\vartheta)\left(C^{-1}S^{-1}Y(-1) - I_4\right)Y^{-1}(z), & -1 \le \vartheta < z \le 0, \\ Y(\vartheta)C^{-1}S^{-1}Y(-1)Y^{-1}(z), & -1 \le z < \vartheta \le 0. \end{cases}$$

Функция G имеет разрыв первого рода на прямой $z = \vartheta$, $\vartheta \in [-1, 0]$, и называется функцией Грина краевой задачи (2.4), (2.5).

Рассмотрим новую краевую задачу

$$\frac{dy}{d\vartheta} = Ay + \tilde{\tilde{g}}(\vartheta), \tag{2.10}$$

$$y(-1) = Sy(0), \tag{2.11}$$

где $\tilde{\tilde{g}}(\vartheta) = \tilde{g}(\vartheta) - \Phi(\vartheta)W$, $\vartheta \in [-1, 0]$, $W = \int_{-1}^{0} \Psi^\top(z)\tilde{g}(z)dz$. Она имеет решение для любой непрерывной функции $\tilde{g}$. Действительно, $\int_{-1}^{0} \Psi^\top(z)\tilde{\tilde{g}}(z)dz = W - \int_{-1}^{0} \Psi^\top(z)\Phi(z)dzW = W - 2D^\top S^{-1}Y(-1)DW = W - 2D^\top DW = 0$. Заменяя в (2.9) $\tilde{g}$ на $\tilde{\tilde{g}}$, находим решение краевой задачи (2.10), (2.11) $y(\vartheta) = \Phi(\vartheta)\gamma^1 + \int_{-1}^{0} G(\vartheta, z)[\tilde{g}(z) - \Phi(z)\int_{-1}^{0} \Psi^\top(s)\tilde{g}(s)ds]dz = \Phi(\vartheta)\gamma^1 + \int_{-1}^{0}[G(\vartheta, z) - \int_{-1}^{0} G(\vartheta, s)\Phi(s)ds\Psi^\top(z)]\tilde{g}(z)dz$, $\vartheta \in [-1, 0]$. При выполнении условия (2.8), оно является решением краевой задачи (2.4), (2.5). Решение краевой задачи (2.10), (2.11) запишем в форме

$$y(\vartheta) = \Phi(\vartheta)\gamma^1 + \int\limits_{-1}^{0} \tilde{G}(\vartheta, z)\tilde{g}(z)dz, \tag{2.12}$$

где $\tilde{G}(\vartheta, z) = G(\vartheta, z) - \int_{-1}^{0} G(\vartheta, s)\Phi(s)ds\Psi^\top(z)$, $\vartheta, z \in [-1, 0]$. Функция $\tilde{G}$ называется функцией Грина краевой задачи (2.10), (2.11).

Рассмотрим теперь условие существования периодических решений дифференциального уравнения с запаздыванием (2.1). Оно вытекает из условия (2.8) существования решения краевой задачи (2.4), (2.5). Используя представление $\Psi = \{\psi_{ki}\}_{k=\overline{1,4}}^{i=1,2}$, заменим векторное условие (2.8) двумя скалярными условиями $\int_{-1}^{0} \sum\limits_{k=1}^{4} \psi_{ki}(\vartheta)g_k(\vartheta)d\vartheta = 0$, $i = 1, 2$. Производя замены $g_k(\vartheta) = g(k + \vartheta)$, $\vartheta \in [-1, 0]$, $k = \overline{1, 4}$, находим $\int_{-1}^{0} \sum\limits_{k=1}^{4} \psi_{ki}(\vartheta)g(k + \vartheta)d\vartheta = \sum\limits_{k=1}^{4} \int_{k-1}^{k} \psi_{ki}(\eta - k)g(\eta)d\eta = \int_{0}^{4} U_i(\eta)g(\eta)d\eta = 0$, $i = 1, 2$, где $U_1(\eta) = (1/2)\cos(\pi\eta/2)$, $U_2(\eta) = -(1/2)\sin(\pi\eta/2)$, $\eta \in [0, 4]$. Тогда условия существования периодического решения дифференциального уравнения с запаздыванием (2.1) принимают вид

$$W_1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) g(\eta)d\eta = 0,\; W_2 = -\frac{1}{2}\int\limits_0^4 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) g(\eta)d\eta = 0. \qquad (2.13)$$

При выполнении этих условий получим формулу, определяющую периодические решения дифференциального уравнения (2.1).

Используя замены: $\xi(i+\vartheta) = y_i(\vartheta)$, $s = i+\vartheta$, $\vartheta \in [-1,0]$, $i = \overline{1,4}$, и представление $\tilde{G} = \{\tilde{G_{ij}}\}_1^4$, вычислим периодические решения дифференциального уравнения с запаздыванием (2.1)

$$\xi(s) = -\gamma\sin\left(\frac{\pi}{2}(s-1)\right) + \int\limits_{-1}^{0}\sum_{k=1}^{4}\tilde{G}_{1k}(s-1,z)g(k+z)dz,\; s\in[0,1],$$

$$\xi(s) = -\gamma\cos\left(\frac{\pi}{2}(s-2)\right) + \int\limits_{-1}^{0}\sum_{k=1}^{4}\tilde{G}_{2k}(s-2,z)g(k+z)dz,\; s\in[1,2],$$

$$\xi(s) = \gamma\sin\left(\frac{\pi}{2}(s-3)\right) + \int\limits_{-1}^{0}\sum_{k=1}^{4}\tilde{G}_{3k}(s-3,z)g(k+z)dz,\; s\in[2,3],$$

$$\xi(s) = \gamma\cos\left(\frac{\pi}{2}(s-4)\right) + \int\limits_{-1}^{0}\sum_{k=1}^{4}\tilde{G}_{4k}(s-4,z)g(k+z)dz,\; s\in[3,4].$$

Преобразуем интегралы $\int_{-1}^{0}\left(\sum\limits_{k=1}^{4}\tilde{G}_{ik}(s-i,z)g(k+z)\right)dz = \sum\limits_{k=1}^{4}\int_{k-1}^{k}\tilde{G}_{ik}(s-i,\eta-k)g(\eta)d\eta = \int_0^4 G_i(s,\eta)g(\eta)d\eta$, где

$$G_i(s,\eta) = \begin{cases} \tilde{G}_{i1}(s-i,\eta-1),\; \eta\in[0,1) \\ \tilde{G}_{i2}(s-i,\eta-2),\; \eta\in[1,2) \\ \tilde{G}_{i3}(s-i,\eta-3),\; \eta\in[2,3) \\ \tilde{G}_{i4}(s-i,\eta-4),\; \eta\in[3,4] \end{cases},\; s\in[i-1,i], i=\overline{1,4}.$$

Тогда формулы, определяющие найденные периодические решения дифференциального уравнения с запаздыванием (2.1), можно переписать следующим образом

$$\xi(s) = \gamma \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) + \int\limits_0^4 \hat{G}(s,z)g(z)dz, \tag{2.14}$$

где

$$\hat{G}(s,\eta) = \begin{cases} G_1(s,\eta),\ s \in [0,1) \\ G_2(s,\eta),\ s \in [1,2) \\ G_3(s,\eta),\ s \in [2,3) \\ G_4(s,\eta),\ s \in [3,4] \end{cases}, \eta \in [0,4].$$

Функция $\hat{G}$ называется функцией Грина периодической задачи для дифференциального уравнения с запаздыванием (2.1).

3 Специальное интегральное уравнение

Можно показать, используя методы работ [6, 7], формулы (2.13), (2.14) и свойства функции Грина $\hat{G}$, что дифференциальное уравнение (1.3) имеет 4-периодическое решение в малой окрестности нулевого положения равновесия тогда и только тогда, когда интегральное уравнение

$$\xi(s) = \gamma \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) + \int\limits_0^4 \hat{G}(s,z)F\left(\xi(z), \xi(z-1), \xi\left(z - \frac{1}{1+\alpha}\right), \varepsilon, \alpha\right)dz,$$

где $s \in [0,4]$, имеет решение при малых значениях параметров γ и α, удовлетворяющее условиям

$$W_1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) F\left(\xi(\eta), \xi(\eta-1), \xi\left(\eta - \frac{1}{1+\alpha}\right), \varepsilon, \alpha\right)d\eta = 0,$$

$$W_2 = -\frac{1}{2}\int\limits_0^4 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) F\left(\xi(\eta), \xi(\eta-1), \xi\left(\eta - \frac{1}{1+\alpha}\right), \varepsilon, \alpha\right)d\eta = 0.$$

Учитывая периодичность искомого решения, интегральное уравнение можно преобразовать к виду

$$\xi(s) = \gamma \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) + \int\limits_0^4 \hat{G}(s,z)F(\xi(z), \xi(h_1(z)), \xi(h_2(z,\alpha)), \varepsilon, \alpha)dz, \tag{3.1}$$

где $s \in [0,4]$,

$$h_1(z) = \begin{cases} z+3, \ z \in [0,1), \\ z-1, \ z \in [1,4], \end{cases} \quad h_2(z,\alpha) = \begin{cases} z + \frac{3+4\alpha}{1+\alpha}, \ z \in \left[0, \frac{1}{1+\alpha}\right), \\ z - \frac{1}{1+\alpha}, \ z \in \left[\frac{1}{1+\alpha}, 4\right]. \end{cases}$$

Аналогично, дополнительные условия $W_1 = 0$, $W_2 = 0$ преобразуются к виду

$$W_1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) F\left(\xi(\eta), \xi(h_1(\eta)), \xi(h_2(\eta)), \varepsilon, \alpha\right) d\eta = 0,$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) F\left(\xi(\eta), \xi(h_1(\eta)), \xi(h_2(\eta)), \varepsilon, \alpha\right) d\eta = 0. \tag{3.2}$$

Искомое решение уравнения (3.1), удовлетворяющее условиям (3.2), совпадает с 4-периодическим решением дифференциального уравнения с запаздыванием (1.3) на отрезке $[0,4]$.

Вопрос существования решения специального интегрального уравнения (3.1) связан с наличием неподвижной точки оператора R, определяемого формулой

$$R(\xi)(s) = \gamma\cos\left(\tfrac{\pi}{2}s\right) + \int\limits_0^4 \hat{G}(s,z) F(\xi(z), \xi(h_1(z)), \xi(h_2(z,\alpha)), \varepsilon, \alpha) dz =$$
$$R^1(\xi)(s) + R^2(\xi)(s), \ s \in [0,4], \xi \in \Omega \subset C[0,4] = \mathcal{C},$$

где Ω — малая окрестность нуля. Здесь значения операторов R^1 и R^2 определяются формулами:

$$R^1(\xi)(s) = \gamma\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) + \frac{\pi}{2}\int\limits_0^4 \hat{G}(s,z)\left(\xi(h_1(z)) - \xi(h_2(z,\alpha))\right) dz, \tag{3.3}$$

$$R^2(\xi)(s) = \int\limits_0^4 \hat{G}(s,z)\Big((1+\alpha) f(\xi(z), \xi(h_2(z,\alpha)), \varepsilon) - \frac{\pi}{2}\alpha\xi(h_2(z,\alpha))\Big) dz, \tag{3.4}$$

где $s \in [0,4]$. Используя функции

$$\bar{h}_1(z) = \begin{cases} z+1, \ z \in [0,3), \\ z-3, \ z \in [3,4], \end{cases} \quad \bar{h}_2(z,\alpha) = \begin{cases} z + \frac{1}{1+\alpha}, \ z \in \left[0, \frac{3+4\alpha}{1+\alpha}\right), \\ z - \frac{3+4\alpha}{1+\alpha}, \ z \in \left[\frac{3+4\alpha}{1+\alpha}, 4\right], \end{cases}$$

преобразуем выражения для значений оператора R^1

$$R^1(\xi)(s) = \gamma\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) + \frac{\pi}{2}\int\limits_0^4 \hat{G}(s,z)\left(\xi(h_1(z)) - \xi(h_2(z,\alpha))\right)dz =$$

$$\gamma\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) + \frac{\pi}{2}\left(\int\limits_0^1 \hat{G}(s,z)\xi(z+3)dz + \int\limits_1^4 \hat{G}(s,z)\xi(z-1)dz - \right.$$

$$\left.\int\limits_0^{1/(1+\alpha)} \hat{G}(s,z)\xi\left(z+\frac{3+4\alpha}{1+\alpha}\right)dz - \int\limits_{1/(1+\alpha)}^4 \hat{G}(s,z)\xi\left(z-\frac{1}{1+\alpha}\right)dz\right) =$$

$$\gamma\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) + \frac{\pi}{2}\left(\int\limits_3^4 \hat{G}(s,z-3)\xi(z)dz + \int\limits_0^3 \hat{G}(s,z+1)\xi(z)dz - \right.$$

$$\left.\int\limits_0^{(3+4\alpha)/(1+\alpha)} \hat{G}\left(s,z+\frac{1}{1+\alpha}\right)\xi(z)dz - \int\limits_{(3+4\alpha)/(1+\alpha)}^4 \hat{G}\left(s,z-\frac{3+4\alpha}{1+\alpha}\right)\xi(z)dz\right) =$$

$$\gamma\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) + \frac{\pi}{2}\int\limits_0^4 \Big(\hat{G}(s,\bar{h}_1(z)) - \hat{G}(s,\bar{h}_2(z,\alpha))\Big)\xi(z)dz, s\in[0,4].$$

Для фиксированного малого по величине γ, $|\gamma| < \hat{\gamma}$, $\hat{\gamma} > 0$, введем в $\mathcal{C}$ множество $\Omega_\Delta = \{\xi : ||\xi-\varphi||_c \le \Delta,\ \xi\in\Omega,\ \Delta<1\}$, где $\varphi(s) = \gamma\cos(\pi s/2)$, $s\in[0,4]$.

Лемма 3.1. Пусть f — непрерывная по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируемая по первому и второму аргументам функция в малой окрестности точки $(0,0,0)^\top$, $f(x,x_{-1},\varepsilon) = a(\varepsilon)x + b(\varepsilon)x_{-1} + o\Big(\big(x^2+x_{-1}^2\big)^{1/2}\Big)$, a и b — непрерывные функции в малой окрестности нуля, $a(0) = b(0) = 0$. Тогда оператор R^1 действует из Ω в $\mathcal{C}$ и существуют такие малые числа $\hat{\alpha}_1 > 0$, $\hat{\gamma}_1 > 0$, что при $|\alpha| < \hat{\alpha}_1$, $|\gamma| < \hat{\gamma}_1$, этот оператор удовлетворяет следующим условиям:

1) $||R^1(\xi)-\varphi||_{\mathcal{C}} \le \Delta/2$, $\xi\in\Omega_\Delta$,

2) $||R^1(\xi^1)-R^1(\xi^2)||_{\mathcal{C}} \le (\Delta/2)||\xi^1-\xi^2||_{\mathcal{C}}$, $\forall\xi^1,\xi^2\in\Omega_\Delta$.

Доказательство. Из определения функции $\hat{G}$ следует, что при $\xi\in\Omega$ значения $R^1\xi\in\mathcal{C}$. Пусть α положительно и $s\in[0,\alpha/(1+\alpha)]$. Тогда функция

$\hat{G}(s,\bar{h}_1(z)) - \hat{G}(s,\bar{h}_2(z))$ имеет четыре точки разрыва: $z_*^1 = 3$, $z_*^2 = (3 + 4\alpha)/(1+\alpha)$, $z_*^3 = s+3$, $z_*^4 = s + (3+4\alpha)/(1+\alpha)$. Последние две точки принадлежат отрезкам $[3,(3+4\alpha)/(1+\alpha)]$ и $[(3+4\alpha)/(1+\alpha),(3+5\alpha)/(1+\alpha)]$ соответственно. При некотором малом $\delta > 0$ имеем,

$$\tfrac{\pi}{2}\Big|\int\limits_0^4 \left(\hat{G}(s,\bar{h}_1(z)) - \hat{G}(s,\bar{h}_2(z,\alpha))\right)\xi(z)dz\Big| \le \tfrac{\pi}{2}\int\limits_0^4 \big|\hat{G}(s,\bar{h}_1(z)) -$$
$$\hat{G}(s,\bar{h}_2(z,\alpha))\big|dz||\xi||_{\mathcal{C}} \le (K_1(s)+K_2(s)+K_3(s)+K_4(s)+K_5(s))||\xi||_{\mathcal{C}},$$

где

$$K_1(s) = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^3 \left|\hat{G}(s,z+1) - \hat{G}\left(s, z+\frac{1}{1+\alpha}\right)\right| dz,$$

$$K_2(s) = \frac{\pi}{2}\int\limits_3^{(3+4\alpha)/(1+\alpha)} \left|\hat{G}(s,z-3) - \hat{G}\left(s, z+\frac{1}{1+\alpha}\right)\right| dz,$$

$$K_3(s) = \frac{\pi}{2}\int\limits_{(3+4\alpha)/(1+\alpha)}^{(s+s\alpha+3+4\alpha)/(1+\alpha)-\delta} \left|\hat{G}(s,z-3) - \hat{G}\left(s, z-\frac{3+4\alpha}{1+\alpha}\right)\right| dz,$$

$$K_4(s) = \frac{\pi}{2}\int\limits_{(s+s\alpha+3+4\alpha)/(1+\alpha)-\delta}^{(s+s\alpha+3+4\alpha)/(1+\alpha)+\delta} \left|\hat{G}(s,z-3) - \hat{G}\left(s, z-\frac{3+4\alpha}{1+\alpha}\right)\right| dz,$$

$$K_5(s) = \frac{\pi}{2}\int\limits_{(s+s\alpha+3+4\alpha)/(1+\alpha)+\delta}^{4} \left|\hat{G}(s,z-3) - \hat{G}\left(s, z-\frac{3+4\alpha}{1+\alpha}\right)\right| dz.$$

Из малости α следует, что $K_1(s) = (\pi/2)\int_0^3 |\hat{G}(s,z+1) - \hat{G}(s,z+1+O(\alpha))|dz$. Из непрерывности функции $\hat{G}$ по второму аргументу при $s \in [0,\alpha/(1+\alpha)]$ и малости α следует, что выполняется неравенство $|\hat{G}(s,z+1) - \hat{G}(s,z+1+O(\alpha))| < \Delta/(60\pi)$, $s \in [0,\alpha/(1+\alpha)]$, $z \in [0,3]$. Следовательно, можно записать следующее неравенство $K_1(s) < \Delta/10$, $s \in [0,\alpha/(1+\alpha)]$. Оценки для интегралов K_3 и K_5 получаются аналогичным образом, за счет непрерывности подынтегральных функций на выбранном промежутке и малости α: $K_3(s) < \Delta/10$, $K_5(s) < \Delta/10$, $s \in [0,\alpha/(1+\alpha)]$. Рассматривая интеграл $K_2(s)$, $s \in [0,\alpha/(1+\alpha)]$ отметим, что его подынтегральная функция терпит разрыв в точке $z_*^3 = s+3$, но при этом ограничена. То есть существует такое число $M_1 > 0$, что $|\hat{G}(s,z-3) - \hat{G}(s,z+1/(1+\alpha))| < M_1$, $s \in [0,\alpha/(1+$

$\alpha)]$, $z \in [3,(3+4\alpha)/(1+\alpha)]$. Тогда, неравенство $K_2(s) < M_1|O(\alpha)| \le \Delta/10$, $s \in [0,\alpha/(1+\alpha)]$, выполняется при достаточно малых α.

В интеграле $K_4(s)$, $s \in [0,\alpha/(1+\alpha)]$ подынтегральная функция терпит разрыв в точке $z_*^4 = s + (3+4\alpha)/(1+\alpha)$. Она является ограниченной. За счет малости промежутка интегрирования можно потребовать выполнение следующей оценки $K_4(s) \le \Delta/10$, $s \in [0,\alpha/(1+\alpha)]$. Так как $\xi \in \Omega_\Delta$, то имеет место оценка $||\xi||_{\mathcal{C}} < \Delta + \hat\gamma_1$. Тогда, при достаточно малом $\hat\gamma_1$, получим $||\xi||_{\mathcal{C}} < 1$ и $(\pi/2)\left|\int_0^4 \left(\hat G(s,\bar h_1(z)) - \hat G(s,\bar h_2(z,\alpha))\right)\xi(z)dz\right| < \Delta/2$, $s \in [0,\alpha/(1+\alpha)]$. Аналогично устанавливается справедливость предыдущего неравенства при $s \in [\alpha/(1+\alpha),4]$, а также его справедливость при $\alpha < 0$, $s \in [0,4]$.

При доказательстве второго утверждения леммы, имеем

$$|R^1(\xi^1)(s) - R^1(\xi^2)(s)| = |\tfrac{\pi}{2}\int\limits_0^4 \left(\hat G(s,\bar h_1(z)) - \hat G(s,\bar h_2(z,\alpha))\right)(\xi^1(z)-$$

$$\xi^2(z))dz| < \tfrac{\pi}{2}\int\limits_0^4 \left|\hat G(s,\bar h_1(z)) - \hat G(s,\bar h_2(z,\alpha))\right|dz\,||\xi^1-\xi^2||_{\mathcal{C}} <$$

$$\tfrac{\Delta}{2}||\xi^1-\xi^2||_{\mathcal{C}},\ s \in [0,4].$$

Лемма доказана.

Лемма 3.2. Пусть выполняются условия леммы 3.1. Тогда оператор R^2 действует из Ω в $\mathcal{C}$ и существуют такие малые числа $\hat\alpha_2 > 0$, $\hat\gamma_2 > 0$, $\hat\varepsilon > 0$, что при $|\alpha| < \hat\alpha_2$, $|\gamma| < \hat\gamma_2$, $|\varepsilon| < \hat\varepsilon$, оператор R^2 удовлетворяет следующим условиям:

1) $||R^2(\xi)||_{\mathcal{C}} \le \Delta/2$, $\xi \in \Omega_\Delta$,

2) $||R^2(\xi^1) - R^2(\xi^2)||_{\mathcal{C}} \le (\Delta/2)||\xi^1-\xi^2||_{\mathcal{C}}$, $\forall \xi^1,\xi^2 \in \Omega_\Delta$.

Доказательство. Из определения функции $\hat G$ следует, что при $\xi \in \Omega$ значение $R^2\xi \in \mathcal{C}$. Имеет место неравенство

$$\Big|\int\limits_0^4 \hat G(s,z)\left((1+\alpha)f(\xi(z),\xi(h_2(z,\alpha)),\varepsilon) - \tfrac{\pi}{2}\alpha\xi(h_2(z,\alpha))\right)dz\Big| <$$

$$(1+|\alpha|)M_2\int\limits_0^4 |f(\xi(z),\xi(h_2(z,\alpha)),\varepsilon)|dz + |\alpha|M_2\int\limits_0^4 |\xi(h_2(z,\alpha))|dz,$$

где $M_2 = \frac{\pi}{2}\max\limits_{s,z\in[0,4]}|\hat G(s,z)|$. Существует такое малое число α_2, что при $|\alpha| < \alpha_2$ для второго интеграла выполняется неравенство $|\alpha|M_2\int_0^4|\xi(h_2(z,\alpha))|dz < \Delta/4$. Для оценки первого интеграла воспользуемся условием Липшица. Т.к. $f(0,0,\varepsilon) = 0$, то $|f(\xi(z),\xi(h_2(z,\alpha)),\varepsilon)| < L(\varepsilon)(|\xi(z)| + |\xi(h_2(z,\alpha))|) < 2L(\varepsilon)$

$(\Delta+\gamma)$, $z \in [0,4]$, где L константа Липшица. Из условий, наложенных на функцию f, постоянная L бесконечно малая при малых ε. Тогда существуют такие малые числа $\hat{\gamma}_2$ и ε_2, что при $|\gamma| < \hat{\gamma}_2$, $|\varepsilon| < \varepsilon_2$, $|\alpha| < \alpha_2$, выполняется неравенство $(1+|\alpha|)M_2\int_0^4 |f(\xi(z),\xi(h_2(z,\alpha)),\varepsilon)|dz < \Delta/4$. Первое утверждение леммы доказано.

Справедливо неравенство

$$|R^2(\xi^1)(s)-R^2(\xi^2)(s)| < M_2(1+|\alpha|)\int\limits_0^4 |f(\xi^1(z),\xi^1(h_2(z,\alpha)),\varepsilon)-$$

$$f(\xi^2(z),\xi^2(h_2(z,\alpha)),\varepsilon)|dz + M_2|\alpha|\int\limits_0^4 |\xi^1(h_2(z,\alpha))-\xi^2(h_2(z,\alpha))|dz,\ s\in[0,4].$$

Используя условие Липшица, получим $M_2(1+|\alpha|)\int_0^4 |f(\xi^1(z),\xi^1(h_2(z,\alpha)),\varepsilon)-f(\xi^2(z),\xi^2(h_2(z,\alpha)),\varepsilon)|dz < M_2(1+|\alpha|)L(\varepsilon)(\int_0^4 |\xi^1(z)-\xi^2(z)|dz + \int_0^4 |\xi^1(h_2(z,\alpha)) - \xi^2(h_2(z,\alpha))|dz) < M_2(1+|\alpha|)8L(\varepsilon)||\xi^1-\xi^2||_{\mathcal{C}}$. Можно найти такое число $\varepsilon_3 > 0$, что при $|\varepsilon| < \varepsilon_3$ выполняется неравенство $M_2(1+|\alpha|)8L(\varepsilon) < \Delta/4$. Существует такое малое число α_3, что при $|\alpha| < \alpha_3$ выполняется неравенство $M_2|\alpha|\int\limits_0^4 |\xi^1(h_2(z,\alpha))-\xi^2(h_2(z,\alpha))|dz < (\Delta/4)||\xi^1-\xi^2||_{\mathcal{C}}$. Второе утверждение леммы доказано.

Обозначим через $\hat{\alpha}_2 = \min\{\alpha_2,\alpha_3\}$, $\hat{\varepsilon} = \min\{\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$. При $|\alpha| < \hat{\alpha}_2$ и $|\varepsilon| < \hat{\varepsilon}$ будут выполняться оба утверждения леммы.

Утверждение 3.1. Пусть f — непрерывная по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируемая по первому и второму аргументам функция в малой окрестности точки $(0,0,0)^\top$, $f(x,x_{-1},\varepsilon) = a(\varepsilon)x + b(\varepsilon)x_{-1} + o\big((x^2+x_{-1}^2)^{1/2}\big)$, a и b — непрерывные функции в малой окрестности нуля, $a(0) = b(0) = 0$. Тогда существуют такие числа $\hat{\alpha} > 0$, $\hat{\gamma} > 0$, $\Delta > 0$, $\hat{\varepsilon} > 0$, что при $|\alpha| < \hat{\alpha}$, $|\gamma| < \hat{\gamma}$, $|\varepsilon| < \hat{\varepsilon}$ в области Ω_Δ интегральное уравнение (3.1) имеет единственное решение $\xi(s,\gamma,\varepsilon,\alpha)$, $s\in[0,4]$ непрерывно зависящее от параметров.

Доказательство. Введем обозначения $\hat{\alpha} = min\{\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2\}$, $\hat{\gamma} = min\{\hat{\gamma}_1,\hat{\gamma}_2\}$, где $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$, $\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_2$, Δ, $\hat{\varepsilon}$, — числа определяемые в леммах 3.1 и 3.2 . Согласно этим леммам при $|\alpha| < \hat{\alpha}$, $|\gamma| < \hat{\gamma}$, $|\varepsilon| < \hat{\varepsilon}$, для оператора $R = R^1+R^2$ на множестве Ω_Δ выполняются следующие свойства: $||R(\xi)-\varphi||_{\mathcal{C}} \le \Delta$, $\xi \in \Omega_\Delta$, и $||R(\xi^1)-R(\xi^2)||_{\mathcal{C}} < \Delta||\xi^1-\xi^2||_{\mathcal{C}}$, $\forall\xi^1,\xi^2 \in \Omega_\Delta$. Следовательно, согласно теоремы о неподвижной точке [11, с.605], существует единственное решение интегрального уравнения (3.1). Утверждение доказано.

4 Система уравнений разветвления

Если найденные решения $\xi(s,\gamma,\varepsilon,\alpha)$, $s \in [0,4]$, $|\alpha| < \hat{\alpha}$, $|\gamma| < \hat{\gamma}$, $|\varepsilon| < \hat{\varepsilon}$, интегрального уравнения (3.1) удовлетворяют условиям (3.2), то они совпадают на отрезке $[0,4]$ с периодическими решениями дифференциального уравнения с запаздыванием. В результате получим систему уравнений

$$W_1(\gamma,\varepsilon,\alpha) = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\Big[\frac{\pi}{2}\xi(h_1(z),\gamma,\varepsilon,\alpha) - \frac{\pi}{2}(1+\alpha)\xi(h_2(z,\alpha),\gamma,\varepsilon,\alpha)+$$

$$(1+\alpha)f(\xi(z,\gamma,\varepsilon,\alpha),\xi(h_2(z,\alpha),\gamma,\varepsilon,\alpha),\varepsilon)\Big]dz = 0,$$

$$W_2(\gamma,\varepsilon,\alpha) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^4 \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\Big[\frac{\pi}{2}\xi(h_1(z),\gamma,\varepsilon,\alpha) - \frac{\pi}{2}(1+\alpha)\xi(h_2(z,\alpha),\gamma,\varepsilon,\alpha)+$$

$$(1+\alpha)f(\xi(z,\gamma,\varepsilon,\alpha),\xi(h_2(z,\alpha),\gamma,\varepsilon,\alpha),\varepsilon)\Big]dz = 0, \tag{4.1}$$

где $|\alpha| < \hat{\alpha}$, $|\gamma| < \hat{\gamma}$, $|\varepsilon| < \hat{\varepsilon}$, которая называется системой уравнений разветвления.

Решение интегрального уравнения (3.1) допускает представление $\xi(s,\gamma,\varepsilon,\alpha) = \gamma\tilde{\xi}(s,\gamma,\varepsilon,\alpha)$, $s \in [0,4]$, $|\alpha| < \hat{\alpha}$, $|\gamma| < \hat{\gamma}$, $|\varepsilon| < \hat{\varepsilon}$, где $\tilde{\xi}(s,\gamma,\varepsilon,\alpha)$, $s \in [0,4]$, $|\alpha| < \hat{\alpha}$, $|\gamma| < \hat{\gamma}$, $|\varepsilon| < \hat{\varepsilon}$ и является решением интегрального уравнения

$$\tilde{\xi}(s) = \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) + \int\limits_0^4 \hat{G}(s,z)\Big[\frac{\pi}{2}\tilde{\xi}(h_1(z)) - \frac{\pi}{2}(1+\alpha)\tilde{\xi}(h_2(z,\alpha))+$$

$$(1+\alpha)\tilde{f}(\tilde{\xi}(z),\tilde{\xi}(h_2(z,\alpha)),\gamma,\varepsilon)\Big]dz, s \in [0,4]. \tag{4.2}$$

Здесь $f(\gamma\tilde{\xi}(z),\gamma\tilde{\xi}(h_2(z,\alpha)),\varepsilon) = \gamma\tilde{f}(\tilde{\xi}(z),\tilde{\xi}(h_2(z,\alpha)),\gamma,\varepsilon)$, $\tilde{f}$ — непрерывная по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируемая по первому и второму аргументам функция, $\tilde{f}(\tilde{x},\tilde{x}_{-1},\gamma,\varepsilon) = a(\varepsilon)\tilde{x} + b(\varepsilon)\tilde{x}_{-1} + o(\gamma)$, $|\gamma| < \hat{\gamma}$.

Утверждение 4.1. Пусть выполняются условия утверждения 3.1. Тогда существует единственное непрерывное решение $\tilde{\xi}(s,\gamma,\varepsilon,\alpha)$, $s \in [0,4]$, $|\alpha| < \hat{\alpha}$, $|\gamma| < \hat{\gamma}$, $|\varepsilon| < \hat{\varepsilon}$, уравнения (4.2), удовлетворяющее условию $\tilde{\xi}(s,0,0,0) = \cos(\pi s/2)$, $s \in [0,4]$.

Доказательство. Введем оператор $\tilde{R}$, определяемый формулой:

$$\tilde{R}(\tilde{\xi})(s) = \cos\tfrac{\pi}{2}s + \int\limits_0^4 \hat{G}(s,z)\Big[\tfrac{\pi}{2}\tilde{\xi}(h_1(z)) - \tfrac{\pi}{2}(1+\alpha)\tilde{\xi}(h_2(z,\alpha)) + (1+\alpha)\tilde{f}(\tilde{\xi}(z),\tilde{\xi}(h_2(z,\alpha),\varepsilon)\Big]dz, s\in[0,4].$$

Можно показать, повторяя доказательство утверждения 3.1, что существует область $\tilde{\Omega}_\Delta = \{\xi : ||\xi - \tilde{\varphi}||_c \le \Delta, \xi \in \mathcal{C}, \Delta < 1\}$, где $\tilde{\varphi}(s) = \cos(\pi s/2)$, $s\in[0,4]$, в которой оператор имеет единственную неподвижную точку. Эта неподвижная точка совпадает с решением интегрального уравнения (4.2). Утверждение доказано.

Справедливы представления $W_1(\gamma,\varepsilon,\alpha) = \gamma\tilde{W}_1(\gamma,\varepsilon,\alpha)$, $W_2(\gamma,\varepsilon,\alpha) = \gamma\tilde{W}_2(\gamma,\varepsilon,\alpha)$, $s\in[0,4]$, $|\alpha|<\hat{\alpha}$, $|\gamma|<\hat{\gamma}$, $|\varepsilon|<\hat{\varepsilon}$, где

$$\tilde{W}_1(\gamma,\varepsilon,\alpha) = \tfrac{1}{2}\int\limits_0^4 \cos\tfrac{\pi}{2}z\,\Big[\tfrac{\pi}{2}\tilde{\xi}(h_1(z),\gamma,\varepsilon,\alpha) - \tfrac{\pi}{2}(1+\alpha)\tilde{\xi}(h_2(z,\alpha),\gamma,\varepsilon,\alpha) + (1+\alpha)\tilde{f}(\tilde{\xi}(z,\gamma,\varepsilon,\alpha),\tilde{\xi}(h_2(z,\alpha),\gamma,\varepsilon,\alpha),\gamma,\varepsilon)\Big]dz,$$

$$\tilde{W}_2(\gamma,\varepsilon,\alpha) = -\tfrac{1}{2}\int\limits_0^4 \sin\tfrac{\pi}{2}z\,\Big[\tfrac{\pi}{2}\tilde{\xi}(h_1(z),\gamma,\varepsilon,\alpha) - \tfrac{\pi}{2}(1+\alpha)\tilde{\xi}(h_2(z,\alpha),\gamma,\varepsilon,\alpha) + (1+\alpha)\tilde{f}(\tilde{\xi}(z,\gamma,\varepsilon,\alpha),\tilde{\xi}(h_2(z,\alpha),\gamma,\varepsilon,\alpha),\gamma,\varepsilon)\Big]dz, |\alpha|<\hat{\alpha}, |\gamma|<\hat{\gamma}, |\varepsilon|<\hat{\varepsilon}.$$

Нас интересуют периодические решения дифференциального уравнения (1.3), отличные от нулевого положения равновесия. Для этих решений значения параметра γ должны быть отличными от нуля. Поэтому искомые решения системы уравнений (4.1) совпадают с решением новой системы уравнений разветвления

$$\tilde{W}_1(\gamma,\varepsilon,\alpha) = 0, \tilde{W}_2(\gamma,\varepsilon,\alpha) = 0. \tag{4.3}$$

Утверждение 4.2. Пусть выполняются условия утверждения 3.1, функция f непрерывно дифференцируема по ε в малой окрестности точки $(0,0,0)^\top$ и $\pi b'(0) \ne 2a'(0)$. Тогда существует такое $\gamma^* > 0$, что при $|\gamma| < \gamma^*$ система уравнений разветвления (4.3) допускает единственное непрерывное решение $\alpha = \alpha(\gamma)$, $\varepsilon = \varepsilon(\gamma)$, $|\gamma| < \gamma^*$, $\alpha(0) = \varepsilon(0) = 0$.

Доказательство. Найдем условия разрешимости системы уравнений разветвления (4.3). Имеем

$$\tilde{W}_1(0,\varepsilon,\alpha) = \tfrac{1}{2}\int\limits_0^4 \cos\left(\tfrac{\pi}{2}z\right)\,\Big[\tfrac{\pi}{2}\tilde{\xi}(h_1(z),0,\varepsilon,\alpha) - \tfrac{\pi}{2}(1+\alpha)\tilde{\xi}(h_2(z,\alpha),0,\varepsilon,\alpha) + (1+\alpha)a(\varepsilon)\tilde{\xi}(z,0,\varepsilon,\alpha) + (1+\alpha)b(\varepsilon)\tilde{\xi}(h_2(z,\alpha),0,\varepsilon,\alpha)\Big]dz,$$

$$\tilde{W}_2(0,\varepsilon,\alpha) = -\tfrac{1}{2}\int\limits_0^4 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}z\right) \ \Big[\tfrac{\pi}{2}\tilde{\xi}(h_1(z),0,\varepsilon,\alpha) \ - \tfrac{\pi}{2}(1+\alpha)\tilde{\xi}(h_2(z,\alpha),0,\varepsilon,\alpha) +$$
$$(1+\alpha)a(\varepsilon)\tilde{\xi}(z,0,\varepsilon,\alpha) \ + (1+\alpha)b(\varepsilon)\tilde{\xi}(h_2(z,\alpha),0,\varepsilon,\alpha)\Big]dz.$$

Вычислим значение якобиана

$$\frac{\partial(\tilde{W}_1(0,\varepsilon,\alpha),\tilde{W}_2(0,\varepsilon,\alpha))}{\partial(\varepsilon,\alpha)}\Big|_{\varepsilon=0,\alpha=0} = \frac{\pi^2}{2}b^{'}(0) - \pi a^{'}(0).$$

Из теоремы о существовании неявной функции [12, с.26] при $|\gamma| < \gamma^* < \hat{\gamma}$ существуют непрерывные функции $\alpha = \alpha(\gamma)$, $\varepsilon = \varepsilon(\gamma)$, удовлетворяющие преобразованной системе уравнений разветвления (4.3), $\alpha(0) = \varepsilon(0) = 0$. Утверждение доказано.

Выполнение условий утверждения 4.2 еще не гарантирует существование периодических решений для уравнения (1.3). Но это утверждение позволяет свести вопрос существования периодических решений к разрешимости уравнения $\varepsilon = \varepsilon(\gamma)$ относительно γ в малой окрестности точки $(\varepsilon,\gamma)^\top = (0,0)^\top$. Мы дальше рассматриваем случай, когда функция $\varepsilon(\gamma)$, $|\gamma| < \gamma^*$, тождественно не равна нулю. Тогда каждому изолированному положительному решению $\gamma = \gamma(\varepsilon)$, $|\varepsilon| < \varepsilon^* < \hat{\varepsilon}$, уравнения $\varepsilon = \varepsilon(\gamma)$, $|\gamma| < \gamma^*$, отвечает изолированное периодическое решение дифференциального уравнения с запаздыванием (1.3). Проблема существования изолированных решений уравнения $\varepsilon = \varepsilon(\gamma)$, $|\gamma| < \gamma^*$, достаточно просто решается в случае гладких функций $\varepsilon(\gamma)$, $|\gamma| < \gamma^*$.

5 Асимптотические представления периодических решений уравнения (1.1) и их периодов

Потребуем дополнительную гладкость функции f, гарантирующую существование представления функции f в виде асимптотического разложения

$$f(x,x_{-1},\varepsilon) = a(\varepsilon)x + b(\varepsilon)x_{-1} + c_1(\varepsilon)x^2 + 2c_2(\varepsilon)xx_{-1} + c_3(\varepsilon)x_{-1}^2 + l_1(\varepsilon)x^3 +$$
$$l_2(\varepsilon)x^2x_{-1} + l_3(\varepsilon)xx_{-1}^2 + l_4(\varepsilon)x_{-1}^3 + v_1(\varepsilon)x^4 + v_2(\varepsilon)x^3x_{-1} +$$
$$v_3(\varepsilon)x^2x_1^2 + v_4(\varepsilon)xx_{-1}^3 + v_5(\varepsilon)y^4 + o\left(\left(x^2+x_{-1}^2\right)^2\right), \tag{5.1}$$

где

$$a(\varepsilon) = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2),\ b(\varepsilon) = b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2),$$

$$c_i(\varepsilon) = c_i^0 + c_i^1\varepsilon + c_i^2\varepsilon^2 + o\left(\varepsilon^2\right),\ i = \overline{1,3},$$
$$l_j(\varepsilon) = l_j^0 + l_j^1\varepsilon + o(\varepsilon), j = \overline{1,4},$$
$$v_k(\varepsilon) = v_k^0 + O(\varepsilon), k = \overline{1,5}, |\varepsilon| < \varepsilon^*.$$

Можно показать, что при выполнении этих условий и требований утверждения 4.2 интегральное уравнение (3.1) имеет единственное решение $\xi = \xi(s,\gamma)$, $s \in \mathbb{R}$, $|\gamma| < \gamma^*$, удовлетворяющее системе уравнений (4.1) при специальном единственном выборе функций $\alpha = \alpha(\gamma)$, $\varepsilon = \varepsilon(\gamma)$, $|\gamma| < \gamma^*$. При этом справедливы асимптотические разложения

$$\xi(s,\gamma) = \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)\gamma + \xi_2\gamma^2 + \xi_3(s)\gamma^3 + \xi_4(s)\gamma^4 + o\left(\gamma^4\right), \tag{5.2}$$

$$\alpha(\gamma) = \alpha_1\gamma + \alpha_2\gamma^2 + \alpha_3\gamma^3 + o\left(\gamma^3\right), \tag{5.3}$$

$$\varepsilon(\gamma) = \varepsilon_1\gamma + \varepsilon_2\gamma^2 + \varepsilon_3\gamma^3 + o\left(\gamma^3\right), |\gamma| < \gamma^*. \tag{5.4}$$

Коэффициенты разложения (5.2) являются решениями следующих уравнений

$$\xi_k(s) = \int\limits_0^4 \hat{G}(s,z)\chi_k(s)ds, s \in [0,4], k = \overline{2,4}. \tag{5.5}$$

Коэффициенты являются также 4-периодическими решениями системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi_2(s)}{ds} = -\frac{\pi}{2}\xi_2(s-1) + \chi_2(s),$$
$$\frac{d\xi_3(s)}{ds} = -\frac{\pi}{2}\xi_3(s-1) + \chi_3(s),$$
$$\frac{d\xi_4(s)}{ds} = -\frac{\pi}{2}\xi_4(s-1) + \chi_4(s).$$

Учитывая асимптотические разложения (5.3)–(5.4), после вычислений находим

$$\chi_2(s) = -\tfrac{\pi}{2}\alpha_1\xi_1(h_1(s)) - \tfrac{\pi}{2}\alpha_1\xi_1'(h_1(s)) + a_1\varepsilon_1\xi_1(s) +$$
$$b_1\varepsilon_1\xi(h_1(s)) + c_1^0\xi_1^2(s) + 2c_2^0\xi_1(s)\xi_1(h_1(s)) + c_3^0\xi_1^2(h_1(s)),$$

$$\chi_3(s) = \tfrac{\pi}{2}\big(-\alpha_1\xi_2(h_1(s)) - \alpha_1\xi_2'(h_1(s)) - \tfrac{1}{2}\alpha_1^2\xi_1''(h_1(s)) - \alpha_2\xi_1'(h_1(s)) -$$
$$\alpha_2\xi_1(h_1(s))\big) + \varepsilon_2\left(a_1\xi_1(s) + b_1\xi_1(h_1(s))\right) + 2c_1^0\xi_2(s)\xi_1(s) +$$

$$2c_2^0\left(\xi_1(s)(\xi_2(h_1(s))+\alpha_1\xi_1'(h_1(s)))+\xi_1(h_1(s))\xi_2(s)\right)+$$
$$2c_3^0\xi_1(h_1(s))(\xi_2(h_1(s))+\alpha_1\xi_1'(h_1(s)))+l_1^0\xi_1^3(s)+l_2^0\xi_1^2(s)\xi_1(h_1(s))+$$
$$l_3^0\xi_1(s)\xi_1^2(h_1(s))+l_4^0\xi_1^3(h_1(s))+\varepsilon_1\left(a_1\xi_2(s)+a_2\xi_1(s)+b_1(\alpha_1\xi_1'(h_1(s))+\right.$$
$$\xi_2(h_1(s)))+b_2\xi_1(h_1(s))+c_1^1\xi_1^2(s)+2c_2^1\xi_1(s)\xi_1(h_1(s))+$$
$$\left.c_3^1\xi_1^2(h_1(s))\right)+\alpha_1(a_1\varepsilon_1\xi_1(s)+b_1\varepsilon_1\xi(h_1(s))+c_1^0\xi_1^2(s)+$$
$$2c_2^0\xi_1(s)\xi_1(h_1(s))+c_3^0\xi_1^2(h_1(s))),s\in[0,4],|\gamma|<\gamma^*,$$

где $\xi_1(s)=\cos(\pi s/2)$, $s\in[0,4]$. Функция χ_4 будет вычислена в дальнейшем.

Подставляя в (4.1) асимптотические разложения (5.3)–(5.4), приведем уравнения разветвления (4.1) к виду

$$W_1(\gamma,\varepsilon(\gamma),\alpha(\gamma))=\frac{1}{2}\int\limits_0^4\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\chi(s,\gamma)dz+o(\gamma^4)=0,\qquad(5.6)$$

$$W_2(\gamma,\varepsilon(\gamma),\alpha(\gamma))=-\frac{1}{2}\int\limits_0^4\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\chi(s,\gamma)dz+o(\gamma^4)=0,\qquad(5.7)$$

где $\chi(s,\gamma)=\chi_1(s)\gamma^2+\chi_3(s)\gamma^3+\chi_4(s)\gamma^4$, $|\gamma|<\gamma^*$, $s\in[0,4]$. Приравнивая в этой системе уравнений коэффициенты при γ^2 и вычисляя интегралы, получим систему линейных уравнений

$$-\frac{\pi^2}{2}\alpha_1+2a_1\varepsilon_1=0,\pi\alpha_1-2b_1\varepsilon_1=0.$$

Определитель этой системы, согласно условиям утверждения 4.2, не равен нулю. Следовательно, имеем $\alpha_1=0$, $\varepsilon_1=0$.

Подставляя в (5.5) выражения функций $\hat{G}$, χ_2, ξ_1 и значения α_1, ε_1, после вычисления интеграла находим

$$\xi_2(s)=\frac{1}{\pi}\left(c_1^0+c_3^0\right)+\frac{1}{5\pi}\left(c_3^0-c_1^0-4c_2^0\right)\cos(\pi s)+\frac{2}{5\pi}\left(c_1^0-c_2^0-c_3^0\right)\sin(\pi s),$$

где $s\in[0,4]$. Для нахождения коэффициентов α_2, ε_2 выделим в системе уравнений (5.6)–(5.7) коэффициенты при γ^3. Имеем

$$\int\limits_0^4\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\Big(-\frac{\pi}{2}\alpha_2\xi_1'(h_1(z))-\frac{\pi}{2}\alpha_2\xi_1(h_1(z))+\varepsilon_2a_1\xi_1(z)+$$

$$\varepsilon_2b_1\xi_1(h_1(z))+2c_1^0\xi_2(z)\xi_1(z)+2c_2^0(\xi_2(z)\xi_1(h_1(z))+\xi_2(h_1(z))\xi_1(z))+$$

$$2c_3^0\xi_1(h_1(z))\xi_2(h_1(z))+l_1^0\xi_1^3(z)+l_2^0\xi_1^2(z)\xi_1(h_1(z))+$$
$$l_3^0\xi_1(z)\xi_1^2(h_1(z))+l_4^0\xi_1^3(h_1(z))\Big)dz=0,$$

$$-\int\limits_0^4\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\Big(-\frac{\pi}{2}\alpha_2\xi_1^{'}(h_1(z))-\frac{\pi}{2}\alpha_2\xi_1(h_1(z))+\varepsilon_2a_1\xi_1(z)+$$
$$\varepsilon_2b_1\xi_1(h_1(z))+2c_1^0\xi_2(z)\xi_1(s)+2c_2^0(\xi_2(z)\xi_1(h_1(z))+\xi_2(h_1(z))\xi_1(z))+$$
$$2c_3^0\xi_1(h_1(z))\xi_2(h_1(z))+l_1^0\xi_1^3(z)+l_2^0\xi_1^2(z)\xi_1(h_1(z))+$$
$$l_3^0\xi_1(z)\xi_1^2(h_1(z))+l_4^0\xi_1^3(h_1(z))\Big)dz=0.$$

Подставляя в последнюю систему выражения функций ξ_1, ξ_2, значения α_1, ε_1 и вычисляя интегралы, получим систему алгебраических линейных уравнений относительно переменных α_2 и ε_2

$$-\alpha_2\tfrac{\pi^2}{2}+2a_1\varepsilon_2=-2\left(\tfrac{3}{4}l_1^0+\tfrac{1}{4}l_3^0+\tfrac{9}{5\pi}\left(c_1^0\right)^2+\tfrac{2}{5\pi}\left(c_2^0\right)^2+\right.$$
$$\left.\tfrac{2}{5\pi}\left(c_3^0\right)^2+\tfrac{9}{5\pi}\left(c_1^0c_2^0+c_1^0c_3^0+c_2^0c_3^0\right)\right),$$

$$\pi\alpha_2-2b_1\varepsilon_2=2\left(\tfrac{1}{4}l_2^0+\tfrac{3}{4}l_4^0+\tfrac{2}{5\pi}\left(c_1^0\right)^2+\tfrac{6}{5\pi}\left(c_2^0\right)^2+\right.$$
$$\left.\tfrac{11}{5\pi}\left(c_3^0\right)^2+\tfrac{7}{5\pi}\left(c_1^0c_2^0+c_1^0c_3^0+c_2^0c_3^0\right)\right).$$

Определитель этой системы, согласно условиям утверждения 4.2, не равен нулю. В результате находим

$$\alpha_2=-\frac{4}{\pi(2a_1-\pi b_1)}\left(-\frac{a_1l_2^0}{4}-\frac{3a_1l_4^0}{4}+\frac{3b_1l_1^0}{4}+\frac{b_1l_3^0}{4}+\frac{9b_1-2a_1}{5\pi}\left(c_1^0\right)^2+\right.$$
$$\left.\frac{2b_1-6a_1}{5\pi}\left(c_2^0\right)^2+\frac{2b_1-11a_1}{5\pi}\left(c_3^0\right)^2+\frac{9b_1-7a_1}{5\pi}\left(c_1^0c_2^0+c_1^0c_3^0+c_2^0c_3^0\right)\right),\quad(5.8)$$

$$\varepsilon_2=-\frac{1}{2a_1-\pi b_1}\left(\frac{3}{2}l_1^0+\frac{1}{2}l_3^0-\frac{\pi l_2^0}{4}-\frac{3\pi l_4^0}{4}+\frac{18-2\pi}{5\pi}\left(c_1^0\right)^2+\right.$$
$$\left.\frac{4-6\pi}{5\pi}\left(c_2^0\right)^2+\frac{4-11\pi}{5\pi}\left(c_3^0\right)^2+\frac{18-7\pi}{5\pi}\left(c_1^0c_2^0+c_1^0c_3^0+c_2^0c_3^0\right)\right).\quad(5.9)$$

Подставляя в (5.5) выражения функций $\hat{G}$, χ_3, ξ_1, ξ_2, и значения α_1, ε_1, α_2, ε_2 и вычисляя интеграл, находим

$$\xi_3(s) = -\frac{2}{\pi} p_1 \cos\left(\frac{3\pi}{2}s\right) + \frac{2}{\pi} p_2 \sin\left(\frac{3\pi}{2}s\right), \; s \in [0, 4],$$

где $p_1 = -l_2^0/8 + l_4^0/8 + (1/(5\pi))\left(c_2^0 - c_1^0\right)\left(c_1^0 - c_2^0 - c_3^0\right) + (1/(10\pi))\left(c_2^0 - c_3^0\right)\left(c_1^0 - c_3^0 + 4c_2^0\right)$, $p_2 = l_1^0/8 - l_3^0/8 + (1/(10\pi))\left(c_2^0 - c_1^0\right)\left(c_1^0 - c_3^0 + 4c_2^0\right) + (1/(5\pi))\left(c_3^0 - c_2^0\right)\left(c_1^0 - c_2^0 - c_3^0\right)$.

Вычисляя функцию χ_4, с учетом значений коэффициентов $\alpha_1 = 0$, $\varepsilon_1 = 0$, имеем

$$\begin{gathered}
\chi_4(s) = -\tfrac{\pi}{2}\left(\alpha_3\xi_1(s-1) + \alpha_2\xi_2(s-1) + \alpha_2\xi_2'(s-1) + \alpha_3\xi_1'(s-1)\right) + \\
\alpha_2\left(c_1^0\xi_1^2(s) + 2c_2^0\xi_1(s)\xi_1(s-1) + c_3^0\xi_1^2(s-1)\right) + a_1\varepsilon_2\xi_2(s) + \\
a_1\varepsilon_3\xi_1(s) + b_1\varepsilon_2\xi_2(s-1) + b_1\varepsilon_3\xi_1(s-1) + c_1^1\varepsilon_2\xi_1^2(s) + 2c_1^0\xi_1(s)\xi_3(s) + \\
c_1^0\xi_2^2(s) + 2c_2^1\varepsilon_2\xi_1(s)\xi_1(s-1) + c_3^1\varepsilon_2\xi_1^2(s-1) + 2c_1^0\xi_1(s-1)(\xi_3(s-1) + \\
\alpha_2\xi_1'(s-1)) + c_1^0\xi_2^2(s-1) + 3l_1^0\xi_1^2(s)\xi_2(s) + l_2^0(2\xi_1(s)\xi_1(s-1)\xi_2(s) + \\
\xi_1^2(s)\xi_2(s-1)) + l_3^0(2\xi_1(s-1)\xi_2(s-1)\xi_1(s) + \xi_1^2(s-1)\xi_2(s)) + \\
3l_4^0\xi_1^2(s-1)\xi_2(s-1) + v_1^0\xi_1^4(s) + v_2^0\xi_1^3(s)\xi_1(s-1) + v_3^0\xi_1^2(s)\xi_1^2(s-1) + \\
v_4^0\xi_1(s)\xi_1^3(s-1) + v_5^0\xi_4(s-1).
\end{gathered}$$

Для нахождения коэффициентов α_3, ε_3 выделим в системе уравнений (5.6)–(5.7) коэффициенты при γ^4. Имеем

$$\int\limits_0^4 \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\chi_4(s)dz = 0, \; \int\limits_0^4 \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\chi_4(s)dz = 0.$$

Подставляя в выражение функции χ_4 представления функций ξ_1, ξ_2, ξ_3, значения коэффициентов α_2, ε_2 и вычисляя интегралы, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$-\alpha_3\frac{\pi^2}{2} + 2a_1\varepsilon_3 = 0, \; \pi\alpha_3 - 2b_1\varepsilon_3 = 0.$$

Определитель этой системы, согласно условиям утверждения 4.2, не равен нулю. Следовательно, имеем $\alpha_3 = 0$, $\varepsilon_3 = 0$.

Теорема 5.1. Пусть выполняются условия утверждения 4.2, требования гладкости (5.1) функции f и $\varepsilon_2 \neq 0$. Тогда при $0 < \varepsilon/\varepsilon_2 < \varepsilon^*/|\varepsilon_2|$ существует единственное периодическое решение уравнения (1.1), определяемое формулами: $\tilde{x}(t,\varepsilon) = \xi(t/(1+\alpha(\varepsilon)),\varepsilon)$, $s = t/(1+\alpha(\varepsilon))$, $\alpha = \alpha_2\varepsilon/\varepsilon_2 + o\left((\varepsilon/\varepsilon_2)^{3/2}\right)$,

$$\tilde{\xi}(s,\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{\pi}\left(c_1^0 + c_3^0\right) + \frac{1}{5\pi}\left(c_3^0 - c_1^0 - 4c_2^0\right)\cos(\pi s) + \right.$$

$$\left.\frac{2}{5\pi}\left(c_1^0 - c_2^0 - c_3^0\right)\sin(\pi s)\right) + o(\varepsilon),\ s \in [0,4]. \tag{5.10}$$

Период этого решения равен $\omega(\varepsilon) = 4(1+\alpha_2\varepsilon/\varepsilon_2) + o(\varepsilon)$. При $-\varepsilon^*/|\varepsilon_2| < \varepsilon/\varepsilon_2 < 0$ уравнение (1.1) не имеет периодических решений.

Доказательство. Согласно вычислениям, проведенным выше, решение интегрального уравнения (3.1), удовлетворяющее системе уравнений разветвления (4.1), существует только для функций $\alpha(\gamma) = \alpha_2\gamma^2 + o(\gamma^3)$, $\varepsilon(\gamma) = \varepsilon_2\gamma^2 + o(\gamma^3)$, $|\gamma| < \gamma^*$, и определяется асимптотической формулой

$$\xi(s,\gamma) = \gamma\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) + \gamma^2\left(\frac{1}{\pi}\left(c_1^0 + c_3^0\right) + \frac{1}{5\pi}\left(c_3^0 - c_1^0 - 4c_2^0\right)\cos(\pi s) + \frac{2}{5\pi}\left(c_1^0 - \right.\right.$$

$$\left.\left. c_2^0 - c_3^0\right)\sin(\pi s)\right) - \gamma^3\frac{2}{\pi}\left(p_1\cos\left(\frac{3\pi}{2}s\right) - p_2\sin\left(\frac{3\pi}{2}s\right)\right) + o\left(\gamma^3\right), \tag{5.11}$$

где $s \in [0,4]$, $|\gamma| < \gamma^*$. Уравнение $\varepsilon = \varepsilon_2\gamma^2 + o\left(\gamma^3\right)$, $|\gamma| < \gamma^*$, имеет единственное неотрицательное решение

$$\gamma = \tilde{\gamma}(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}} + o(\varepsilon) \tag{5.12}$$

только при $0 < \varepsilon/\varepsilon_2 < \varepsilon^*/|\varepsilon_2|$. Тогда периодическое решение уравнения (1.1) существует только для функций $\alpha = \tilde{\alpha}(\varepsilon) = \alpha(\gamma(\varepsilon)) = \alpha_2\varepsilon/\varepsilon_2 + o(\varepsilon)$, $\gamma = \tilde{\gamma}(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_2} + o(\varepsilon)$. Оно имеет период $\omega = 4(1+\tilde{\alpha}(\varepsilon))$ и определяется формулой $\tilde{x}(t,\varepsilon) = \xi(t/(1+\tilde{\alpha}(\varepsilon)),\varepsilon)$, $t \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| < \varepsilon^*$. Учитывая формулу (5.11), завершаем доказательство теоремы.

6 Устойчивость периодического решения

Для исследования на устойчивость найденных периодических решений составим уравнение возмущенного движения

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{\pi}{2}y(t-1) - f(\tilde{x}(t,\varepsilon), \tilde{x}(t-1,\varepsilon),\varepsilon) +$$

$$f(\tilde{x}(t,\varepsilon)+y(t),\tilde{x}(t-1,\varepsilon)+y(t-1),\varepsilon).$$

Уравнение линейного приближения для него имеет вид

$$\frac{dy(t)}{dt}=\frac{\partial f(\tilde{x}(t,\varepsilon),\tilde{x}(t-1,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial x}y(t)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\partial f(\tilde{x}(t,\varepsilon),\tilde{x}(t-1,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial x_{-1}}\right)y(t-1).$$

Проведя в этом уравнении замены переменных: $t=(1+\alpha(\gamma))s$, $y((1+\alpha(\gamma))s)=\tilde{y}(s)$, $y(t-1)=\tilde{y}(s-1/(1+\alpha(\gamma)))$, $s\in\mathbb{R}$, $\varepsilon=\varepsilon(\gamma)$, $0\le\gamma<\gamma^*$, получим

$$\frac{d\tilde{y}(s)}{ds}=(1+\alpha(\gamma))\left(\frac{\partial f(\xi(s,\gamma),\xi\big(s-\frac{1}{1+\alpha(\gamma)},\gamma\big),\varepsilon(\gamma))}{\partial x}\tilde{y}(s)+\right.$$

$$\left.\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\partial f(\xi(s,\gamma),\xi\big(s-\frac{1}{1+\alpha(\gamma)},\gamma\big),\varepsilon(\gamma))}{\partial x_{-1}}\right)\tilde{y}\left(s-\frac{1}{1+\alpha(\gamma)}\right)\right), \tag{6.1}$$

где $0\le\gamma<\gamma^*$. Коэффициенты этого уравнения являются 4-периодическими функциями аргумента s. При $\gamma=0$ последнее уравнение имеет двухкратный характеристический показатель $\lambda=i\pi/2$. Остальные характеристические показатели имеют отрицательные действительные части. При возрастании γ двухкратный характеристический показатель распадается на два. Причем один из них будет равен $\lambda=i\pi/2$, так как уравнение (6.1) имеет решение $\tilde{y}(s,\gamma)=d\xi(s,\gamma)/ds$, $s\in\mathbb{R}$, $0\le\gamma<\gamma^*$.

Для нахождения зависимости второго характеристического показателя от γ воспользуемся методикой работы [13]. Решение уравнения (6.1) будем искать в форме Флоке $\tilde{y}(s,\gamma)=u(s,\gamma)e^{\lambda(\gamma)s}$, $s\in\mathbb{R}$, $0\le\gamma<\gamma^*$, где u периодическая по s функция периода 4. Подставляя решение Флоке в уравнение линейного приближения (6.1), получим

$$\dot{u}(s,\gamma)+\lambda(\gamma)u(s,\gamma)=(1+\alpha(\gamma))\left(\frac{\partial f(\xi(s,\gamma),\xi\big(s-\frac{1}{1+\alpha(\gamma)},\gamma\big),\varepsilon(\gamma))}{\partial x}u(s,\gamma)+\right.$$

$$\left.\left(\frac{\partial f(\xi(s,\gamma),\xi\big(s-\frac{1}{1+\alpha(\gamma)},\gamma\big),\varepsilon(\gamma))}{\partial x_{-1}}-\frac{\pi}{2}\right)u\left(s-\frac{1}{1+\alpha(\gamma)},\gamma\right)e^{\frac{-\lambda(\gamma)}{1+\alpha(\gamma)}}\right), \tag{6.2}$$

где $0\le\gamma<\gamma^*$. Решение этого уравнения и характеристический показатель будем искать в виде асимптотических разложений

$$u(s,\gamma)=u_1(s)\gamma+u_2(s)\gamma^2+u_3(s)\gamma^3+o(\gamma^3), s\in\mathbb{R}, \tag{6.3}$$

$$\lambda(\gamma)=\frac{\pi}{2}i+\lambda_1\gamma+\lambda_2\gamma^2+o(\gamma^2), 0\le\gamma<\gamma^*, \tag{6.4}$$

где $u_k(k=\overline{1,3})$ — 4-периодические функции.

Подставим эти асимптотические разложения в уравнение (6.2). Выделяя коэффициенты при γ, получим уравнение

$$\dot{u}_1(s)+i\frac{\pi}{2}u_1(s)-i\frac{\pi}{2}u_1(s-1)=0. \tag{6.5}$$

Периодическое решение этого уравнения имеет вид $u_1(s)=d_0^1+d_{-2}^1e^{-i\pi s}$, $s\in\mathbb{R}$, где постоянные d_1^0 и d_{-2}^1 одновременно не обращаются в ноль.

Для нахождения коэффициента u_2 асимптотического разложения (6.3) имеем уравнение

$$\dot{u}_2(s)+i\tfrac{\pi}{2}u_2(s)-i\tfrac{\pi}{2}u_2(s-1)=-\lambda_1\left(d_0^1-\tfrac{\pi}{2}id_0^1\right)+e^{-i\pi s}\lambda_1d_{-2}^1\left(-1+i\tfrac{\pi}{2}\right)+$$
$$e^{i\frac{\pi}{2}s}d_0^1\left(c_1^0-c_3^0-i2c_2^0\right)+e^{-i\frac{\pi}{2}s}\left(d_0^1+d_{-2}^1\right)\left(c_1^0+c_3^0\right)+e^{-\frac{3\pi}{2}s}d_{-2}^1\left(c_1^0-c_3^0+i2c_2^0\right).$$

Периодическое решение этого уравнения существует только при $\lambda_1=0$. Оно имеет вид

$$u_2(s)=d_{-1}^2e^{-i\frac{\pi}{2}s}+d_{-3}^2e^{-i\frac{3\pi}{2}s}+d_1^2e^{i\frac{\pi}{2}s},s\in\mathbb{R}, \tag{6.6}$$

где
$d_1^2=\left(4d_0^1/(5\pi)\right)\left(c_3^0-c_1^0-4c_2^0+2i\left(c_2^0-c_1^0+c_3^0\right)\right)$, $d_{-1}^2=(2/\pi)\left(d_0^1+d_{-2}^1\right)\times\left(c_1^0-c_3^0\right)$, $d_{-3}^2=\left(4d_{-2}^1/(5\pi)\right)\left(c_3^0-c_1^0-4c_2^0-i2\left(c_2^0-c_1^0+c_3^0\right)\right)$.

Выпишем уравнение для нахождения коэффициента u_3 асимптотического разложения (6.3). Имеем

$$\dot{u}_3(s)+i\frac{\pi}{2}u_3(s)-i\frac{\pi}{2}u_3(s-1)=d_0^1\left(-\left(1+\frac{\pi}{2}i\right)\lambda_2+M_1\right)+d_{-2}^1M_1+$$
$$\left(d_0^1\overline{M}_1+d_{-2}^1\left(\lambda_2\left(-1+i\frac{\pi}{2}\right)+\overline{M}_1\right)\right)e^{-i\pi s}+M_2d_0^1e^{i\pi s}+\overline{M}_2d_{-2}^1e^{-2i\pi s}, \tag{6.7}$$

где $M_1=(4/\pi)\left(c_1^0+c_3^0\right)\left(c_1^0+c_2^0-i\left(c_2^0+c_3^0\right)\right)-(2/(5\pi))\left((1/2)\left(c_1^0-c_3^0+4c_2^0\right)\right.$ $\left.+i\left(c_1^0-c_2^0-c_3^0\right)\right)\left(c_1^0-c_2^0+i\left(c_2^0-c_3^0\right)\right)+(3/4)l_1^0-(i/4)l_2^0+(1/4)l_3^0-(3i/4)l_4^0$, $M_2=3l_1^0/4-3l_2^0i/4-3l_3^0/4+3l_4^0i/4+(1/(5\pi))\left(c_1^0-c_3^0+4c_2^0\right)\left(c_2^0-c_1^0-i\left(c_3^0-c_2^0\right)\right)-(2/(5\pi))\left(c_1^0-c_2^0-c_3^0\right)\left(c_2^0+c_3^0+i\left(c_1^0-c_2^0\right)\right)$.

Условия существования периодических решений последнего уравнения имеют вид [14, с. 109]

$$d_0^1\left(-\left(1+\tfrac{\pi}{2}i\right)\lambda_2+M_1\right)+d_{-2}^1M_1=0,$$

$$d_0^1\overline{M}_1+d_{-2}^1\left(\lambda_2\left(-1+i\tfrac{\pi}{2}\right)+\overline{M}_1\right)=0.$$

Определитель этой системы дает уравнение для нахождения λ_2. Оно имеет нулевой корень. Ненулевой корень определяется формулой

$$\lambda_2 = -\frac{8}{4+\pi^2}\left(-\frac{3}{4}l_1^0 + \frac{\pi}{8}l_2^0 - \frac{1}{4}l_3^0 + \frac{3\pi}{8}l_4^0 + \left(\frac{7}{10} - \frac{9}{5\pi}\right)\left(c_1^0c_2^0 + c_1^0c_3^0 +\right.\right.$$

$$\left.\left. c_2^0c_3^0\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{9}{5\pi}\right)\left(c_1^0\right)^2 + \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{5\pi}\right)\left(c_2^0\right)^2 + \left(\frac{11}{10} - \frac{9}{5\pi}\right)\left(c_1^3\right)^2\right). \qquad (6.8)$$

Теорема 6.1 Пусть выполняются условия теоремы 5.1 и $0 < \varepsilon/\varepsilon_2 < \varepsilon^*/|\varepsilon_2|$. Тогда при малых значениях ε периодическое решение уравнения (1.1) будет устойчивым при $\lambda_2 < 0$ и неустойчивым при $\lambda_2 > 0$.

Доказательство. Устойчивость уравнения (1.1) определяется знаком действительной части характеристического показателя $\lambda(\gamma(\varepsilon))$, $0 < \varepsilon/\varepsilon_2 < \varepsilon^*/|\varepsilon_2|$. Согласно формулам (6.8) и (5.12), характеристический показатель допускает асимптотическое разложение $\lambda(\gamma(\varepsilon)) = i\pi/2 + (\lambda_2/\varepsilon_2)\varepsilon + o(\varepsilon)$. Следовательно, знак действительной части характеристического показателя определяется знаком числа λ_2. Теорема доказана.

7 Примеры

Возможные приложения предложенной методики исследования периодических решений продемонстрируем на конкретных классах дифференциальных уравнений с запаздыванием. В работах [15,16] рассматривались другие методы исследования периодических решений дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Пример 7.1. Рассмотрим уравнение (1.1), удовлетворяющее условиям теоремы 5.1 в случае, когда f — четная по первому и нечетная по второму аргументу функция.

Имеет место асимптотическое разложение $f(x, x_{-1}, \varepsilon) = b(\varepsilon)x_{-1} + c_1(\varepsilon)x^2 + l_2(\varepsilon)x^2x_{-1} + l_4x_{-1}^3 + O\left(\left(x^2 + x_{-1}^2\right)^2\right)$, $b'(0) \neq 0$. Используя формулы (5.8), (5.9), находим

$$\alpha_2 = \frac{36}{5\pi^3}\left(c_1^0\right)^2, \varepsilon_2 = \frac{1}{b_1}\left(\frac{18-2\pi}{5\pi^2}\left(c_1^0\right)^2 - \frac{1}{4}l_2^0 - \frac{3}{4}l_4^0\right). \qquad (7.1)$$

При выполнении условия $\varepsilon_2 \neq 0$ существует периодическое решение рассматриваемого уравнения при малых значениях параметра ε, удовлетворяющих неравенству $0 < \varepsilon/\varepsilon_2$. Период этого решения определяется асимптотической формулой

$$\omega(\varepsilon) = 4\left(1 + \frac{36b_1\left(c_1^0\right)^2}{5\pi^3}\left(\frac{18-2\pi}{5\pi^2}\left(c_1^0\right)^2 - \frac{1}{4}l_2^0 - \frac{3}{4}l_4^0\right)^{-1}\varepsilon\right) + o(\varepsilon).$$

Ему соответствует периодическое решение уравнения (1.3), определяемое асимптотической формулой (5.10), которая, в рассматриваемом случае, имеет вид

$$\xi(s,\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) + \frac{c_1^0\varepsilon}{\pi\varepsilon_2}\left(1 - \frac{1}{5}\cos(\pi s) + \frac{2}{5}\sin(\pi s)\right) + o(\varepsilon), s \in \mathbb{R}.$$

Используя формулу (6.8), находим

$$\lambda_2 = -\frac{\pi}{4+\pi^2}\left(l_2^0 + 3l_4^0 - \frac{8(\pi-9)}{5\pi^2}\left(c_1^0\right)^2\right). \tag{7.2}$$

Полученное периодическое решение будет устойчивым, согласно теореме 6.1, если выполняется неравенство

$$l_2^0 + 3l_4^0 - \frac{8(\pi-9)}{5\pi^2}\left(c_1^0\right)^2 > 0,$$

и неустойчивым, если это неравенство строго нарушается.

Пример 7.2. Рассмотрим уравнение из примера 7.1 в частном случае, когда f не зависти от первого аргумента.

Имеет место асимптотическое разложение $f(x_{-1},\varepsilon) = b(\varepsilon)x_{-1} + l_4(\varepsilon)x_{-1}^3 + o\left(x_{-1}^4\right)$, $b'(0) \neq 0$. Используя формулы (7.1), находим $\alpha_2 = 0$, $\varepsilon_2 = -3l_4^0/(4b_1)$. При выполнении условия $l_4^0 \neq 0$ существует периодическое решение рассматриваемого уравнения при малых значениях параметра ε, удовлетворяющих неравенству $l_4^0\varepsilon/b_1 < 0$. Период этого решения определяется асимптотической формулой $\omega(\varepsilon) = 4 + o(\varepsilon)$. Ему соответствует периодическое решение уравнения (1.3), определяемое асимптотической формулой (5.10), которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$\xi(s,\varepsilon) = \sqrt{\frac{-4b_1\varepsilon}{3l_4^0}}\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) + o(\varepsilon), s \in \mathbb{R}.$$

Используя формулу (6.8), находим $\lambda_2 = -3\pi l_4^0/(4+\pi^2)$. Полученное периодическое решение будет устойчивым, согласно теореме 6.1, если $l_4^0 > 0$ и неустойчиво, если $l_4^0 < 0$.

Пример 7.3. Рассмотрим уравнение Хатчинсона [2, с. 134]

$$\dot{x}(t) = -\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)x(t-1)(1+x(t)). \tag{7.3}$$

Имеет место следующее представление $f(x, x_{-1}, \varepsilon) = b(\varepsilon)x_{-1} + 2c_2(\varepsilon)xx_{-1}$, где $b(\varepsilon) = -\varepsilon$, $c_2(\varepsilon) = -\pi/4 - (1/2)\varepsilon$. Согласно формулам (5.8) и (5.9), имеем $\alpha_2 = 1/(10\pi)$, $\varepsilon_2 = (3\pi-2)/40$. Здесь выполнено условие $\varepsilon_2 \neq 0$. Поэтому при малых положительных значениях ε существует периодическое решение. Период этого решения имеет вид $\omega(\varepsilon) = 4\left(1 + 4\varepsilon/(\pi(3\pi-2))\right) + o(\varepsilon)$. Ему соответствует периодическое решение уравнения (1.3), определяемое асимптотической формулой (5.10), которая в рассматриваемом случае, имеет вид

$$\xi(s,\varepsilon) = \sqrt{\frac{40\varepsilon}{3\pi-2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{40\varepsilon}{3\pi-2}\left(\frac{1}{5}\cos(\pi s) + \frac{1}{10}\sin(\pi s)\right) + o(\varepsilon), s \in \mathbb{R}.$$

Используя формулу (6.8), находим $\lambda_2 = -\pi/(4+\pi^2)$. Согласно теореме 6.1 полученное решение устойчиво. Данный результат, полученный другим методом, описан в работе [2, с. 134].

Пример 7.4. Рассмотрим уравнение [2, с. 137]

$$\dot{x}(t) = -\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)x(t-1) + l_1^0x^3(t) + l_2^0x^2(t)x(t-1) +$$
$$l_3^0x(t)x^2(t-1) + l_4^0x^3(t-1).$$

Имеет место представление (5.1), в котором $a(\varepsilon) = 0$, $b(\varepsilon) = -\varepsilon$, $c_i(\varepsilon) = 0\ \left(i = \overline{1,3}\right)$, $l_j(\varepsilon) = l_j^0\ \left(j = \overline{1,4}\right)$, $v_k(\varepsilon) = 0\ \left(k = \overline{1,5}\right)$.

Согласно формулам (5.8) и (5.9), имеем

$$\alpha_2 = -\frac{4}{\pi}\left(-\frac{3}{4}l_1^0 - \frac{l_3^0}{4}\right), \varepsilon_2 = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{3l_1^0}{2} - \frac{\pi l_2^1}{4} + \frac{l_3^0}{2} - \frac{3\pi}{4}l_4^0\right).$$

При выполнении условия $\varepsilon_2 \neq 0$ существует периодическое решение у рассматриваемого уравнения при малых значениях параметра ε, удовлетворяющих неравенству $0 < \varepsilon/\varepsilon_2$. Период этого решения имеет вид

$$\omega(\varepsilon) = 4\left(1 - \frac{12\, l_1^0 + 4l_3^0}{6\, l_1^0 + 3l_3^0 - \pi l_2^0 - 3\pi l_4^0}\varepsilon\right) + o(\varepsilon).$$

Согласно формуле (5.10), периодическое решение имеет вид

$$\xi(s,\varepsilon) = \left(-\frac{4\pi\varepsilon}{6\, l_1^0 + 3l_3^0 - \pi l_2^0 - 3\pi l_4^0}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}s\right) + o(\varepsilon), s \in \mathbb{R}.$$

Полученное периодическое решение будет устойчивым при выполнении неравенства

$$\frac{3}{4}l_1^0 - \frac{\pi}{8}l_2^0 + \frac{1}{4}l_3^0 - \frac{3\pi}{8}l_4^0 < 0.$$

При строгом нарушении этого неравенства периодическое решение неустойчиво.

Список литературы

[1] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир. 1984.

[2] Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир. 1985.

[3] Chafee N. The bifurcation problem for a functional differential equation of finitely retarded type//J. Math. Anal. and Appl. 1971. V. 35. P.312-348.

[4] Kazarinoff N.D., Wan Y. H., van den Driessche P. Hopf bifurcation and stability of periodic solution of differential-difference and integro-differential equations//J. Inst. of Math. and Ins. Appl. 1978. V.21. P.461-477.

[5] Долгий Ю.Ф., Колупаева О.С. Бифуркация Хопфа для дифференциальных уравнений с малым запаздыванием//Вестник ПГТУ. Функционально-дифференциальные уравнения. 1997. №4. С.84-90.

[6] Долгий Ю.Ф. Метод вспомогательных систем Шиманова в задачах построения уравнений разветвления//Изв. Урал. гос. университета. Математика и механика. 2003. №26. вып.5. С.55-65.

[7] Долгий Ю.Ф. Метод вспомогательных систем Шиманова в задачах периодических колебаний автономных систем//Тезисы докл. VII международного семинара "Устойчивость и колебания нелинейных систем уравнений". Москва. 2002. С.24-26.

[8] Долгий Ю.Ф. Автоматическое регулирование. Свердловск. Изд. УрГУ. 1987.

[9] Зубов В. И., Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л.: Судпромгиз. 1969.

[10] Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.:Наука. 1972. 720 с.

[11] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.:Наука. 1977.

[12] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука. 1969.

[13] Шиманов С.Н. Об отыскание характеристических показателей систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами// ПММ. 1958. Т.22, вып. 3. С. 382-385.

[14] Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.:ГИТТЛ. 1956. 492 с.

[15] Grafton R. B. A periodicity theorem for autonomous functional differential equations// J. Diff. Equs. 1969. V.6. N.1. P.87-109.

[16] Hausrath A. R. Stability in the critical case of purely imaginary roots for neutral functional differentional equations// J. Diff. Equs. 1973. V13. N.2. P.329-357.