

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
И  
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ  
N.4, 2007  
Электронный журнал,  
рег. N П2375 от 07.03.97  
ISSN 1817-2172

<http://www.neva.ru/journal>  
<http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal/>  
e-mail: jodiff@mail.ru

Моделирование динамических систем

## ПОСТРОЕНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ МЕР ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Осипенко Г.С., Крупин А.В. и Безручко А.А.

Севастопольский национальный технический университет,

Петренко Е.И.

Санкт-Петербургский государственный университет,

Капитанов А.Я.

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет.

Работа была анонсирована на Международном конгрессе NDA-2007 [3].

### 1 Аннотация

Пусть  $f : M \rightarrow M$  гомеоморфизм компактного многообразия  $M \subset R^d$ , порождающий дискретную динамическую систему  $\{f^n, n \in Z\}$ . Описывается основанный на конструкции символического образа алгоритм построения инвариантной меры динамической системы. Рассматривается последовательность подразбиений таких, что максимальный диаметр ячеек  $d_k \rightarrow 0$  и соответствующая последовательность  $G^k$  символических образов, на которых строятся согласованные инвариантные потоки  $m^k$ . С помощью этих потоков и меры Лебега строятся меры  $\mu^k$ . Доказано, что при этих условиях существует мера  $\mu$  инвариантная для  $f$  такая, что  $\mu = \lim_{d_k \rightarrow 0} \mu^k$ , где сходимость рассматривается в слабой топологии.

## 2 Введение

Пусть  $f : M \rightarrow M$  гомеоморфизм компактного многообразия  $M \subset R^d$ , порождающий дискретную динамическую систему  $\{f^k, k \in Z\}$ . Мера  $\mu$  на  $M$  называется инвариантной для  $f$ , если для любого измеримого множества  $A \subset M$  выполнено равенство

$$\mu(f(A)) = \mu(A) = \mu(f^{-1}(A)).$$

Теорема Крылова-Боголюбова [15] гарантирует, что существует мера  $\mu$ , инвариантная для  $f$  и нормированная на  $M$ :  $\mu(M) = 1$ . Известно [1], что множество всех  $f$ -инвариантных мер  $\mathcal{M}(f)$  является выпуклым замкнутым компактом в слабой топологии. Сходимость  $\mu_n \rightarrow \mu$  в этой топологии означает, что

$$\int_M \phi d\mu_n \rightarrow \int_M \phi d\mu$$

для любой непрерывной функции  $\phi : M \rightarrow R$ . Крайними точками выпуклого множества  $\mathcal{M}(f)$  являются эргодические меры. (Мера  $\mu$  эргодична, если для любого инвариантного измеримого множества  $A$  либо  $\mu(A) = 0$ , либо  $\mu(M \setminus A) = 0$ .)

**Пример 1** *Предположим, что точка  $x$  — периодическая с наименьшим периодом  $p$ , т.е. траектория  $T = \{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$  состоит из  $p$  различных точек и  $f^p(x) = x$ . Пусть мера  $\mu$  равномерно распределена по траектории  $T$ , т.е.  $\mu(x) = \mu(f(x)) = \dots = \mu(f^{p-1}(x)) = 1/p$  и мера множества  $A$  определяется как  $\mu(A) = \mu(A \cap T) = k/p$ , где  $k$  число точек траектории  $T$ , лежащих в  $A$ . Легко проверить, что данная мера является инвариантной и эргодической. Она дискретна в том смысле, что она сосредоточена в конечном числе точек.*

Наша цель состоит в конструктивном построении множества всех инвариантных мер  $\mathcal{M}(f)$ . Будет указан алгоритм, который позволяет построить любую инвариантную меру. Для этого мы воспользуемся конструкцией символического образа динамической системы [2, 17]. Пусть  $C = \{M(1), M(2), \dots, M(n)\}$  конечное покрытие области  $M$ ,  $M(i)$  — ячейка покрытия. Символический образ  $G$  — это ориентированный граф (орграф), у которого каждая вершина (узел)  $i$  соответствует ячейке  $M(i)$  и дуга  $i \rightarrow j$  существует тогда и только тогда, когда  $f(M(i)) \cap M(j) \neq \emptyset$ . В общем случае, никаких ограничений на покрытия не налагается, но мы будем считать,

что  $C$  является разбиением с измеримыми ячейками. При численных расчетах ячейками являются параллелепипеды, которые могут пересекаться только по границам. Если допускается замкнутое покрытие, то параллелепипеды выбираются замкнутыми. Когда  $C$  является измеримым разбиением, параллелепипеды надо выбрать полуоткрытыми, приписывая граничные диски к одной из примыкающих ячеек. Общая схема построения состоит в следующем. Сначала мы определим на дугах  $G$ , вероятностное распределение  $m_{ij}$ , которое обладает некоторым свойством инвариантности. Такое распределение позволяет приписать меру ячейкам и получить некоторое приближение к инвариантной мере. Множество распределений  $\{m = (m_{ij})\}$  образует выпуклый многогранник, который является приближением для множества инвариантных мер  $\mathcal{M}(f)$ . Затем мы рассмотрим последовательность подразбиений исходного разбиения при стремлении максимального диаметра ячеек к нулю. Образуется последовательность символических образов, на которых определяется согласованная последовательность распределений  $\{m^k\}$ . Переходя к пределу по  $k$ , определим меру  $\mu$ , инвариантную для отображения  $f$ . Будет показано, что любая инвариантная мера может быть получена описанным предельным переходом.

### 3 Потоки на графах

Предположим, что существует  $f$ -инвариантная нормированная мера  $\mu$ . Тогда каждой дуге  $i \rightarrow j$  символического образа  $G$  мы можем приписать меру

$$m_{ij} = \mu(M(i) \cap f^{-1}(M(j))) = \mu(f(M(i)) \cap M(j)), \quad (1)$$

где последнее равенство является следствием инвариантности меры  $\mu$ . Кроме того, из инвариантности  $\mu$  следуют равенства

$$\begin{aligned} \sum_k m_{ki} &= \sum_k \mu(f(M(k)) \cap M(i)) = \mu(f(M(i))) = \mu(M(i)) = \\ &= \sum_j \mu(M(i) \cap f^{-1}(M(j))) = \sum_j m_{ij}. \end{aligned}$$

Сумма  $\sum_k m_{ki}$  называется потоком, входящим в вершину  $i$ , а сумма  $\sum_j m_{ij}$  — потоком, исходящим из  $i$ . Равенство

$$\sum_k m_{ki} = \sum_j m_{ij} \quad (2)$$

можно трактовать как закон Кирхгофа: для каждой вершины входящий поток равен исходящему потоку. Кроме того, имеет место равенство

$$\sum_{ij} m_{ij} = \mu(M) = 1, \quad (3)$$

которое означает, что распределение  $m_{ij}$  является нормированным (вероятностным). Таким образом, существование инвариантной меры  $\mu$  порождает на символическом образе распределение  $m_{ij}$ , которое удовлетворяет (2) и (3). Описанное наблюдение приводит нас к следующему определению.

**Определение 1** Пусть  $G$  ориентированный граф. Поток на  $G$  называется распределение  $\{m_{ij}\}$  на дугах  $\{i \rightarrow j\}$  такое, что

- $m_{ij} \geq 0$ ;
- $\sum_{ij} m_{ij} = 1$ ;
- для любого  $i$  имеет место равенство  $\sum_k m_{ki} = \sum_j m_{ij}$ .

Последнее свойство можно назвать инвариантностью потока. Второе свойство нормировки можно записать в виде  $m(G) = 1$ , где под мерой графа понимается сумма мер его дуг. Иногда в теории графов описанное распределение называют замкнутым или инвариантным потоком. Для потока  $\{m_{ij}\}$  на графе  $G$  мы можем определить меру вершины  $i$  как

$$m_i = \sum_k m_{ki} = \sum_j m_{ij}.$$

В таком случае получаем равенство  $\sum_i m_i = m(G) = 1$ .

Пусть на символическом образе  $G$  определен поток  $m = \{m_{ij}\}$ , тогда на области  $M$  можно определить меру  $\mu^*$ , полагая

$$\mu^*(A) = \sum_i m_i v(A \cap M(i)) / v(M(i)), \quad (4)$$

где  $v$  — нормированная на  $M$  мера Лебега. В этом случае мера ячейки  $M(i)$  совпадает с мерой вершины  $i$ :

$$\mu^*(M(i)) = m_i.$$

Вообще говоря, построенная мера  $\mu^*$  не является инвариантной для  $f$ . Однако, как будет показано, эта мера является приближением к инвариантной мере в том смысле, что  $\mu^*$  сходится к инвариантной мере, если максимальный диаметр ячеек стремится к нулю.

## 4 Свойства потоков на графе

Пусть  $G$  абстрактный ориентированный граф, имеющий  $n$  вершин. Рассмотрим пространство  $\mathcal{Z} = \{m\}$  всех потоков на  $G$ . Пусть  $m^1 = \{m_{ij}^1\}$  и  $m^2 = \{m_{ij}^2\}$  два потока, числа  $\alpha, \beta \geq 0$  и  $\alpha + \beta = 1$ . Тогда, как нетрудно проверить, распределение  $m = \alpha m^1 + \beta m^2 = \{\alpha m_{ij}^1 + \beta m_{ij}^2\}$  также является потоком. При этом мы будем говорить, что поток  $m$  является суммой потоков  $m^1$  и  $m^2$  с весами  $\alpha$  и  $\beta$ . Таким образом, пространство всех потоков  $\mathcal{Z}$  является выпуклым.

Исследуем структуру выпуклого множества  $\mathcal{Z}$ . Пусть  $\omega = (i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow i_1)$  — простой периодический путь (цикл), т.е. все вершины  $\{i_t, t = 1, 2, \dots, k\}$  различны. Построим поток  $m(\omega)$ , сосредоточенный на этом цикле (простой поток). Для этого положим  $m_{ij} = 1/k$  для всех дуг периодического пути  $\omega$  и  $m_{ij} = 0$  для всех остальных дуг. Очевидно, что простой поток обладает свойством инвариантности, является единственным потоком, сосредоточенным на  $\omega$  и не раскладывается в сумму других потоков. Таким образом  $m(\omega)$  является крайней точкой множества потоков  $\mathcal{Z}$ . Так как число вершин конечно, то число простых циклов и простых потоков тоже конечно.

**Утверждение 1** *Любой поток  $m \in \mathcal{Z}$  раскладывается в сумму простых потоков.*

**Доказательство.** Пусть  $m = \{m_{ij}\}$  поток на  $G$ . Рассмотрим множество дуг  $D = \{i \rightarrow j\}$  таких, что  $m_{ij} > 0$ . На этом множестве выполняется закон Кирхгофа (2). Это означает, что через любую дугу из  $D$  можно проложить бесконечный путь  $\omega^*$ , лежащий в  $D$ . Действительно, если существует дуга  $k \rightarrow i$  с  $m_{ki} > 0$ , то согласно равенству (2), существует дуга  $i \rightarrow j$  с  $m_{ij} > 0$ . Так как граф имеет конечное число дуг, то  $\omega^*$  содержит периодический путь  $\omega$ , который можно считать простым. Пусть  $p$  — наименьший период  $\omega$  и

$$m(\omega) = \min\{m_{ij} \mid i \rightarrow j \in \omega\} > 0$$

— наименьшая мера дуги из  $\omega$ . Найдем число  $\alpha > 0$  такое, что

$$\alpha/p = m(\omega).$$

Построим новое распределение  $m^*$  на дугах  $G$ . Для каждой дуги  $i \rightarrow j$  в  $\omega$  определим новую меру  $m_{ij}^* = m_{ij} - \alpha/p \geq 0$ . Если дуга  $i \rightarrow j$  не входит в  $\omega$ , то  $m_{ij}^* = m_{ij}$ .

Ясно, что сумма мер всех дуг  $\sum_{ij} m_{ij}^* = 1 - \alpha$ .

Перейдем к проверке закона Кирхгофа (2) для меры  $m^*$ . Если вершина  $i$  не лежит на цикле  $\omega$ , то  $m_{ij}^* = m_{ij}$ ,  $m_{ki}^* = m_{ki}$  и равенство (2) очевидно выполнено. Пусть вершина  $i$  лежит на простом цикле  $\omega$ , тогда в  $\omega$  существуют дуги:  $k^* \rightarrow i$  входящая в  $i$  и  $i \rightarrow j^*$  выходящая из  $i$ , и не существует других дуг цикла  $\omega$ , связанных с вершиной  $i$ .

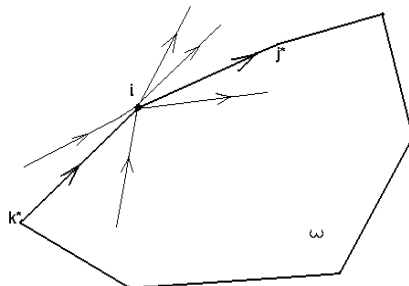


Рис. 1: Проверка закона Кирхгофа.

В этом случае, в левой и правой частях равенства

$$\sum_k m_{ki} = \sum_j m_{ij} \tag{5}$$

имеются слагаемые вида  $m_{k^*i}$  и  $m_{ij^*}$ , которые порождены дугами  $k^* \rightarrow i$  и  $i \rightarrow j^*$ . Остальные слагаемые не связаны с циклом  $\omega$ . Таким образом, если из левой и правой частей равенства (5) отнять число  $\alpha/p$ , то получим искомое равенство

$$\sum_k m_{ki}^* = \sum_j m_{ij}^*.$$

Следовательно, новое распределение  $m^*$  удовлетворяет закону Кирхгофа, но при этом множество  $D^* = \{i \rightarrow j\}$  таких, что  $m_{ij}^* > 0$ , не содержит цикл  $\omega$ . Повторяя этот процесс удаления простых циклов из множества  $D$ , через конечное число шагов придем к тому, что каждой дуге будет приписана нулевая мера. В этом случае исходный поток представляется в виде

$$m = \sum_{\omega} \alpha_{\omega} m_{\omega},$$

где  $\alpha_{\omega} \geq 0$ ,  $m_{\omega}$  — простой поток, а сумма берется по всем простым циклам. Из равенств  $m(G) = m_{\omega}(G) = 1$  следует, что  $\sum_{\omega} \alpha_{\omega} = 1$ ,

◉

**Замечание** Из доказательства следует, что мера  $m_{ij}$  может быть положительной только на дуге  $i \rightarrow j$ , через которую проходит периодический путь. Вершина  $i$  называется возвратной, если через нее проходит периодический путь. Две возвратные вершины являются эквивалентными, если существует периодический путь проходящий через обе вершины. Множество возвратных вершин разбивается на классы эквивалентности, которые в теории графов называются сильными компонентами. Сильные компоненты символического образа порождают изолирующие окрестности цепно-рекуррентных множеств динамической системы [17].

Известно [1], что инвариантная мера равна нулю вне цепно-рекуррентного множества. Следовательно, не ограничивая общности, при построении инвариантных мер достаточно рассматривать изолированную инвариантную компоненту цепно-рекуррентного множества. Поэтому будем предполагать, что граф  $G$  состоит из одной сильной компоненты. Если в рассуждениях будут использоваться графы общего вида, то мы будем оговаривать это особо.

Таким образом, семейство потоков  $\mathcal{Z}$  на графе  $G$  есть выпуклый многогранник, который является выпуклой оболочкой простых потоков. Это означает, что любой поток можно построить следующим образом. Пусть  $P = \{\omega_z\}$  — множество всех простых путей (циклов),  $\{m_{ij}^z\}$  — множество простых потоков. Тогда любой поток  $\{m_{ij}\}$  определяется выбором неотрицательных чисел  $a_z$  таких, что  $\sum_z a_z = 1$  и в этом случае  $m_{ij} = \sum_z a_z m_{ij}^z$ . Коэффициенты  $\{a_z\}$  можно назвать весами простых циклов  $\{\omega_z\}$ .

Метод построения потоков, в котором используются все простые циклы, может потребовать большого времени вычислений, т.к. число простых циклов, как правило, очень велико. Например, в полном графе (где каждая вершина соединена с каждой) число вершин —  $n$ , число дуг —  $n^2$ , а число простых циклов —  $2^n$ . Однако, можно использовать неполный набор простых циклов, считая веса незадействованных циклов равными нулю.

Рассмотрим другие способы построения потоков, которые позволяют произвести вычисления за приемлемое время даже для достаточно больших графов.

Пусть  $Q$  и  $G$  — ориентированные графы, отображение  $s : Q \rightarrow G$  является отображением орграфов, если отображение вершин порождает отображение дуг. Иначе говоря, если  $k$  и  $l$  — вершины на  $Q$ ,  $s(k) = i$ ,  $s(l) = j$  и существует дуга  $k \rightarrow l$ , тогда существует дуга  $i \rightarrow j$  на  $G$  и  $s(k \rightarrow l) = i \rightarrow j$ . При этом верно и обратное, если  $s(k \rightarrow l) = i \rightarrow j$ , то  $s(k) = i$  и  $s(l) = j$ .

Отображение орграфов порождает отображение (допустимых) путей, а периодический путь отображается на периодический путь, при этом период может уменьшиться, вообще говоря.

**Утверждение 2** Пусть  $Q$  и  $G$  — орграфы,  $s : Q \rightarrow G$  является отображением орграфов, и на  $Q$  существует поток  $m$ . Тогда на  $G$  индуцируется поток  $m^* = s(m)$  такой, что для дуги  $i \rightarrow j \in G$

$$m_{ij}^* = \sum_{s(p \rightarrow q) = i \rightarrow j} m_{pq},$$

где сумма берется по всем дугам  $p \rightarrow q$ , которые отображаются на  $i \rightarrow j$ . Если дуга  $i \rightarrow j$  не имеет прообразов, то  $m_{ij}^* = 0$ .

**Доказательство.** Надо проверить выполнение для  $m^*$  двух свойств потока. Свойство нормировки проверяется тривиально, т.к. суммирование по всем вершинам  $i, j$  графа  $G$  совпадает с суммированием по всем  $p, q$  из  $Q$

$$\sum_{ij} m_{ij}^* = \sum_{pq} m_{pq} = 1.$$

Для проверки условия инвариантности фиксируем вершину  $i \in G$  и рассмотрим все вершины  $p$  из прообраза  $s^{-1}(i)$ . Для каждой вершины  $p$  выполнено условие инвариантности  $\sum_r m_{rp} = \sum_t m_{pt}$ . Суммируя эти равенства по  $p \in s^{-1}(i)$  и учитывая, что  $m_{rl}^* = 0$  для дуг  $r \rightarrow l$ , не имеющих прообразов при отображении  $s$ , получаем искомое равенство

$$\sum_k m_{ki}^* = \sum_j m_{ij}^*$$

для вершины  $i \in G$ .

◊

**Утверждение 3** Пусть на  $G$  существует периодический путь  $\omega$  периода  $N$ . Тогда на  $G$  имеется поток  $m^*$  такой, что  $m_{ij}^* = k_{ij}/N$ , где  $k_{ij}$  это количество прохождений пути  $\omega$  через дугу  $i \rightarrow j$ .

**Доказательство.** Построим граф  $Q$ , который состоит из одного простого периодического цикла периода  $N$ , т.е.  $Q$  имеет  $N$  вершин и  $N$  дуг. В этом случае на  $Q$  существует единственный поток  $m$  такой, что  $m_{ij} = 1/N$ . Отображение  $s : Q \rightarrow G$  реализует путь  $\omega$ , т.е.  $s$  укладывает простой цикл  $Q$  на периодический путь  $\omega$ . Согласно Утверждению 2, мера дуги  $i \rightarrow j$  есть сумма мер



прообразов этой дуги при отображении  $s$ , т.е.  $m_{ij}^* = k_{ij}/N$ , где  $k_{ij}$  это число прохождений пути  $\omega$  через дугу  $i \rightarrow j$ .

◉

Если  $G$  состоит из одной сильной компоненты, то существует путь  $\Omega$ , который проходит через все вершины. Путь  $\Omega$  можно назвать плотным на вершинах. Тогда согласно Утверждению 3, определяется поток  $m = \{m_{ij}\}$  с положительной мерой  $m_i = \sum_j m_{ij} > 0$  на каждой вершине. Аналогично, существует путь  $\Omega^*$ , который проходит через все дуги. Описанный путь  $\Omega^*$  можно назвать плотным на дугах. Ясно, что путь плотный на дугах является плотным на вершинах, но обратное неверно, вообще говоря. Поток порожденный  $\Omega^*$  является положительным  $m_{ij} > 0$  на каждой дуге  $i \rightarrow j$ .

**Утверждение 4** Пусть на  $G$  существует семейство периодических путей  $\omega_1, \dots, \omega_r$  с периодами  $p_1, \dots, p_r$ , положим  $N = p_1 + \dots + p_r$ . Тогда на  $G$  имеется поток  $m$  такой, что  $m_{ij} = k_{ij}/N$ , где  $k_{ij}$  это общее число прохождений путей  $\omega_1, \dots, \omega_r$  через дугу  $i \rightarrow j$ .

**Доказательство** этого утверждения повторяет доказательство Утверждения 3. Действительно, пусть выполнено предположение данного утверждения. Заметим, что Утверждение 2 не предполагает, что графы  $G$  и  $Q$  являются сильно связными. Более того, эти графы могут иметь много компонент связности. Построим граф  $Q$ , который состоит из несвязного объединения  $r$  простых периодических циклов  $\Omega_1, \dots, \Omega_r$  с периодами  $p_1, \dots, p_r$ , т.е.  $Q$  имеет  $N$  вершин и  $N$  дуг, где  $N = p_1 + \dots + p_r$ . В этом случае на  $Q$  существует поток  $m^*$  такой, что  $m_{ij}^* = 1/N$ . Отображение  $s : Q \rightarrow G$  укладывает циклы  $\Omega_1, \dots, \Omega_r$  на периодические пути  $\omega_1, \dots, \omega_r$ , соответственно. Согласно Утверждению 2, мера дуги  $i \rightarrow j$  есть сумма мер прообразов этой дуги при отображении  $s$ , т.е.  $m_{ij} = k_{ij}/N$ , где  $k_{ij}$  это общее число прохождений путей  $\omega_1, \dots, \omega_r$  через дугу  $i \rightarrow j$ .

◉

Утверждение 4 допускает следующее обобщение.

**Утверждение 5** Пусть на  $G$  существует семейство периодических путей  $\omega_1, \dots, \omega_r$  с периодами  $p_1, \dots, p_r$ . Тогда на  $G$  имеется поток  $m$  такой, что

$$m_{ij} = \sum_t \alpha_t k_{ij}^t / p_t,$$

где  $\alpha_t \geq 0$  и  $\sum_t \alpha_t = 1$ ,  $k_{ij}^t$  это число прохождений пути  $\omega_t$  через дугу  $i \rightarrow j$ .

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству Утверждения 4. Заметим, что Утверждение 4 следует из Утверждения 5, если положить  $\alpha_t = p_t/N$ ,  $N = \sum_t p_t$ . Из Утверждений 2 и 5 следует, что любой поток из  $Z$  может быть построен методом, описанным в Утверждении 5.

## 5 Последовательность подразбиений и символических образов

Рассмотрим гомеоморфизм  $f : M \rightarrow M$ , измеримое разбиение  $C$  и символический образ  $G$ , порожденный данным разбиением. Исследуем, что происходит при последовательном измельчении покрытий. Пусть покрытие  $C$  подвергается подразбиению, т.е. каждая ячейка  $M(i)$  разбивается на несколько ячеек  $M(i1), M(i2), \dots$  так, что  $M(i) = \bigcup_k M(ik)$ . Таким образом, мы получаем новое покрытие  $NC$  и новый символический образ  $NG$ . В этом случае существует [17] естественное отображение  $s : NG \rightarrow G$  такое, что  $s(ik) = i$ , если  $M(ik) \subset M(i)$ . Это отображение является отображением ориентированных графов, т.е. если на  $NG$  имеется дуга  $(ik) \rightarrow (jl)$ , то на  $G$  существует дуга  $i \rightarrow j$ . Отображение  $s$  позволяет перенести любой поток на  $NG$  в поток на  $G$ , как это описано в разделе 4. Действительно, пусть на  $NG$  имеется поток  $m^* = \{m_{ikjl}\}$ , т.е. каждой дуге  $(ik) \rightarrow (jl)$  приписана мера  $m_{(ik)(jl)}$ , для которой выполнены равенства

$$\sum_{ikjl} m_{(ik)(jl)} = 1,$$

$$\sum_{kp} m_{(kp)(iq)} = \sum_{jl} m_{(iq)(jl)}.$$

Определим поток  $m_{ij}$  на графе  $G$  равенством

$$m_{ij} = \sum_{kl} m_{(ik)(jl)},$$

т.е. мера дуги  $i \rightarrow j$  является суммой мер тех дуг  $(ik) \rightarrow (jl)$ , которые проектируются на  $i \rightarrow j$  отображением  $s : NG \rightarrow G$ .

Обозначим  $\mathcal{M}(G)$  и  $\mathcal{M}(NG)$  множество потоков на  $G$  и  $NG$ , соответственно. При рассмотрении отображения  $s$  возникает отображение потоков  $s^*$ , которое действует из  $\mathcal{M}(NG)$  в  $\mathcal{M}(G)$ , является однозначным и  $s^*(\mathcal{M}(NG)) \neq \mathcal{M}(G)$ , вообще говоря.

Построенный поток  $m = \{m_{ij}\}$  на графе  $G$  является образом потока  $m^* = \{m_{(ik)(jl)}\}$  на  $NG$  при отображении  $s^*$ . Мы будем писать  $s^*(m^*) = m$ . Для любых двух потоков  $m^* \in \mathcal{M}(NG)$  и  $m \in \mathcal{M}(G)$  будем говорить, что они согласованы, если  $s^*(m^*) = m$ .

Теперь рассмотрим последовательные подразделения  $C^1, C^2, C^3, \dots$  такие, что максимальный диаметр ячеек разбиений  $d_1, d_2, d_3, \dots \rightarrow 0$ . Такая последовательность порождает последовательность символических образов  $G^1, G^2, G^3, \dots$  и отображений  $s : G^k \rightarrow G^{k-1}, s^* : \mathcal{M}(G^k) \rightarrow \mathcal{M}(G^{k-1})$ . Таким образом, определены последовательности вида:

$$G^1 \xleftarrow{s} G^2 \xleftarrow{s} G^3 \xleftarrow{s} \dots$$

и

$$\mathcal{M}(G^1) \xleftarrow{s^*} \mathcal{M}(G^2) \xleftarrow{s^*} \mathcal{M}(G^3) \xleftarrow{s^*} \dots$$

Пусть на каждом символическом образе  $G^k$  выбран поток  $m^k \in \mathcal{M}(G^k)$ , причем эти потоки согласованы, т.е.

$$s^*(m^{k+1}) = m^k.$$

Для каждого  $k$  определена мера  $\mu^k$  на  $M$ :

$$\mu^k(A) = \sum_i m_i^k v(A \cap M(i)) / v(M(i)), \quad (6)$$

где  $A$  — измеримое множество,  $M(i)$  — ячейки разбиения  $C^k$ ,  $v$  — лебегова мера, нормированная на  $M$ .

**Теорема 1** Пусть  $C^k$  — последовательные подразделения такие, что максимальный диаметр ячеек  $d_k \rightarrow 0$ . Если  $m^k$  согласованная последовательность потоков на символических образах  $G^k$ , то существует мера  $\mu$  инвариантная для  $f$  такая, что

$$\mu = \lim_{d_k \rightarrow 0} \mu^k,$$

где сходимость рассматривается в слабой топологии.

**Доказательство.** Пусть  $m^k = \{m_{ij}^k\}$  согласованная последовательность потоков на  $G^k$ ,  $\phi$  — непрерывная функция на компакте  $M$  и  $C^k = \{M(i)\}$  — разбиение компакта  $M$ . Каждой ячейке  $M(i)$  припишем меру  $m_i^k$  вершины  $i \in G^k$ . Выберем точку  $x_i \in M(i)$  и построим интегральную сумму

$$F^k(\phi) = \sum_i \phi(x_i)m_i^k.$$

Покажем, что существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F^k(\phi) = F(\phi). \quad (7)$$

Для этого достаточно показать, что последовательность  $F^k(\phi)$  является фундаментальной. Пусть  $C^l$  есть подразбиение покрытия  $C^k$ ,  $l > k$  и ячейки  $M(ir) \in C^l$ ,  $r = 1, 2, \dots$  образуют подразбиение ячейки  $M(i) \in C^k$ . Так как последовательность потоков согласована, то  $m^k = s^*(m^l)$ , что дает равенство

$$m_i^k = \sum_r m_{ir}^l, \quad (8)$$

где  $m_{ir}$  — мера ячейки  $M(ir) \in C^l$  (или вершины  $(ir) \in G^l$ ). Оценим разность

$$|F^k(\phi) - F^l(\phi)| = \left| \sum_i \phi(x_i)m_i^k - \sum_{ir} \phi(x_{ir})m_{ir}^l \right|.$$

Учитывая (8) и равномерную непрерывность  $\phi(x)$  на компакте  $M$ , получаем

$$|F^k(\phi) - F^l(\phi)| = \left| \sum_{ir} (\phi(x_i) - \phi(x_{ir}))m_{ir}^l \right| \leq \sum_{ir} |\phi(x_i) - \phi(x_{ir})|m_{ir}^l \leq$$

$$\sup_{|x-y| \leq d_k} |\phi(x) - \phi(y)| = \alpha(d_k),$$

где  $\alpha(d)$  — модуль непрерывности функции  $\phi$ ,  $d_k$  — максимальный диаметр ячеек из покрытия  $C^k$ . Так как  $\alpha(d) \rightarrow 0$  при  $d \rightarrow 0$ , то последовательность  $F^k(\phi)$  является фундаментальной и предел (7) существует.

Аналогично можно показать, что этот предел не зависит от выбора точек  $x_i \in M(i)$ . Таким образом, определен линейный функционал  $F(\phi)$ , который является ограниченным:  $|F(\phi)| \leq |\phi|$  и положительным:  $F(\phi) \geq 0$  при  $\phi > 0$ . Тогда согласно теореме Рисса о представлении [1] существует мера  $\mu$  такая, что

$$F(\phi) = \int_M \phi d\mu.$$

Для каждого  $k$  определена мера  $\mu^k$  на  $M$ , на ячейке  $M(i)$  мера  $\mu^k$  отличается от лебеговой постоянной множителем и мера ячейки  $\mu^k(M(i)) = m_i^k$  совпадает с мерой вершины  $i \in G^k$ . Покажем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu^k = \mu$$

в слабой топологии, т.е. надо показать, что для любой непрерывной функции  $\phi$

$$\int_M \phi d\mu^k \rightarrow \int_M \phi d\mu$$

при  $k \rightarrow \infty$ . По теореме о среднем для каждой ячейки  $M(i)$  существует точка  $x_i^*$  в замыкании  $cl(M(i))$  такая, что

$$\int_{M(i)} \phi d\mu^k = \phi(x_i^*) \mu^k(M(i)) = \phi(x_i^*) m_i^k.$$

Тогда

$$\int_M \phi d\mu^k = \sum_i \int_{M(i)} \phi d\mu_k = \sum_i \phi(x_i^*) m_i^k.$$

Таким образом, надо доказать равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_i \phi(x_i^*) m_i^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_i \phi(x_i) m_i^k,$$

где  $|x_i^* - x_i| \leq d_k$ . Это можно доказать аналогично предыдущему, используя модуль непрерывности функции  $\phi$ .

Известно [1], что инвариантность меры  $\mu$  относительно  $f$  следует из равенства

$$\int_M \phi d\mu = \int_M \phi(f) d\mu,$$

где  $\phi$  — любая функция непрерывная на  $M$ . Рассмотрим интегральную сумму  $F^k(\phi) = \sum_i \phi(x_i) m_i^k$ , где

$$m_i^k = \sum_j m_{ij}^k = \sum_r m_{ri}^k.$$

Тогда

$$F^k(\phi) = \sum_i \phi(x_i) \sum_r m_{ri}^k = \sum_{ir} \phi(x_i) m_{ri}^k.$$

Для каждого слагаемого  $\phi(x_i) m_{ri}^k$  заменим точку  $x_i$  точкой  $x_{ri}$  так, что  $x_{ri} \in f(M(r)) \cap M(i)$ . При этом мы получаем

$$F^k(\phi) = \sum_{ir} \phi(x_{ri}) m_{ri}^k + \sum_{ir} (\phi(x_i) - \phi(x_{ri})) m_{ri}^k = \sum_{ir} \phi(x_{ri}) m_{ri}^k + \varepsilon^*,$$

где  $\varepsilon^*$  оценивается модулем непрерывности функции  $\phi$  и  $\varepsilon^*(d_k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Для каждой точки  $x_{ri} \in f(M(r)) \cap M(i)$  существует точка  $z_{ri} \in M(r) \cap f^{-1}(M(i))$  такая, что  $f(z_{ri}) = x_{ri}$ , т.е.  $z_{ri} = f^{-1}(x_{ri})$ . Получаем

$$F^k(\phi) = \sum_{ir} \phi(f(z_{ri}))m_{ri}^k + \varepsilon^*,$$

где все точки  $z_{ri}$ ,  $i = 1, i = 2, \dots$  лежат в ячейке  $M(r)$ . Заменяем эти точки одной точкой  $z_r \in M(r)$ . Получаем равенство

$$\begin{aligned} F^k(\phi) &= \sum_{ir} \phi(f(z_r))m_{ri}^k + \sum_{ir} (\phi(f(z_{ri})) - \phi(f(z_r)))m_{ri}^k + \varepsilon^* = \\ &= \sum_r \phi(f(z_r)) \sum_i m_{ri}^k + \varepsilon^{**} + \varepsilon^* = \sum_r \phi(f(z_r))m_r^k = F^k(\phi(f)) + \varepsilon^{**} + \varepsilon^*, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon^{**}$  оценивается через модуль непрерывности суперпозиции  $\phi(f)$  и  $\varepsilon^{**}(d_k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , приходим к искомому равенству

$$F(\phi) = F(\phi(f)).$$

Теорема доказана.

◊

Как было отмечено во Введении, каждая инвариантная мера  $\mu$  порождает по формуле (1) последовательность потоков  $m^k$  на символических образах для любой последовательности подразбиений  $C^1, C^2, C^3, \dots$ . Нетрудно проверить, что эта последовательность является согласованной. Доказанная теорема гарантирует обратное: каждая согласованная последовательность потоков  $m^k$  на символических образах  $G^k$  таких, что максимальный диаметр ячеек  $d_k \rightarrow 0$ , порождает инвариантную меру.

**Следствие 1** *Любая инвариантная мера  $\mu$  может быть построена методом, указанным в Теореме 1.*

## 6 Стохастические цепи Маркова

Стохастическая цепь Маркова [9] определяется набором состояний  $\{i = 1, 2, \dots, n\}$  и вероятностями перехода  $P_{ij}$  из состояния  $i$  в состояние  $j$ . Матрица вероятностей переходов  $P = (P_{ij})$  является стохастической матрицей ( $P_{ij} \geq 0$  и  $\sum_j P_{ij} = 1$  для каждого  $i$ ). Распределение вероятностей

$p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ,  $\sum_i p_i = 1$  называется стационарным, если

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix} = (p_1, p_2, \dots, p_n),$$

т.е.  $p$  является левым стационарным вектором матрицы  $P$ . Следует отметить, что часто [1] стохастическая матрица определяется так, что она является транспонированной по отношению к выше описанной. В этом случае стационарное распределение является правым собственным вектором.

Каждый инвариантный поток  $m = \{m_{ij}\}$  на графе  $G$  порождает стохастическую цепь Маркова, у которой состояния  $i$  совпадают с вершинами  $\{i \mid m_i \neq 0\}$ , а вероятности перехода  $i \rightarrow j$  вычисляются как

$$P_{ij} = m_{ij}/m_i.$$

Стохастическая матрица  $P = (m_{ij}/m_i)$  имеет стационарное распределение  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ , т.к.

$$(m_1, m_2, \dots, m_n) \begin{pmatrix} m_{11}/m_1 & m_{12}/m_1 & \dots & m_{1n}/m_1 \\ m_{21}/m_2 & m_{22}/m_2 & \dots & m_{2n}/m_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ m_{n1}/m_n & m_{n2}/m_n & \dots & m_{nn}/m_n \end{pmatrix} = (m_1, m_2, \dots, m_n).$$

Таким образом, любой инвариантный поток  $m = \{m_{ij}\}$  на графе  $G$  порождает стохастическую цепь Маркова, для которой распределение меры по вершинам  $(m_i)$  является стационарным.

Покажем обратное: для любой стохастической матрицы  $P = (P_{ij})$  и ее стационарного распределения  $p = (p_i)$  существует инвариантный поток  $m = \{m_{ij}\}$ , для которого распределение меры по вершинам  $m_i = p_i$ .

Действительно, пусть  $P$  стохастическая матрица и  $pP = p$ . Рассмотрим граф  $G$ , который имеет  $n$  вершин  $\{i\}$  и дуга  $i \rightarrow j$  существует, если  $P_{ij} > 0$ . Построим распределение на дугах  $m_{ij} = P_{ij}p_i$  и покажем, что это распределение является потоком на  $G$ . Так как  $P$  — стохастическая матрица, то  $\sum_j P_{ij} = 1$  для любого  $i$ . Тогда

$$\sum_j m_{ij} = \sum_j P_{ij}p_i = p_i \sum_j P_{ij} = p_i.$$

Так как  $pP = p$ , то  $\sum_k p_k P_{ki} = p_i$ . Тогда

$$\sum_k m_{ki} = \sum_k p_k P_{ki} = p_i = \sum_j m_{ij},$$

т.е. для распределения  $m_{ij}$  выполнен закон Кирхгофа. Кроме того,  $\sum_{ij} m_{ij} = \sum_i p_i = 1$ .

Из описанных рассуждений следует, что технология построения потока на графе эквивалентна методу стохастической матрицы. В работах [6, 8, 10, 11, 12] используются стохастические матрицы вида

$$P_{ij} = v(M(i) \cap f^{-1}(M(j))) / v(M(i)),$$

где  $v$  — мера Лебега. В этих работах показано, что при некоторых дополнительных условиях методом стохастической матрицы строится "физическая" инвариантная мера (Синая-Боуэна-Рюэля), которая активно используется физиками. Ясно, что построение стохастической матрицы по мере, отличной от лебеговой, тоже приводит к некоторой инвариантной мере, вообще говоря, отличной от меры Синая-Боуэна-Рюэля. Более того, стохастическую матрицу можно получить, исходя из 0-1 матрицы  $\Pi = (\pi_{ij})$  ( $\pi_{ij} = 1$  если есть дуга  $i \rightarrow j$ , иначе  $\pi_{ij} = 0$ ). Положив,  $P_{ij} = \pi_{ij} / \sum_k \pi_{ik}$ , мы получим стохастическую матрицу, по которой можно строить инвариантную меру.

## 7 Реализация алгоритма

При построении инвариантной меры на символическом образе мы использовали Утверждение 1 раздела 4 и реализовали алгоритм построения инвариантного потока, как линейной комбинации простых потоков. Рассмотрим приближенный алгоритм нахождения циклов, который имеет сложность  $O(mn)$ , где  $m$  и  $n$  число вершин и дуг графа, соответственно.

Пусть  $G = (V, E)$  — ориентированный граф. Обозначим через  $i \rightarrow j$  дугу между вершинами  $i, j$ .

**Определение 2** Будем говорить, что вершина  $s$  является потомком вершины  $r$  (или  $s$  является предком вершины  $r$ ), если  $r$  родительская вершина с либо если родитель  $s$  является потомком  $r$ .



## 7.1 Построение циклов

Алгоритм использует поиск в ширину и обходит все компоненты связности. Одновременно строится дерево поиска, где существование ребра  $p \rightarrow c$  означает, что среди вершин, достижимых из  $p$  в графе  $G$  была рассмотрена вершина  $c$ . Для работы алгоритма достаточно хранить только ссылку из вершины-потомка( $c$ ) на вершину-родителя( $p$ ).

Узел дерева поиска представляется парой (вершина, указатель на родительский узел дерева поиска),  $ref$  обозначает операцию вычисления указателя на пару,  $null$  — пустой указатель, маркер вершины дерева поиска,  $q$  обозначает очередь таких пар.

1. Выберем произвольную вершину  $i$ .
2. Положим в  $q$  пару  $(i, null)$ .
3. Пока очередь  $q$  не пуста выберем пару  $(r, p)$  из  $q$ .
4. Если вершина  $r$  уже была рассмотрена, пропустить ее. Перейти на шаг 3.
5. Иначе для всех ребер  $r \rightarrow j \in E$  выполнить
  - (a) Если вершина  $j$  уже рассмотрена и является потомком вершины  $r$ , то найден цикл — путь в дереве поиска от вершины  $r$  к вершине  $j$ . Вершины найденного цикла можно перебрать при помощи ссылок на родительскую вершину пар представления дерева поиска.
  - (b) Иначе, положить  $(j, ref(r, p))$  в очередь.

Проверка факта обработки вершины алгоритмом может быть выполнена за константное время, если хранить дополнительный флаг в самой вершине. Каждая вершина рассматривается не более одного раза. Для проверки того, найден ли новый цикл потребуется пройти по дереву поиска вверх. Такую операцию можно выполнить за линейное от количества вершин время.

Заметим, что некоторые циклы могут быть не найдены. Чтобы преодолеть эту ситуацию, мы использовали модификацию алгоритма, в дальнейшем называемую "улучшенный алгоритм". В этом случае приближенный алгоритм применяется ко всем вершинам, которые не вошли ни в один из найденных циклов. Используя этот алгоритм, мы сможем назначить вес большему количеству дуг, но сложность будет порядка  $O(n \times O(nm))$ , что соответствует  $O(n^2 \times m)$ .

## 7.2 Построение меры (потока) на графе

Циклы обрабатываются по мере их нахождения, т.е. мера назначается очередному найденному циклу. В начале работы всем дугам приписывается значение 0. В процессе работы алгоритм приписывает им значения описанным ранее способом с выбором весов  $a_z$  с помощью функции  $g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Для каждого найденного цикла  $l$  выполним следующее:

(а) Вычислим  $u = \frac{g(|l|)}{|l|}$ , где  $|l|$  обозначает число дуг в цикле  $l$ .

(б) Для всех дуг  $e$  цикла  $l$  положим  $m(e) := m(e) + u$ .

2. Перебор циклов завершен. Проведем нормировку  $\{m\}$  :

(а) Вычислим  $w := \sum_{e \in E} m(e)$ ,

(б) положим  $m(e) := \frac{m(e)}{w}$

Для эффективной реализации этого алгоритма вес каждого ребра хранится в структуре данных самого ребра. Это позволяет проводить операции обновления значения  $m(e)$  за константное время.

В численной реализации мы рассматривали  $g(l) = 1$ , что соответствует выбору одинаковых коэффициентов  $a_z$ . После расстановки мер на дугах вычислим меры в вершинах графа. Таким образом мы получаем распределение меры в ячейках покрытия, соответствующего графу символического образа.

## 8 Численные эксперименты

Для построения символического образа используются методы, описанные в [5]. Символический образ строится при помощи линейного метода, при этом последний шаг построения символического образа проводится точечным методом.

### 8.1 Отображение Хенона [13, 7] при $a = 1.2$ , $b = 0.2$

Рассмотрим систему:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - ax^2 + y/5 \\ 5bx \end{pmatrix}, \quad (9)$$

при  $a = 1.2$ ,  $b = 0.2$ .

Известно [17], что при заданных параметрах у этой системы существует инвариантное множество в области  $[-2, 2] \times [-2, 2]$ . Возьмем  $M = [-2, 2] \times [-2, 2]$ . Проведем 13 шагов построения символического образа. На каждом шаге будем подразбивать ячейку на 4 равных части.

Проведем построение символического образа при помощи линейного метода [5]. Полученный символический образ состоит из 10 компонент сильной связности с количеством вершин 129419, 6974, 388, 16, 15, 7, 6, 5, 3 и 3 соответственно. Размеры ячейки составляют  $0.00024 \times 0.00024$ .

На рис. 2 и рис. 3 показано распределение меры по ячейкам покрытия (вершинам графа). Вычисления проводились двумя способами поиска простых циклов — приближенным и улучшенным. В плоскости показано построенное инвариантное множество динамической системы. Над каждой ячейкой отрезком прямой обозначено соответствующее значение построенной меры.

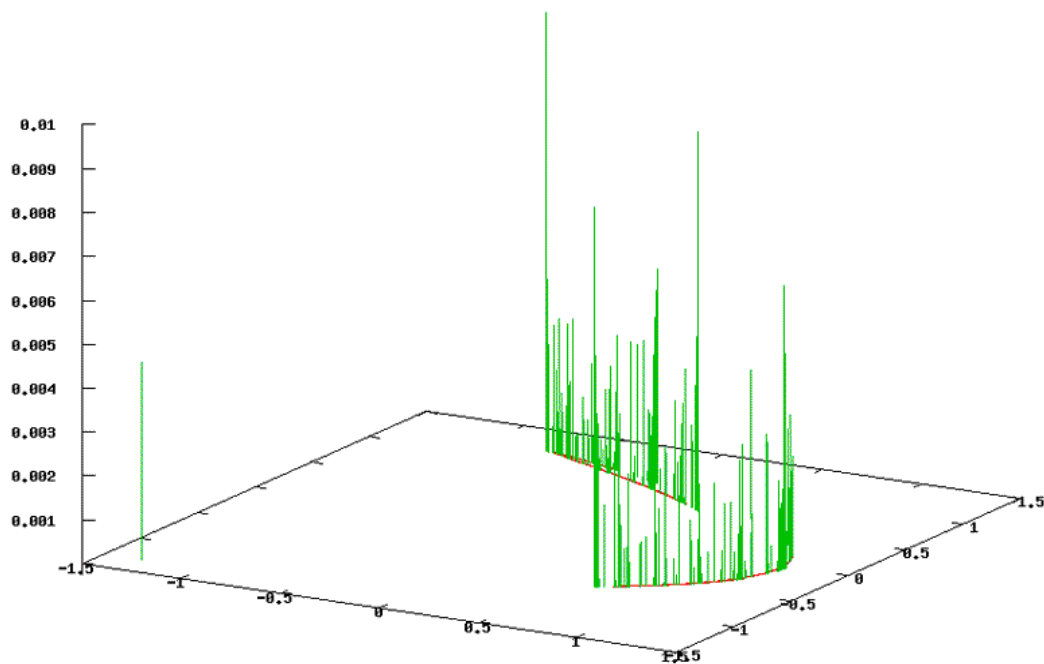


Рис. 2: Отображение Хенона при  $a = 1.2$ ,  $b = 0.2$ . Приближенный метод нахождения циклов.

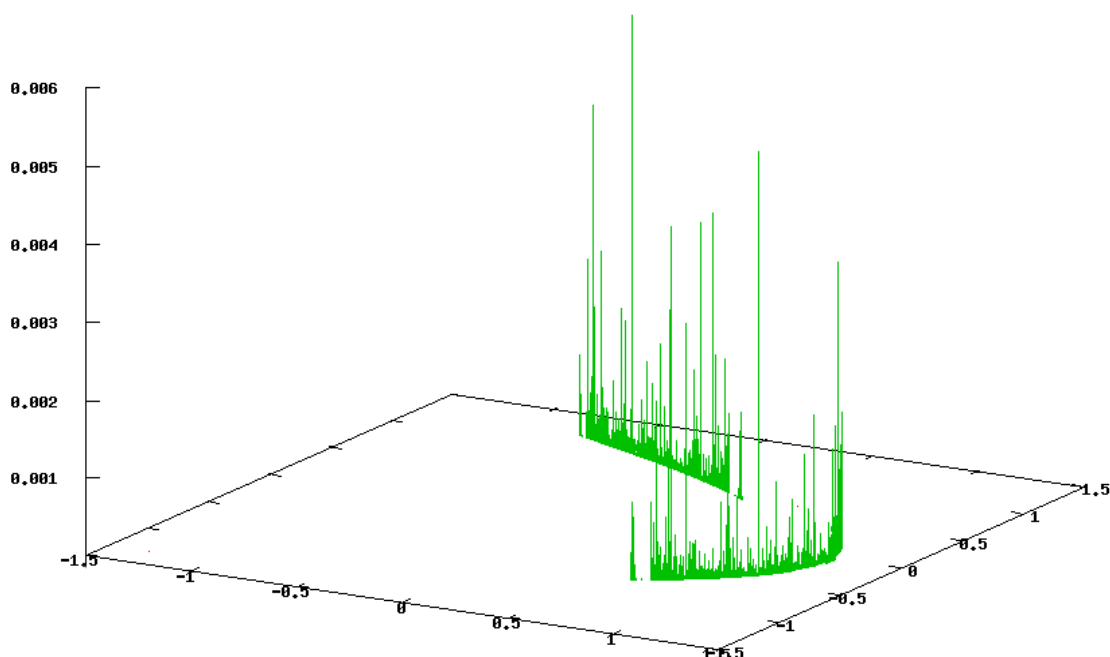


Рис. 3: Отображение Хенона при  $a = 1.2$ ,  $b = 0.2$ . Улучшенный метод нахождения циклов.

В работе [7] приводится результат приближенного построения так называемой меры Синая-Рюэля-Боуэна (SRB-меры) для отображения Хенона при рассмотренных параметрах. Метод построения основан на аппроксимации оператора Перрона-Фробениуса. На следующих рисунках показаны результаты построения инвариантной меры методом работы [7] и улучшенным методом поиска простых циклов.

## 8.2 Отображение Икеда [14]

Отображение Икеда возникает при моделировании оптических носителей (кристаллов) информации и имеет вид:

$$\tau(x, y) = C_1 - \frac{C_3}{1 + x^2 + y^2} \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d - C_2(x \cos \tau(x, y) - y \sin \tau(x, y)) \\ C_2(x \sin \tau(x, y) + y \cos \tau(x, y)) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где  $d = 2$ ,  $C_1 = 0.4$ ,  $C_2 = 0.9$ ,  $C_3 = 6$ .

Отображение обладает свойством сжатия площадей и имеет глобальный аттрактор  $A_g$ . В [14, 16] было показано, что при заданных параметрах это отображение имеет цепно-рекуррентное множество. Пусть  $M = [-10, 10] \times$

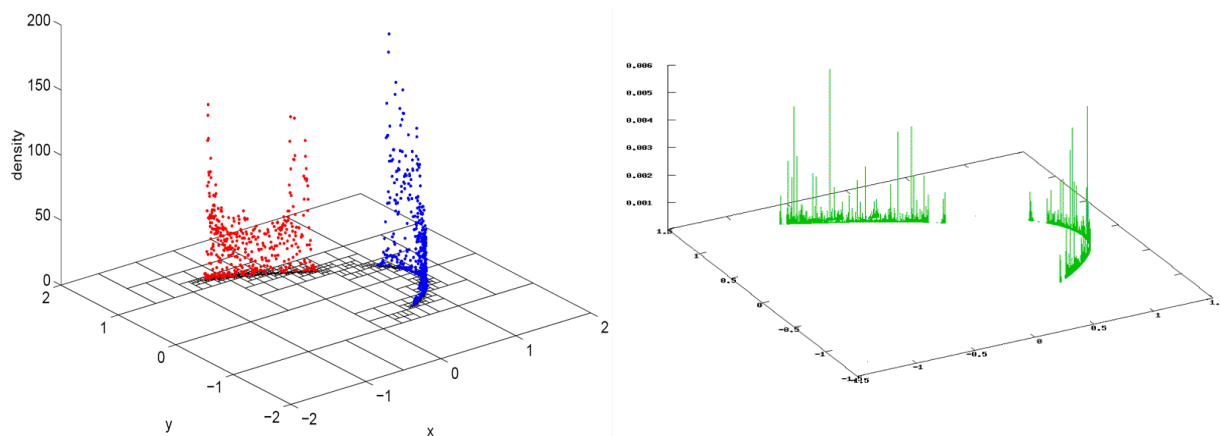


Рис. 4: Построение инвариантной меры для отображения Хенона: слева результат, полученный в [7], справа — метод поиска простых циклов.

$[-10, 10]$ . Проведем 9 шагов построения символического образа. Полученный символический образ состоит из двух компонент сильной связности с количеством вершин 44101 и 2 соответственно. Размеры ячейки составляют  $0.026 \times 0.026$ .

Распределение полученной меры показано на рис. 5.

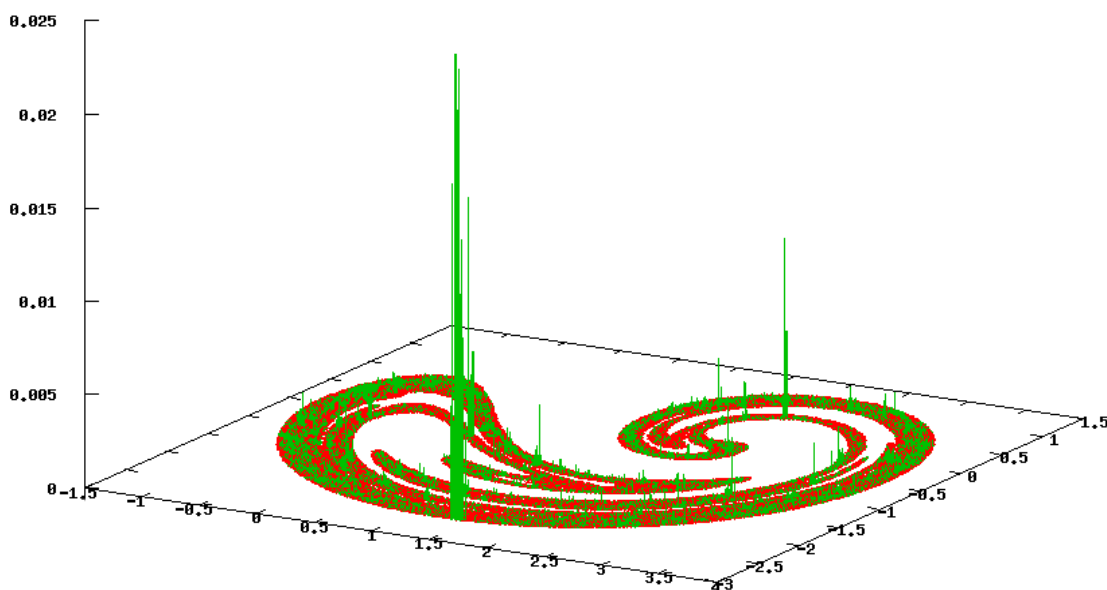


Рис. 5: Отображение Икеда. Улучшенный метод поиска циклов.

Рассмотрим отображение Икеда при тех же значениях параметров в области  $\Omega = [-1.1, 3.5] \times [-1.5, 1.8]$ . Как известно, [4] в этой области содержится

максимальное цепно-рекуррентное множество исходного отображения. Множество  $\Omega$  распадается на две компоненты  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , соответствующие двум компонентам сильной связности на символическом образе. Множество  $\Omega_1$  представляет собой периодическую орбиту периода 6, а  $\Omega_2$  является инвариантным множеством с нетривиальной фрактальной структурой [16]. Проведем 13 шагов построения символического образа. Полученный символический образ состоит из двух компонент сильной связности с количеством вершин 3823 и 47 соответственно. Размеры ячеек составляют  $0.00018 \times 0.00012$

На рис. 6 приведены результаты построения инвариантной меры в указанной области.

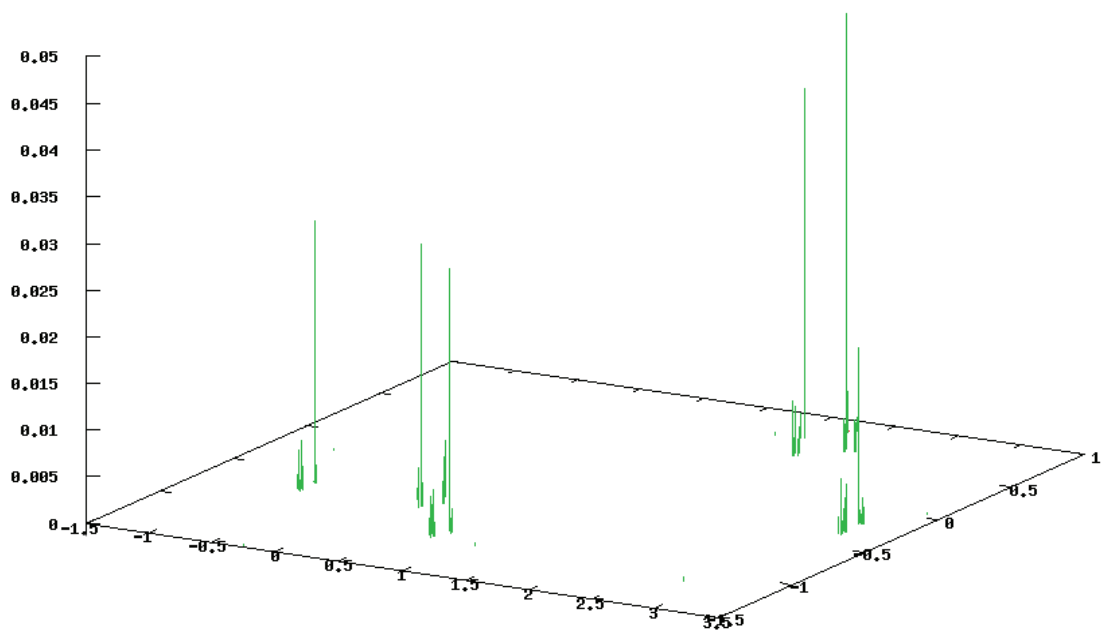


Рис. 6: Отображение Икеда в области  $\Omega$ . Улучшенный метод.

Приведенные примеры показывают, что при использовании приближенного метода (в зависимости от выбора начальной вершины) большое количество ребер может получить нулевую меру. Метод работает довольно быстро и может применяться для получения первого приближения к искомой мере.

Улучшенный метод поиска циклов требует гораздо больше времени, но практически все ребра получают ненулевой вес.

## Список литературы

- [1] Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. Москва 1999.
- [2] Осипенко Г.С. О символическом образе динамической системы. Граничные задачи. Сб. трудов, Пермь, 1983, 101-105.
- [3] Осипенко Г.С. Построение инвариантных мер и оценка энтропии динамических систем. Нелинейный динамический анализ-2007, 4-8 июня 2007, Санкт-Петербург, Тезисы докладов, с.379.
- [4] Осипенко Г.С., Романовский И.В., Ампилова Н.Б., Петренко Е. О вычислении спектра Морса. Проблемы Математического Анализа, Выпуск 27, Январь 2004, с. 151-169.
- [5] Петренко Е.И. Разработка и реализация алгоритмов построения символического образа. Эл. ж. Дифференциальные уравнения и процессы управления. <http://www.neva.ru/journal> т.3,2006.
- [6] Dellnitz Michael and Junge Oliver. On the approximation of complicated dynamical behaviour. SIAM Journal for Numerical Analysis, v. 36 (1999), no. 2, 491-515.
- [7] Michael Dellnitz and Oliver Junge. Set oriented numerical methods for dynamical systems.in Handbook of dynamical systems,v.2, Ed.B.Fiedler, 2002.
- [8] Jiu Ding and Aihui Zhou, Finite approximation of Frobenius-Perron operators, a solution of Ulam's conjecture to multi-dimensional transformation. Physica D, v. 92 (1992), no. 1-2, 61-66.
- [9] Douglas Lind, Brian Marcus. An introduction to symbolic dynamics and coding. Cambridge, 1995.
- [10] Froyland Gary. Approximating physical invariant measures of mixing dynamical systems in higher dimensions. Nonlinear Analysis, Methods and Applications, v.32 (1998), no. 7, 831-860.
- [11] Froyland G, Jung O, Ochs G. Rigorous computation of topological entropy with respect to a finite partition. Physica D 154 (2001), no. 1-2, 68-84.



- [12] Froyland Gary. On Ulam approximation of the isolated spectrum and eigenfunctions of hyperbolic maps. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, v. 17 (2007), no.3, 203-221.
- [13] Henon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Comm. Math.Phys.* v.50,69-77(1976).
- [14] Ikeda K. Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system. *Opt. Comm.* 1979, Vol.30, p.257-261.
- [15] Kryloff N, Bogollouboff N. La theorie generale de la mesure dans son application a l'etude das systemes dynamiques de la mecanique non lineaire. *Ann. Math.* v. 38 (1937), no. 1, 65-113.
- [16] Osipenko G. Numerical Explorations of the Ikeda mapping dynamics. *Electronic Journal of Differential Equations and Control Processes* (<http://www.neva.ru/journal>), Vol.2, 2004.
- [17] Osipenko George, *Dynamical systems, Graphs, and Algorithms*, Springer, 2007