ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2013
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Моделирование динамических систем

Динамика спроса и предложения

Г. С. Осипенко
Севастопольский институт банковского дела, Украина
george.osipenko@mail.ru

Е. К. Ершов
Санкт-Петербургский архитектурно-строительный университет, Россия
ershov@ee13858.spb.edu

1 Математическая модель

Динамика спроса и предложения будет моделироваться дискретной динамической системой. При этом, мы исходим из следующих предположений:

1) предложение возрастет, если спрос превышает предложение или цена товара имеет тенденцию к росту; предложение убывает, когда предложение превышает спрос или цена убывает;

2) цена товара возрастает, если спрос превышает предложение; цена убывает, когда предложение больше спроса;

3) спрос уменьшается, когда расходы на покупку превышают планируемые затраты; спрос возрастает, если планируемые расходы превышают реальную стоимость товара.

Пусть переменная x задает объем предложенного товара, переменная y задает цену и переменная z обозначает объем спроса на товар. Тогда величина $\min(x, z)$ задает объем товара, который продан (реализован), а произведение $y \min(x, z)$ определяет реальную стоимость покупки товара. Пусть H обозначает планируемую величину расходов на преобретение товара, а n является дискретным временем, т.е. n есть номер периода реализации спроса, предложения и продажи товара. Например, x_n обозначает объем предложенного товара в n-й период времени, а y_{n+1} обозначает цену на товар в $n+1$-й период времени.

Рассмотрим функцию

$$f(x,z) = \frac{z-x}{z+x},$$

которая является однородной функцией нулевой степени, т.е. $f(tx,tz) = t^0 f(x,z)$. Описанные переменные $x,\ y,\ z$ принимают положительные значения, тогда функция $f(x,z)$ меняется от -1 до $+1$. При этом значение функции $f(x,z) < 0$ при $z < x$ и значение функции $f(x,z) > 0$ при $z > x$. Величина

$$exp(a\frac{z-x}{z+x}),$$

при a>0, принимает значения от e^{-a} до e^{a}. При этом, $exp(af(x,z)) < 1$, если предложение превышает спрос $x > z$ и $\exp(af(x,z)) > 1$, если спрос превышает предложение $z > x$. Отношение y_n/y_{n-1} определяет тенденцию изменения цены при переходе от $n-1$-го периода к n-му периоду продажи. Таким образом, динамика предложения может быть записана в следующем виде

$$x_{n+1} = x_n(\frac{y_n}{y_{n-1}})^r \exp(a\frac{z_n - x_n}{z_n + x_n}),$$

где выражение $\exp(a\frac{z_n-x_n}{z_n+x_n})$ задает коэффициент изменения предложения на $(n+1)$-й период времени в зависимости от соотношения спроса и предложения в n-й промежуток времени. Отметим, что описанная зависимость определяет объем будущего предложения и, следовательно, объем производства товара. Коэффициент $a > 0$ определяет адаптацию системы на изменения спроса и предложения. Показатель r задает степень зависимости предложения от тенденции цены. Если предложение не зависит от изменения цены, то $r = 0$.

Зависимость цены от спроса и предложения определяется аналогичным образом, но с другим коэффициентом адаптации b и учетом того, что цена в $(n+1)$-й период времени зависит от спроса и предложения в этот же $(n+1)$-й период времени. Следовательно, динамика цены может быть записана в виде

$$y_{n+1} = y_n \exp(b\frac{z_{n+1} - x_{n+1}}{z_{n+1} + x_{n+1}}),$$

где $b > 0$ является соответствующим коэффициентом адаптации цены к изменению спроса и предложения. Описанная зависимость от времени создает определенные трудности в изучении динамики системы, так как уравнение содержит $(n+1)$-е время в левой и правой частях.

Спрос в $(n+1)$-й период времени определяется разностью между величиной планируемого расхода H и величиной реального расхода на покупку товара в n-й промежуток времени. Если планируемый расход H больше реального расхода, то спрос возрастает; если планируемый расход H меньше реального расхода, то спрос должен уменьшаться. Таким образом, динамика спроса может быть записана в виде

$$z_{n+1} = z_n \exp(c\frac{H - y_n \min(x_n, z_n)}{H + y_n \min(x_n, z_n)}),$$

где $c > 0$ есть коэффициентом адаптации спроса к изменению расходов.

Таким образом, мы получили следующую систему уравнений

$$x_{n+1} = x_n(\frac{y_n}{y_{n-1}})^r \exp(a\frac{z_n - x_n}{z_n + x_n}), \quad (1)$$

$$y_{n+1} = y_n \exp(b\frac{z_{n+1} - x_{n+1}}{z_{n+1} + x_{n+1}}), \quad (2)$$

$$z_{n+1} = z_n \exp(c\frac{H - y_n \min(x_n, z_n)}{H + y_n \min(x_n, z_n)}). \quad (3)$$

Так как второе уравнение содержит $(n+1)$-е время в левой и правой частях, то полученная система уравнений задает дискретную динамическую систему в неявном виде. Для получения разностных уравнений в явном виде надо значения x_{n+1} и z_{n+1} из первого и третьего уравнений подставить во второе и тогда мы получим стандартную дискретную динамическую систему.

2 Теоретические результаты

Сначала мы рассмотрим случай, когда предложение не зависит от изменения цены, т.е. $r = 0$. Полученная система (1,2,3) имеет кривую заполненную точками баланса (неподвижными точками). Точки баланса определяются равенствами

$$\begin{aligned} x &= z \\ H &= y \min(x, z). \end{aligned} \quad (4)$$

Исследование точек баланса осложняется тем, что функция $\min(x, z)$ не является гладкой в точках баланса $x = z$. Покажем, что через каждую точку баланса проходит поверхность, которую не покидают орбиты, т.е. инвариантная поверхность системы.

Рассмотрим функцию

$$U(x,y,z)=\frac{x^b}{y^a}\exp(ab\frac{z-x}{z+x}).$$

Утверждение 1. На любой орбите системы (1,2,3) функция $U(x,y,z)$ постоянна.

Доказательство. Из второго уравнения системы следует равенство

$$y_{n+1}\exp(-b\frac{z_{n+1}-x_{n+1}}{z_{n+1}+x_{n+1}})=y_n.$$

Возведем левую и правую части равенства в степень a, получим

$$y_{n+1}^a\exp(-ab\frac{z_{n+1}-x_{n+1}}{z_{n+1}+x_{n+1}})=y_n^a.$$

Возведем левую и правую части уравнения (1) в степень b, получим

$$x_{n+1}^b=x_n^b\exp(ab\frac{z_n-x_n}{z_n+x_n}).$$

Разделим полученное равенство на предыдущее и получим равенство

$$\frac{x_{n+1}^b}{y_{n+1}^a}\exp(ab\frac{z_{n+1}-x_{n+1}}{z_{n+1}+x_{n+1}})=\frac{x_n^b}{y_n^a}\exp(ab\frac{z_n-x_n}{z_n+x_n}). \tag{5}$$

Тогда равенство (5) можно записать в виде

$$U(x_{n+1},y_{n+1},z_{n+1})=U(x_n,y_n,z_n).$$

Это означает, что значение функции $U(x,y,z)$ не меняется при одной итерации и, следовательно, не меняется на всей орбите. Тогда поверхность уровня $U(x,y,z)=const$ задает поверхность, инвариантную для системы уравнений (1,2,3). Доказательство закончено.

Каждая поверхность уровня пересекает кривую баланса в одной точке. Действительно, из уравнений баланса (4) и равенства $U(x,y,z)=h$ следуют равенства

$$H=xy,\qquad h=\frac{x^b}{y^a}.$$

Отсюда однозначно определяются координаты неподвижной точки на поверхности уровня $U(x,y,z)=h$. Таким образом, система (1,2,3) имеет слоение с инвариантными слоями. При этом, на каждом слое существует единственное состояние равновесия. Можно показать, слоение $\{U(x,y,z)=h\}$ пересекает кривую баланса (4) трансверсально.

Существование функции $U(x,y,z)$ с описанными свойствами позволяет редуцировать трехмерную систему (1,2,3) к двумерной системе, исключая переменную y. Действительно, рассмотрим поверхность уровня $U(x,y,z)=h$, тогда мы имеем равенство

$$\frac{x^b}{y^a}\exp(ab\frac{z-x}{z+x})=h.$$

Найдем отсюда

$$y=(1/h)^{1/a}x^{b/a}\exp(b\frac{z-x}{z+x}).$$

Подставим это выражение в уравнение (3) и получим уравнение

$$z_{n+1}=z_n\exp(c\frac{H-(\frac{1}{h})^{1/a}(x_n)^{b/a}\exp(b\frac{z_n-x_n}{z_n+x_n})\min(x_n,z_n)}{H+(\frac{1}{h})^{1/a}(x_n)^{b/a}\exp(b\frac{z_n-x_n}{z_n+x_n})\min(x_n,z_n)}), \tag{6}$$

которое не содержит переменную цены y.

Утверждение 2. Система уравнений (1) и (6) для любых $H>0$ и $h>0$ эквивалентна системе уравнений

$$x_{n+1} = x_n\exp(a\frac{z_n-x_n}{z_n+x_n}), \tag{7}$$

$$z_{n+1} = z_n\exp(c\frac{1-(x_n)^{b/a}\exp(b\frac{z_n-x_n}{z_n+x_n})\min(x_n,z_n)}{1+(x_n)^{b/a}\exp(b\frac{z_n-x_n}{z_n+x_n})\min(x_n,z_n)}). \tag{8}$$

Доказательство. Уравнение (6) преобразуется к виду

$$z_{n+1}=z_n\exp(c\frac{1-\frac{1}{H}(\frac{1}{h})^{1/a}(x_n)^{b/a}\exp(b\frac{z_n-x_n}{z_n+x_n})\min(x_n,z_n)}{1+\frac{1}{H}(\frac{1}{h})^{1/a}(x_n)^{b/a}\exp(b\frac{z_n-x_n}{z_n+x_n})\min(x_n,z_n)}) \tag{9}$$

В системе уравнений (1) и (9) сделаем замену переменных

$$(x,z)\to(tx,tz),$$

где число t будет определено ниже. Такая замена не меняет уравнение (1). Уравнение (9) преобразуется к виду

$$z_{n+1}=z_n\exp(c\frac{1-\frac{1}{H}(\frac{1}{h})^{1/a}t^{(a+b)/a}(x_n)^{b/a}\exp(b\frac{z_n-x_n}{z_n+x_n})\min(x_n,z_n)}{1+\frac{1}{H}(\frac{1}{h})^{1/a}t^{(a+b)/a}(x_n)^{b/a}\exp(b\frac{z_n-x_n}{z_n+x_n})\min(x_n,z_n)}).$$

Выберем число $t > 0$ так, что

$$\frac{1}{H}(\frac{1}{h})^{1/a} t^{(a+b)/a} = 1.$$

Не трудно видеть, что такое t существует и единственно. При данном выборе t получим искомую систему уравнений. Доказательство закончено.

Следует отметить, что замена переменных, описанная в доказательстве, по существу является выбором единицы измерения спроса и предложения. Система уравнений (7,8) имеет неподвижную точку (1,1), которая является единственным балансом экономической системы.

3 Зависимость предложения от цены

Рассмотрим систему (1,2,3) при условии, что в первом уравнении параметр $r > 0$, т.е. предложение явно зависит от цены. При этом предложение увеличивается, если цена в предыдущий период возрасла и уменьшается в противном случае. Параметр $r > 0$ определяет степень зависимости предложения от цены.

Утверждение 3. Система уравнений (1,2,3) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \exp((a + rb)\frac{z_n - x_n}{z_n + x_n}), \qquad (10)\\ y_{n+1} &= y_n \exp(b\frac{z_{n+1} - x_{n+1}}{z_{n+1} + x_{n+1}}), \qquad (11)\\ z_{n+1} &= z_n \exp(c\frac{H - y_n \min(x_n, z_n)}{H + y_n \min(x_n, z_n)}). \qquad (12)\end{aligned}$$

Доказательство. В уравнение (1) входит выражение вида

$$(\frac{y_n}{y_{n-1}})^r.$$

Вычислим это выражение, исходя из второго уравнения, которое перепишем для n-го периода.

$$y_n = y_{n-1} \exp(b\frac{z_n - x_n}{z_n + x_n}).$$

Тогда искомое выражение будет иметь вид

$$(\frac{y_n}{y_{n-1}})^r = \exp(rb\frac{z_n - x_n}{z_n + x_n}).$$

Подставляя полученное выражение в первое уравнение, получим уравнение вида

$$x_{n+1} = x_n \exp((a + rb)\frac{z_n - x_n}{z_n + x_n}).$$

Утверждение доказано.

Из доказанного утверждения следует, что зависимость предложения от цены сводится к системе, где такой зависимости нет, но надо заменить параметр a на выражение вида $a + br$. Таким образом, достаточно изучать только системы, где предложение не зависит от цены.

Рис. 1: Устойчивое состояние баланса при $a = 1$, $b = 0.5$, $c = 1$.

4 Численные эксперименты

Эта секция посвящена изучению динамики системы в зависимости от значений адаптивных параметров a, b и c. При подготовки этой секции использовались алгоритмы и компьютерные программы описанные в монографиях [4] и [5]. Прежде всего, отметим, что при малых значениях a, b и c система уравнений (7,8) имеет устойчивый баланс (1;1), см. рис. 1. В дальнейшем при увеличении значений параметров a, b и c состояние равновесия (1;1) теряет устойчивость и одновременно появляется устойчивая 3-периодическая орбита. Так при $a = 2,5$, $b = 1,5$, $c = 2,3$ (см. левый рисунок 2) баланс (1;1) является неустойчивым и 3-периодическая устойчивая орбита P порождена итерацией точки $(1,7305; 1,8706)$. Более того, 3-периодический режим P является орбитой притяжения для любой орбиты кроме баланса. Это означает, что на практике, начиная с любого начального состояния, мы будем наблюдать после некоторого времени только 3-периодический режим P. Аналогичная динамика имеет место при $a = 2,5$, $b = 1,5$, $c = 2,5$.

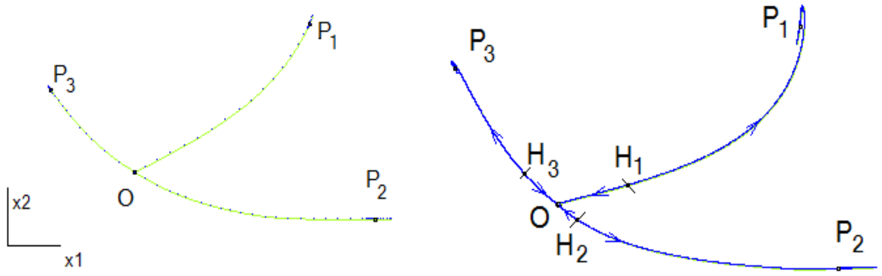

Рис. 2: Неустойчивый баланс O и 3-периодическая устойчивая орбита P при $a = 2,5$, $b = 1,5$, $c = 2,3$. Устойчивое баланс O, неустойчивое многообразие $W^u(H)$ 3-периодической гиперболической орбиты H и 3-периодическая устойчивая орбита P при $a = 2,5$, $b = 2$, $c = 2,5$.

При увеличении значения параметра b возникают следующих бифуркации: от баланса O отделяется гиперболическая 3-периодическая орбита H, а сам баланс становится устойчивым, см. правый рис. 2. Глобальный аттрактор A формируется из замыкания неустойчивого многообразия $W^u(H)$ гиперболической орбиты H. В этом случае предельным режимом динамики может быть либо устойчивый баланс O, либо устойчивый 3-периодический режим P, в зависимости от начального условия $(x_0; z_0)$. С теоретической точки зрения, есть возможность приближаться к гиперболической орбите H, выбрав начальную точку на ее устойчивом многообразии $W^s(H)$, но практически осуществить такой выбор не реально. Гиперболическая орбита H порождена итерацией точки $(1,3741; 1,1532)$ при $a = 2,5$, $b = 2$, $c = 2,5$.

В ходе дальнейшего увеличения параметров возникают новые бифуркации. Так при $a = 3,2$, $b = 2,5$, $c = 2,5$ состояние равновесия $O(1; 1)$ теряет устойчивость и вблизи нее появляется 2-периодическая устойчивая орбита Q точки $(1,2813; 1,0172)$, см. рис. 3. Существует инвариантная кривая $A_0 = \{Q_1 \leftarrow O \rightarrow Q_2\}$ от токи O до орбиты Q, по которой орбиты идут от баланса к устойчивой 2-периодической орбите Q. Кривая A_0 является аттрактором. Имеется 3-периодическая гиперболическая орбита H точки $(3,9442; 2,2019)$, неустойчивое многообразие $W^u(H)$ которой одним концом наматывается на аттрактор A_0, а другим концом стремится к устойчивой 3-периодической орбите P точки $(3,8322; 3,3089)$. Замыкание неустойчивого многообразия $W^u(H)$ дает глобальный аттрактор A, внутри которого лежит аттрактор A_0, см. рис. 3.

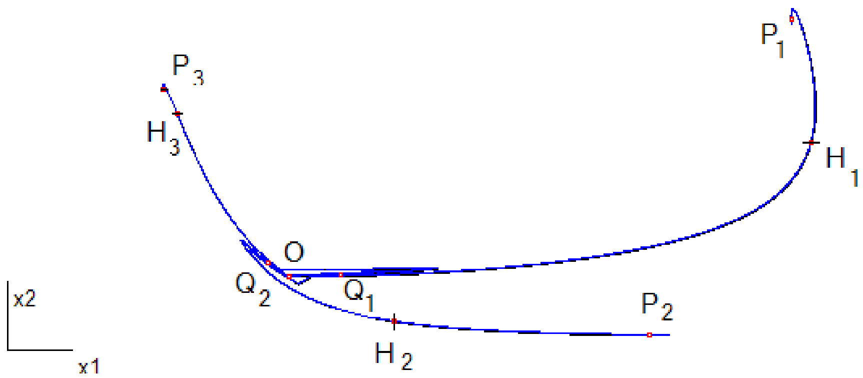

Рис. 3: Неустойчивый баланс O, устойчивая 2-периодическая орбита Q, неустойчивое многообразие $W^u(H)$ 3-периодической гиперболической орбиты H и 3-периодическая устойчивая орбита P при $a = 3,2$, $b = 2,5$, $c = 2,5$

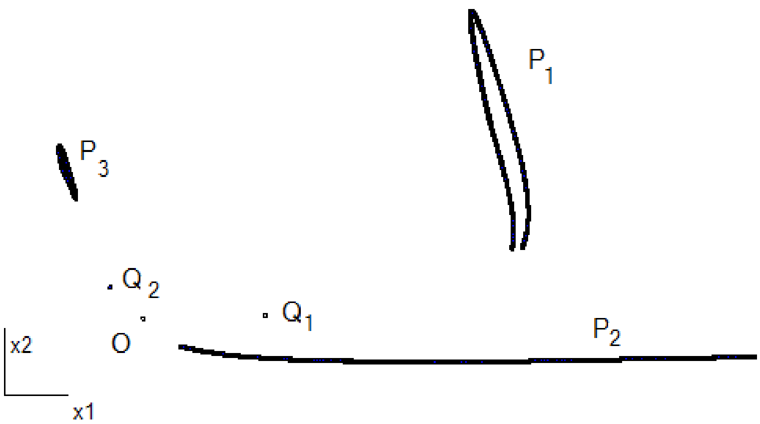

Рис. 4: Неустойчивый баланс O, устойчивая 2-периодическая орбита Q и 3-периодическая устойчивый хаотический аттрактор P при $a = 3,2$, $b = 2,5$, $c = 2,8$

Рис. 5: Неустойчивый баланс и глобальный хаотический аттрактор при $a = 3,5$, $b = 2$, $c = 3,5$.

Описанная структура вложенных аттракторов

$$((Q \subset A_0) \bigcup P) \subset A$$

порождает фильтрацию [3], которая является устойчивой относительно малых возмущений системы. Описанная структура аттракторов сохраняется при многих параметрах a, b и c. При этом топология каждого из аттракторов может меняться. Можно сказать, что аттрактор A_0 рождается из устойчивой 2-периодической орбиты и он, как правило, имеет достаточно малые размеры. Аттрактор A рождается из неустойчивого многообразия 3-периодической гиперболической орбиты. Если параметр c увеличить до 2,8, то на месте устойчивой периодической орбиты P появляется 3-периодическая устойчивый хаотический аттрактор A_1, см. рис. 4. Аттрактор A_1 появляется в результате бифуркации устойчивой 3-периодической орбиты P.

Напомним, что энтропия E динамической системы является мерой ее хаотичности. Мы оценили энтропию динамической системы на аттракторе A_1 как показатель роста длины кривой при ее итерации [2]. Эта оценка составила $E = 0,382$.

При дальнейшем изменении параметров происходит слияние всех описанных аттракторов в один аттрактор. Для описания величины аттракторов мы будем использовать координаты точек наиболее удаленных от состояния равновесия $(1; 1)$. Так когда параметры адаптации принимают значения $a = 3,5$, $b = 2$, $c = 3,5$, глобальный хаотический аттрактор имеет очень большие размеры, см. рис. 5. В этом случае крайняя точка глобального (большего) аттрактора имеет координаты $(54,9;\ 0,85)$. Оценка энтропии составила $E = 0,269$.

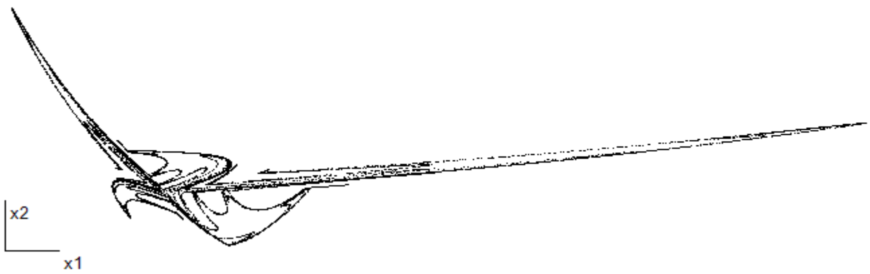

Рис. 6: Малый хаотический аттрактор при $a = 3$, $b = 1,78$, $c = 3,5$.

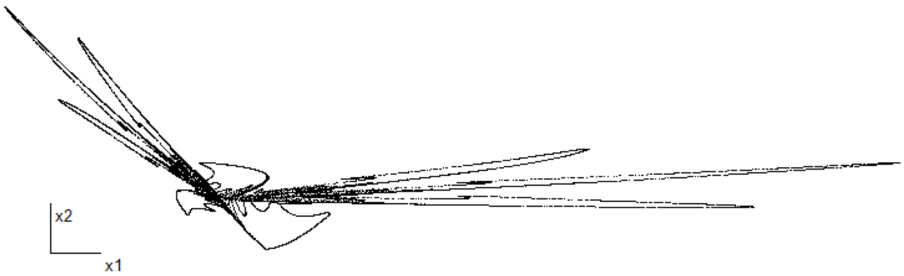

Рис. 7: Неустойчиввый баланс и малый хаотический аттрактор при $a = 3$, $b = 2$, $c = 3,6$.

Если параметры принимают значения $a = 3$, $b = 1,8$ $c = 3,5$, баланс $(1;1)$ является неустойчивым, существует 5-периодическая орбита P, которая является устойчивой. Орбита P порождается итерацией точки $(1,8822;1,1475)$. Все орбиты (кроме баланса) стремятся к P, такие орбиты имеют достаточно сложную структуру.

Динамика системы очень чувствительна к изменению параметров. Так при $a = 3$, $b = 1,78$, $c = 3,5$ система допускает глобальный (большой) хаотический аттрактор, в котором лежит малый аттрактор, см. рис. 6. Оценка энтропии на нем составила $E = 0,108$. При этом состояние равновесия является неустойчивым балансом. Если $a = 3$, $b = 2$, $c = 3.5$, то хаотический аттрактор исчезает. Но при $a = 3$, $b = 2$, $c = 3,6$ снова появляется нетривиальный глобальный хаотический аттрактор, внутри которого лежит малый аттрактор, см. рис. 7. Оценка энтропии на нем составила $E = 0,04$. Энтропия на большом аттракторе оценивается как $E = 0,312$.

Рис. 8: Средний хаотический аттрактор $A_1 \subset A$ при $a = 4$, $b = 2$, $c = 3$.

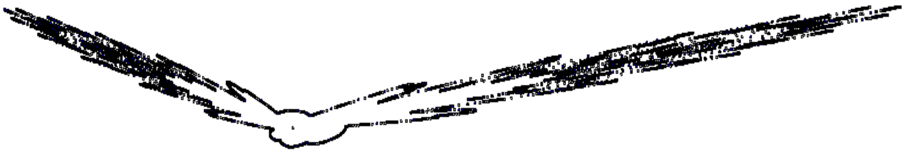

Рис. 9: Неустойчивое состояние равновесия и малый аттрактор $A_0 \subset A_1 \subset A$ при $a = 4$, $b = 1,98$, $c = 3$.

Если параметры принимают значения $a = 4$, $b = 2$, $c = 3$, то глобальный хаотический аттрактор A достигает больших размеров, крайняя точка которого имеет координаты $(28,4;\ 0,9)$. В аттракторе A лежит меньший аттрактор $A_1 \subset A$, см. рис. 8. Крайняя точка данного аттрактора имеет координаты $(3,5;\ 1,5)$. Оценка энтропии на нем составила $E = 0,161$. Внутри этого аттрактора лежит малый аттрактор A_0, см. рис. 9. Он расположен достаточно близко к балансу $(1;1)$ и его крайняя точка имеет координаты $(1,07;\ 1,02)$. Оценка энтропии на нем составила $E = 0,0008$. Можно сказать, что хаотичность данного аттрактора является очень низкой и находится в пределах допустимой ошибки.

Список литературы

[1] Лебедев В.В., Лебедев К.В. (2011) *Математическое моделирование нестационарных экономических процессов.* изд. "еТест Москва.

[2] Newhouse S. and Pignataro T. (1993) On the estimation of topological entropy. *Journal of Statistical Physics,* 72, pp. 1331-1351.

[3] Z. Nitecki, M. Shub (1975) Filtrations, decompositions, and explosions. *Amer. J. of Math.* v. 97, no. 1029-1047.

[4] Осипенко Г.С., Ампилова Н.Б. (2005) *Введение в символический анализ динамических систем.* изд. С.-Петербургского университета.

[5] Osipenko G. (2007) *Dynamical systems, Graphs, and Algorithms.* Lectures Notes in Mathematics, 1889. Berlin, Springer.

[6] G. S. Osipenko, T. N. Korzh, E. K. Ershov. (2012) Dynamics of price-level, national income and cost of money interaction. *Международная конференция "Моделирование, управление и устойчивость MCS-2012". 10-14 сентября 2012 г., Севастополь, Крым*, p. 158-159.