ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 2, 2010
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.newa.ru/journal
http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Дифференциально-разностные уравнения
Управление в нелинейных и сложных системах

АЛЬТЕРНАТИВА В МИНИМАКСНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ СБЛИЖЕНИЯ – УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В.Л. Пасиков

Россия, 462403, Орск, ул. Школьная, д.18, кв. 20,
Орский гуманитарно-технологический институт
(филиал Оренбургского государственного университета),
кафедра математического анализа и информатики,
e-mail: klebi_2@mail.ru

Для конфликтно управляемой дифференциальной системы с запаздыванием изучена динамическая игра сближения – уклонения относительно функционального целевого множества. В работе не предполагается относительно правой части системы выполнения условия седловой точки. При доказательстве теорем о сближении и уклонении используется норма гильбертова пространства.

For a conflict – controlled differential system with a lag the dynamic game of approaching and deviation relative to the functional goal set is studied here. It is not supposed in the paper that conditions of the saddle point are met. Proving the theorem on approaching and deviation the Hilbert space norm is used.

Ключевые слова: дифференциальная игра, последействие, норма, позиционная процедура, гильбертово пространство, альтернатива, уклонение.
Keywords: differential game, aftereffect, norm, positional procedure, Hilbert space, alternative, deviation.

Предлагаемые методы исследования опираются на концепцию позиционной дифференциальной игры, разработанную под руководством академика Н.Н. Красовского [1-10] и модифицированную в [11, 12].

Рассматривается конфликтно-управляемая система с последействием

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x[t+s], u, v), \qquad x[t_0 + s] = x_0(s). \tag{1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор системы (1); r_1 — мерный вектор u и r_2 — мерный вектор v — управляющие воздействия, выбором которых распоряжаются первый и второй игроки, соответственно, которые стеснены ограничениями

$$u \in P,\ v \in Q \tag{2}$$

P,Q — компакты в евклидовых пространствах R^{r_1}, R^{r_2}; f — векторный функционал определенный и непрерывный на произведении $[t_0,\theta]\times B_\tau \times P\times Q$, где B_τ любое из пространств $C_{[-\tau,0]}$ или H_τ; $C_{[-\tau,0]}$ - пространство непрерывных n-мерных функций x(s), $s\in[-\tau,0]$, с нормой $\|x(s)\|_2 = \max\limits_{s\in[-\tau,0]}\|x(s)\|_1$, $\|x(s)\|_1 = (x(s),x(s))^{\frac{1}{2}}$ — евклидова норма в n-мерном пространстве; H_τ — гильбертово пространство n-мерных функций x(s) с нормой $\|x(s)\|_3 = (\|x(0)\|_1^2 + \int\limits_{-\tau}^{0}\|x(s)\|_1^2 ds)^{\frac{1}{2}}$, $\tau>0$ [4].

Функционал f(t,x(s),u,v) удовлетворяет для любого ограниченного множества $\Omega\subset C_{[-\tau,0]}$ условию Липшица по x(s) и следующему условию роста: $\|f(t,x(s)u,v)\|_1 \le \xi_1(t)+\xi_2(t)\|x(s)\|_2$, равномерно по $u\in P$, $v\in Q$, где $\xi_1(t),\xi_2(t)$ неотрицательные суммируемые на $[t_0,\theta]$ функции. Каковы бы ни были начальные значения $t_*\in[t,\theta]$, $x_{t_*}[s]\in C_{[-\tau,0]}$ и измеримые реализации u[t], v[t] удовлетворяющие (2), указанные выше ограничения на правую часть системы (1) гарантируют существование и продолжимость на $[t_*,\theta]$ решения задачи Коши в смысле Каратеодори [4,7,10].

Отрезок $x_t[s]=x[t+s]$, $s\in[-\tau,0]$, траектории системы (1) называется состоянием системы в момент t, $t\in[-t_0,\theta]$. Пару $p=\{t,x_t[s]\}$ будем называть позицией игры в момент t, $p_0=\{t_0,x_{t_0}[s]\}$ - начальная позиция.

Рассматриваемая задача сближения состоит в следующем. В фазовом пространстве системы (1) задано некоторое замкнутое множество $M\subset H_\tau$, а также начальная позиция $p_0=\{t_0,x_0(s)\}$. В задаче о сближении, стоящей перед первым игроком, требуется обеспечить попадание движения x[t] системы (1) в момент θ на замкнутое множество M. Решение задачи о сближении получено в классе позиционных процедур управления первого игрока разработанных в [1-10], а также [11, 12]. В работе эти процедуры распространены на дифференциальные системы с последействием, вообще говоря, нелинейные, с использованием нормы гильбертова пространства.

Введем обозначения

$$\rho(t,x_t[s],l)=\max_{u\in P}\min_{v\in Q}(l,f(t,x_t[s],u,v)), \tag{3}$$

$$F(t,x_t[s])=co\{f : f = f(t,x_t[s],u,v), u\in P, v\in Q\}, \tag{4}$$

$$F_l(t,x_t[s])=\{f:(l,f)\le\rho(t,x_t[s],l), f\in F(t,x_t[s])\}, \tag{5}$$

$$S=\{l: l\in R^n, \|l\|_1=1\}, \tag{6}$$

где символ $co\{f\}$ означает выпуклую оболочку множества векторов $\{f\}$.

Для любых двух моментов t_*, $t^*\in[t_0,\theta]$, $t_*<t^*$, символом $Y_l(t^*,t_*,y_*(s))$ обозначим множество всех отрезков $y_{t^*}[s]=y[t^*+s]$, $y_{t^*}[s]\in C_{[-\tau,0]}$, в которые переходят в момент t^* решения y[t], $t\in[t_*,t^*]$, включения

$$\frac{dy(t)}{dt}\in F_l(t,y[t+s]) \tag{7}$$

с начальным условием $y_{t_*}[s]=y[t_*+s]$.

Пусть каждому $t\in[t_0,\theta]$ поставлено в соответствие непустое множество $W_t=\{y[t+s]\}=\{y_t[s]\}$, $y_t[s]\in B_\tau$. Зафиксируем число $\xi\in[-\tau,0]$. Множество $W_{t\xi}=\{y_t(\xi): y_t(s)\in W_t\}$ назовем ξ -

сечением множества W_t. Последовательность $\{y^{(k)}(\xi)\}$, где $y^{(k)}(s)\in B_\tau$, будем называть ξ-сечением последовательности $\{y^{(k)}(s)\}$.

Определение 1. Система множеств W_t, $t\in[t_0,\theta]$, называется минимаксно u-стабильной, если для любых двух моментов t_*, $t^*\in[t_0,\theta]$, $t_*<t^*$, любого отрезка $y_{t_*}[s]\in W_{t_*}$ и любого вектора $l\in S$, имеет место соотношение

$$W_{t^*}\cap Y_l(t^*,t_* y_{t_*}[s])\neq\varnothing. \tag{8}$$

В [11,12] доказано следующее утверждение.

Лемма 1. Если $\{W_t\}$, $t\in[t_0,\theta]$, минимаксно u-стабильная система множеств W_t, то ее замыкание в $C[t_0,\theta]$ система $\overline{\{W_t\}}$ так же минимаксно u-стабильна.

Обозначим символом $U_l=U_l(t,x_t[s])$ множество всех значений $u_l=u_l(t,x_t[s])\in P$ удовлетворяющих равенству

$$\min_{v\in Q}(l,f(t,x_t[s],u_l,v))=\rho(t,x_t[s],l) \tag{9}$$

Положим

$$r(x_t(s),W_t)=\inf_{y_t(s)\in W_t}\|y_t(s)-x_t(s)\|_3. \tag{10}$$

Пусть для данного $x_t[s]$ последовательность $\{y_t^{(k)}[s]\}$ является минимизирующей для (10). Составим множество предельных точек последовательности $\{y^{(k)}(0)\}$, являющейся 0-сечением последовательности $\{y_t^{(k)}[s]\}$. $Z(x_t(0))$ - совокупность элементов этого множества, ближайших к $x_t(0)$ в R^n; Γ_j – некоторое разбиение промежутка $[t_0,\theta]$ моментами $\tau_i(i=\overline{0,N};\tau_0=t_0,\tau_N=\theta)$, δ_j- диаметр разбиения Γ_j.

Определение 2. Аппроксимационным движением системы (1), порожденным позиционной процедурой управления первого игрока с начальным состоянием $p_0=\{t_0,x_{t_0}[s]\}$ назовем всякую абсолютно непрерывную вектор-функцию $x[t]_{\Delta_j}=x[t,p_0,\Gamma_j]$, удовлетворяющую на каждом полуинтервале $[\tau_i,\tau_{i+1})$ разбиения Γ_j, $j\in N$, почти всюду включению

$$\frac{dx(t)_{\Delta_j}}{dt}\in F(t,x_t[s]_{\Delta_j},u_{l_{[\tau_i]}}) \tag{11}$$

$F(t,x,u_{l_{[\tau_i]}})=co\{f: f=f(t,x,u_{l_{[\tau_i]}},v),v\in Q\}$ с начальным условием $x_{\tau_i}[s]_{\Delta j}=x[\tau_i+s]_{\Delta j}$,

$$u_{l_{[\tau_i]}}\in U_{l_{[\tau_i]}}(\tau_i,x_{\tau_i}[s]),\quad l_{[\tau_i]}=\begin{cases}\dfrac{s_{\tau_i}}{\|s_{\tau_i}\|_1}, \textit{если}\quad s_{\tau_i}\neq 0,\\ \textit{произвольному}\quad l\in S\quad \textit{если}\quad s_{\tau_i}=0,\end{cases}\qquad s_{\tau_i}=y_{\tau_l}[0]_{\Delta j}-x_{\tau_i}[0]_{\Delta j},$$

$y_{\tau_i}[0]_{\Delta_j}$ — элемент множества $Z(x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j})$.

Определение 3. Движением системы (1) с начальным условием $x_0[s]=x[t_0+s]$, порожденным позиционной процедурой управления первого игрока назовем абсолютно непрерывную вектор-функцию $x[t]=x[t,p_0]$, $t\in[t_0,\theta]$, для которой найдется последовательность аппроксимационных движений $x[t]_{\Delta j}=x[t,p_0,\Gamma_j]$, $t\in[t_0,\theta]$, равномерно по t на отрезке $[t_0,\theta]$ удовлетворяющая соотношению

$$x[t]=\lim_{j\to\infty}x[t]_{\Delta j}.$$

Здесь последовательность $\{\delta_j\}$, диаметров разбиений Γ_j для которой $\lim\limits_{j\to\infty}\delta_j=0$.

Известно [4], что множество движений системы (1), определенное таким образом, не пусто. Как и в случае отсутствия эффекта последействия [1], существование движений x[t] непосредственно проверяется предельным переходом от соответствующих аппроксимационных движений [4,5].

Уточним постанову задачи. Пусть r(x, M) — расстояние в H_τ от отрезка $x[\theta+s]$ до множества M.

Определение 4. При заданной начальной позиции игры p_0, позиционная процедура управления первого игрока гарантирует встречу движений $x[t]=x[t,p_0]$ с целью M в момент θ, если

$$r(x[\theta+s],M)=0,$$

где x[t] — любое движение $x[t,p_0]$.

Ниже рассматриваются достаточные условия разрешимости задачи сближения с целевым множеством M. Все рассуждения проводятся по плану соответствующих доказательств из [1, 6-10], а также [11-12]. Отметим, что для случая пространства $C_{[-\tau,0]}$ задача исследована в [11-12]. Поэтому здесь рассматриваются лишь вопросы, относящиеся к пространству H_τ.

Теорема 1. Пусть на промежутке $[t_0,\theta]$ задана минимаксно u-стабильная система $\{W_t\}$ множеств W_t, $t\in[t_0,\theta]$, причем $M\supset W_\theta$.

Если начальная позиция игры $p_0=\{t_0,x_0(s)\}$ удовлетворяет условию $r(x_0(s),W_{t_0})=0$, то позиционная процедура управления первого игрока гарантирует встречу движений $x[t]=x[t,p_0]$ системы (1) с целью M в момент θ.

Сформированная теорема вытекает из следующий леммы, доказательство которой проводится как и в [11,12] по плану доказательства леммы 2.1 работы [6].

Лемма 2. Если начальная позиция игры $p_0=\{t_0,x_0(s)\}$, такова что $r(x_0(s),W_{t_0})=0$ и система множеств W_t, $t\in[t_0,\theta]$, минимаксно u-стабильна, то позиционная процедура управления первого игрока удовлетворяет условию

$$r(x_t[s],W_t)=0,\ t\in[t_0,\theta], \tag{12}$$

где x[t] — любое движение $x[t,p_0]$.

Доказательство. Предположим, что система множеств W_t, $t\in[t_0,\theta]$, минимаксно u-стабильна и пусть $r(x_0(s),W_{t_0})=0$. Рассмотрим произвольно выбранное движение $x[t]=x[t,p_0]$ на $[t_0,\theta]$, порожденное позиционной процедурой управления первого игрока. По определению этого движения существует последовательность функций $\{x[t]_{\Delta j}\}=\{x[t,p_0,\Gamma_j]\}$, равномерно сходящаяся на $[t_0,\theta]$ к x[t]. Справедливость соотношения (12) будет, очевидно, показана, если установлено, что для любого ε > 0, отрезок $x_t[s]_{\Delta_j}$ любой функции $x[t]_{\Delta j}$ с достаточно большим номером j содержится в ε-окрестности W_t^ε множества W_t в смысле нормы H_τ каково бы ни было $t\in(t_0,\theta]$. Для этого выберем из последовательности $\{x[t]_{\Delta j}\}$ произвольным образом функцию x[t] и построим вдоль нее оценку величин $\varepsilon_\Delta^2[\tau_{i+1}]$ через величины $\varepsilon_\Delta^2[\tau_i]$ и δ. Здесь и далее $\varepsilon_\Delta[t]=\inf r(x[t],W_t)$ в смысле нормы H_τ.

Пусть $y_{\tau_i}[0]_{\Delta_j}$ - элемент множества $Z(x_{\tau_i}[0]_{\Delta j})$ определяющий при $t=\tau_i$ согласно (9) управление $u_{l[\tau_i]}$. Не нарушая общности считаем, что сечение $\{y_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta_j}\}$ порождающее вектор $y_{\tau_i}[0]_{\Delta_j}$ для некоторого j сходится к $y_{\tau_i}[0]_{\Delta_j}$. Здесь $\{y_{\tau_i}^{(\kappa)}[0]_{\Delta_j}\}$ минимизирующая для (10) последовательность.

Рассмотрим позицию $p(k,i)=\{\tau_i,y_{\tau_i}^{(k)}[s]_{\Delta_j}\}$. В силу минимаксной u-стабильности системы множеств W_t, $t\in[t_0,\theta]$, среди движений $y^{(k)}[t]_{\Delta_j}=y[t,p(k,i),\Gamma_j]$ есть движение со свойством [6]

$$y^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta_j} \in W_{\tau_{i+1}}. \tag{13}$$

По определению величины $\varepsilon_{\Delta}[t]$ с учетом (13) имеет оценку

$$\varepsilon^2_{\Delta}[\tau_{i+1}] \le \left\| y^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta_j} - x_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta_j} \right\|_3^2 = \left\| y^{(k)}_{\tau_{i+1}}[0]_{\Delta_j} - x_{\tau_{i+1}}[0]_{\Delta_j} \right\|_1^2 +$$
$$+ \int_{-\tau}^{0} \left\| y^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta_j} - x_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta_j} \right\|_1^2 ds. \tag{14}$$

Отрезки, $x_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta j}\, y^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta_j}$ траекторий $x[t]_{\Delta_j}$, $y^{(k)}[t]_{\Delta_j}$ могут быть представлены [4,5] в следующем виде (считаем что $\tau_{i+1} - \tau_i \le \tau$, $\alpha_i(t) = t - \tau_i$, $\alpha_i = \tau_{i+1} - \tau_i$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$)

$$x_t[s]_{\Delta_j} = \begin{cases} x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} + \int\limits_{\tau_i}^{t+s} f[\xi]d\xi, & -\alpha_i(t) \le s \le 0, \\ x_{\tau_i}[s + \alpha_i(t)], & -\tau \le s \le -\alpha_i(t), \end{cases} \tag{15}$$

$$y^{(k)}_t[s]_{\Delta_j} = \begin{cases} y^{(k)}_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} + \int\limits_{\tau_i}^{t+s} f_{l_{[\tau_i]}}[\xi]d\xi & -\alpha_i(t) \le s \le 0, \\ y^{(k)}_{\tau_i}[s + \alpha_i(t)], & -\tau \le s \le -\alpha_i(t), \end{cases} \tag{16}$$

здесь $f[t]$, $f_{l_{[\tau_i]}}[t]$ суммируемые функции удовлетворяющие при почти всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ включениям $f[t] \in F(t, x_t[s], u_{l_{[\tau_i]}})$, $u_{l_{[\tau_i]}} \in U_{l[\tau_i]}(\tau_i, x_{t_i}[s]_{\Delta_j})$, $f_{l_{[\tau_i]}}[t] \in F_{l_{[\tau_i]}}(t, y^{(k)}_t[s]_{\Delta_j})$.

Подставляем (15), (16) в (14)

$$\left\| y^{(k)}_{\tau_{i+1}}[0]_{\Delta_j} - x_{\tau_{i+1}}[0]_{\Delta_j} \right\|_1^2 + \int_{-\tau}^{0} \left\| y^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta_j} - x_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta_j} \right\|_1^2 ds =$$
$$= \left\| y^{(k)}_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} - x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_{l[\tau_i]}[\xi]d\xi - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi]d\xi \right\|_1^2 +$$
$$+ \int_{-\tau}^{0} \left\| y^{(k)}_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} - x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} f_{l_{[\tau_i]}}[\xi]d\xi + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} f[\xi]d\xi \right\|_1^2 ds \tag{17}$$

Будем оценивать первое слагаемое в правой части (17)

$$\left\| y^{(k)}_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} - x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_{l_{[\tau_i]}}[\xi]d\xi - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi]d\xi \right\|_1^2 =$$
$$= \left\| y^{(k)}_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} - x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} \right\|_1^2 + 2(y^{(k)}_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} - x_i[0]_{\Delta_j})(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_{[\tau_i]}[\xi]d\xi -$$
$$- \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi]d\xi) + (\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_{l_{[\tau_i]}}[\xi]d\xi - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi]d\xi)^2. \tag{18}$$

Согласно теореме Каратеодори [1], вектор $f(t)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, записывается в виде

$$f[t]=\sum_{\mu=1}^{n+1}\alpha_t^{(\mu)} f(t,x_t[s]_{\Delta_j},u_{l_{[\tau_i]}},v_t^{(\mu)})\,. \tag{19}$$

$$0\le\alpha_t^{(\mu)},\quad \sum_{\mu=1}^{n+1}\alpha_t^{(\mu)}=1,\quad u_{l[\tau_i]}\in U(\tau_i,x_{\tau_i}[s]_{\Delta_j}),\quad v_t^{(\mu)}\in Q\,.$$

Обозначим $s_{\tau_i}^{(k)}=y_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta_j}-x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j}$, $l_{[\tau_i]}^{(k)}=\dfrac{s_{\tau_i}^{(k)}}{\left\|s_{\tau_i}^{(k)}\right\|_1}$.

Отсюда имеем:

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\sum_{\mu=1}^{n+1}\alpha_\xi^{(\mu)}(l_{[\tau_i]}^{(k)}, f(\xi,x_\xi[0]_{\Delta_j}u_{l_{[\tau_i]}},v_\xi^{(\mu)}))d\xi=\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\sum_{\mu=1}^{n}\alpha_\xi^{(\mu)}(l_{[\tau_i]}^{(k)}, f(\tau_i,x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j}u_{l_{[\tau_i]}},v_\xi^{(\mu)}))d\xi+$$

$$+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\sum_{\mu=1}^{n+1}\alpha_\xi^{(\mu)}(l_{[\tau_i]}^{(k)}, f(\xi,x_\xi[0]_{\Delta_j}u_{l_{[\tau_i]}},v_\xi^{(\mu)})-f(\tau_i,x_\xi[0]_{\Delta_j},u_{l_{[\tau_i]}},v_\xi^{(\mu)}))*$$

$$*d\xi+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\sum_{\mu=1}^{n+1}\alpha_\xi^{(\mu)}(l_{[\tau_i]}^{(k)}, f(\tau_i,x_\xi[0]_{\Delta_j}u_{l_{[\tau_i]}},v_\xi^{(\mu)})-f(\tau_i,x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j},u_{l_{[\tau_i]}},v_\xi^{(\mu)}))d\xi$$

Учитывая непрерывность множества $F(t,x(s),u_l)$ по t, $x(s)$, условие Липшица и условия (3)-(6), как и в [6,7], можно утверждать, что

$$\left|(l_{[\tau_i]}^{(k)}, f(\xi,x_\xi[0]_{\Delta_j},u_{l_{[\tau_i]}},v_\xi^{(\mu)})-f(\tau_i,x_\xi[0]_{\Delta_j},u_{l_{[\tau_i]}},v_\xi^{(\mu)}))\right|\le\omega_1(\xi-\tau_i)\,. \tag{20}$$

$$\left|(l_{[\tau_i]}^{(k)}, f(\tau_i,x_\xi[0]_{\Delta_j},u_{l_{[\tau_i]}},v_\xi^{(\mu)})-f(\tau_i,x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j},u_{l_{[\tau_i]}},v_\xi^{(\mu)}))\right|\le\omega_2(\xi-\tau_i)\,. \tag{21}$$

Из (19) - (21) следует представление

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\sum_{\mu=1}^{n+1}\alpha_\xi^{(\mu)}(l_{[\tau_i]}^{(k)}, f(\xi,x_\xi[0]_{\Delta_j},u_{l_{[\tau_i]}},v_\xi^{(\mu)}))d\xi=$$

$$=\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\sum_{\mu=1}^{n+1}\alpha_\xi^{(\mu)}(l_{[\tau_i]}^{(k)}, f(\tau_i,x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j},u_{l_{[\tau_i]}},v_\xi^{(\mu)})+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\varphi_1(\xi)d\xi+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\varphi_2(\xi)d\xi\,. \tag{22}$$

Здесь $\omega_1(t-\tau_i)$, $\omega_2(t-\tau_i)$ — положительные монотонно убывающие при $t-\tau_i\to 0$ функции, причем $\omega_1(t-\tau_i)\to 0$, $\omega_2(t-\tau_i)\to 0$ при $t-\tau_i\to 0$ равномерно относительно моментов τ_i, $t\in[\tau_i,\tau_{i+1})$; $\varphi_1(t)$; $\varphi_2(t)$ — непрерывные функции удовлетворяющие соотношениям $|\varphi_1(t)|\le\omega_1(t-\tau_i)$, $|\varphi_2(t)|\le\omega_2(t-\tau_i)$, аналогично [7].

Из (9) получаем, что для достаточно больших k

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\sum_{\mu=1}^{n}\alpha_\xi^{(\mu)}(l_{[\tau_i]}^{(k)}, f(\tau_i,x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j},u_{l_{[\tau_i]}},v_\xi^{(\mu)}))d\xi\ge$$

$$\ge\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\sum_{\mu=1}^{n}\alpha_\xi^{(\mu)}\rho(\tau_i,x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j},l_{[\tau_i]})d\xi=(\tau_{i+1}-\tau_i)\rho(\tau_i,x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j},l_{[\tau_i]}) \tag{23}$$

Кроме того, аналогично предыдущему получаем:

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\rho(\xi,y_\xi^{(k)}[0]_{\Delta_j},l_{[\tau_i]})d\xi=(\tau_{i+1}-\tau_i)\rho(\tau_i,y_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta_j},l_{[\tau_i]})+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\varphi_3(\xi)d\xi+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\varphi_4(\xi)d\xi\,, \tag{24}$$

Из (5) для достаточно больших k имеем оценку для $t\in[\tau_i,\tau_{i+1})$ $(l^{(k)}_{[\tau_i]}, f_{l[\tau_i]}[t])-\rho(t,y^{(k)}_t[0]_{\Delta_j},l[\tau_i])\le 0$ и, следовательно,

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\{(l^{(k)}_{[\tau_i]}, f_{l_{[\tau_i]}}[\xi])-\rho(\xi,y^{(k)}_\xi[0]_{\Delta_j},l_{[\tau_i]})\}d\xi\le 0. \tag{25}$$

Так как $\rho(t,x,l)$ также удовлетворяет условию Липшица по x, то из соотношений (19—25) выводим оценку для достаточно больших k

$$\left\|y^{(k)}_{\tau_i}[0]_{\Delta_j}-x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j}\right\|^2+2(y^{(k)}_{\tau_i}[0]_{\Delta_j}-x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j})(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}f_{l_{[\tau_i]}}[\xi]d\xi-$$

$$-\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}f[\xi]d\xi)+(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}f_{l_{[\tau_i]}}[\xi]d\xi-\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}f[\xi]d\xi)^2\le\left\|s^{(k)}_{\tau_i}\right\|_1+2\left\|s^{(k)}_{\tau_i}\right\|_1\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(l_{[\tau_i]}, f_{l_{[\tau_i]}}[\xi])d\xi-2(\tau_{i+1}-\tau_i)*$$

$$*\left\|s^{(k)}_{\tau_i}\right\|_1\rho(\tau_i,x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j},l[\tau_i])+(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}f_{l_{[\tau_i]}}[\xi]d\xi-\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}f[\xi]d\xi)^2+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\omega_1(\xi-\tau_i)d\xi+$$

$$+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\omega_2(\xi-\tau_i)d\xi=\left\|s^{(k)}_{\tau_i}\right\|_1^2+2\left\|s^{(k)}_{\tau_i}\right\|_1\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\rho(\xi,y^{(k)}_\xi[0]_{\Delta_j},l_{[\tau_i]}[\xi])d\xi-$$

$$-2\alpha_i\left\|s^{(k)}_{\tau_i}\right\|_1\rho(\tau_i,x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j},l_{[\tau_i]})+\quad 2\left\|s^{(k)}_{\tau_i}\right\|_1*\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\{(l^{(k)}_{[\tau_i]}, f^{(k)}_{l_{[\tau_i]}})-\rho(\xi,y^{(k)}_\xi[0]_{\Delta_j},l_{[\tau_i]})\}d\xi+$$

$$+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\omega_1(\xi-\tau_i)d\xi+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\omega_2(\xi-\tau_i)d\xi+(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}f[\xi]d\xi-\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}f_{l_{[\tau_i]}}[\xi]d\xi)^2\le\left\|s^{(k)}_{\tau_i}\right\|_1^2+2\left\|s^{(k)}_{\tau_i}\right\|_1\alpha_i\rho(\tau_i,y_{\tau_i}[0]_{\Delta_j},l_{[\tau_i]})-$$

$$-2\alpha_i\left\|s^{(k)}_{\tau_i}\right\|_1\rho(\tau_i,x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j},l_{[\tau_i]})+2\left\|s^{(k)}_{\tau_i}\right\|_1\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\{(l^{(k)}_{[\tau_i]}, f_{l_{[\tau_i]}}[\xi]-\rho(\xi,y^{(k)}_\xi[0]_{\Delta_j}l_{[\tau_i]})\}d\xi+(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}f[\xi]d\xi-$$

$$-\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}f_{l_{[\tau_i]}}[\xi]d\xi)^2+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(\omega_1(\xi-\tau_i)+\omega_2(\xi-\tau_i)+\omega_3(\xi-\tau_i)+\omega_4(\xi-\tau_i))d\xi\le\left\|s^{(k)}_{\tau_i}\right\|_1^2+2L\delta_j(\alpha_i)\left\|s^{(k)}_{\tau_i}\right\|_1*$$

$$*\left\|y^{(k)}_{\tau_i}[0]_{\Delta_j}-x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j}\right\|_1+(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}f[\xi]d\xi-\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}f_{l_{[\tau_i]}}[\xi]d\xi)^2+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\omega(\xi-\tau_i)d\xi, \tag{26}$$

где $\omega(\xi-\tau_i)=\sum_{m=1}^{4}\omega_m(\xi-\tau_i)$.

Из (17), (25), (26) получаем

$$\left\|y^{(k)}_{\tau_{i+1}}[0]_{\Delta j}-x_{\tau_{i+1}}[0]_{\Delta j}\right\|_1^2\le\left\|y^{(k)}_{\tau_i}[0]_{\Delta j}-x_{\tau_i}[0]_{\Delta j}\right\|_1^2+$$
$$+2L\delta_j\left\|y^{(k)}_{\tau_i}[0]_{\Delta j}-x_{\tau_i}[0]_{\Delta j}\right\|_1^2+o(\delta_j).$$

Здесь $O(\delta_j)$ равномерно по k и $\tau_i\in[t_0,\theta]$имеет более высокий порядок малости, чем δ_j, тогда получаем оценку

$$\left\|y^{(k)}_{\tau_i}[0]_{\Delta j}-x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j}\right\|_1^2\le(1+2L\delta_j)\left\|y^{(k)}_{\tau}[0]_{\Delta j}-x_\tau[0]_{\Delta j}\right\|_1^2+o(\delta_j) \tag{27}$$

Теперь из (18) – (27) по плану доказательства [6,7], а также [11,12] получаем оценку второго слагаемого в правой части (18). Для любого $s \in [-\tau, 0]$

$$\left\| y_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta j} - x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} f_{l_{[\tau_i]}}[\xi]d\xi - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} f[\xi]d\xi \right\|_1^2 \le$$

$$\le \left\| y_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta j} - x_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta_j} \right\| + 2\delta_j L \left\| y_{\tau_i}^{(k)}[s] \ - x_{\tau_i}[s]_{\Delta_j} \right\|_1^2 o(\delta_j)\,. \qquad (28)$$

Интегрируем неравенство (28) по Лебегу

$$\int_{-\tau}^{0} \left\| y_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta j} - x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} f[\xi]d\xi - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} f\,[\xi]d\xi \right\|_1^2 ds \le$$

$$\le \int_{-\tau}^{0} \left\| y_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta j} - x_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta_j} \right\|_1 ds + 2\delta_i L \int_{-\tau}^{0} \left\| y_{\tau_i}^{(k)}[s]_{\Delta j} - x_{\tau_i}[s]_{\Delta_j} \right\|_1^2 ds + o(\delta_j) \le$$

$$\le \int_{-\tau}^{0} \left\| y_{\tau_i}^{(k)}[s]_{\Delta j} - x_{\tau_i}^{(k)}[s]_{\Delta_j} \right\|_1 ds + 2\delta_i L \int_{-\tau}^{0} \left\| y_{\tau_i}^{(k)}[s]_{\Delta j} - x_{\tau_i}[s]_{\Delta_j} \right\|_1^2 ds + o(\delta_j), \qquad (29)$$

так как $\left\| y_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta j} - x_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta_\mathrm{j}} \right\|_1$ сколь угодно мала.

Из (17), (25—29) и условий леммы получаем:

$$\varepsilon_\Delta^2[\tau_{i+1}] \le \left\| y_{\tau_{i+1}}^{(k)}[0]_{\Delta j} - x_{\tau_{i+1}}[0]_{\Delta j} \right\|_1^2 + \int_{-\tau}^{0} \left\| y_{\tau_i}^{(k)}[s]_{\Delta_j} - x_{\tau_i}[s]_{\Delta_j} \right\|_1^2 ds +$$

$$+ 2\delta_j L (\left\| y_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta_\mathrm{j}} - x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} \right\|_1^2 + \int_{-\tau}^{0} \left\| y_{\tau_i}^{(k)}[s]_{\Delta_j} - x_{\tau_i}^{(k)}[s]_{\Delta_j} \right\|_1^2 ds) + O(\delta_j).$$

Отсюда

$$\varepsilon_\Delta^2[\tau_{i+1}] \le (1 + 2\delta_j L)\varepsilon_\Delta^2[\tau_i] + O(\delta_j)\,,$$

где $\delta_j^{-1} o(\delta_i) \to 0$ при $j \to \infty$ равномерно по $\tau_i \in [t_0, \theta]$.

Далее, аналогично работе [6] получаем, что каково бы ни было положительное число β все функции $x[t]_{\Delta_j}$ в разбиении Γ_j с достаточно большим номером j при всех $t \in [t_0, \theta]$ удовлетворяют неравенству

$$\varepsilon_\Delta^2[t] \le \beta \exp[3L(t - t_0)],$$

что и доказывает лемму, а вместе с тем и теорему.

Рассмотрим решение задачи об уклонении от замкнутого множества $M \subset H_\tau$, которое использует применение контр-позиционной процедуры управления второго игрока [8,9], а также [11,12].

Движением, порожденным вектором $\mathrm{u}_l \in P$ с начальным состоянием $x_{t_0}[s] = x_{t_0}[t_0 + s]$ назовем абсолютно-непрерывную вектор функцию $x[t] = x[t, p_0]$, удовлетворяющую почти всюду на промежутке $[t_0, \theta]$ уравнению в контингенциях

$$\frac{dx[t]}{dt} \in F(t, x[t+s], u_l) \qquad (30)$$

с начальным условием $x_{t_0}[s] = x_{t_0}[t_0 + s]$, $s \in [-\tau, 0]$.

$F(t, x_t[s], u_l) = \mathrm{co}\{f : f = f(t, x_t[s], u_l, v), v \in Q\}$.

Символом $\mathrm{X}(t^*; t_*, x_{t_*}[s])$, $t^* > t_*$; $t_* \in [t_0, \theta]$, $t^* \in (t_0, \theta]$, обозначим множество всех отрезков $x_{t^*}[s] = x[t^* + s]$, где $x[t], t \in [t_*, \theta]$, есть некоторое движение порождённое вектором $u_l \in P$, удовлетворяющее условию $x_{t_*}[s] = x[t_* + s]$.

Определение 5. Пусть каждому $t \in [t_0, \theta]$ поставлено в соответствие непустое множество $W_t = \{x_t[s] = x[t+s]\}, x_t[s] \in B_\tau$.
Будем называть систему $\{W_t\}, t \in [t_0, \theta]$, множеств W_t $v-$стабильной, если для любых двух моментов $t^* > t_*$; $t_*, t^* \in [t_0, \theta]$, любого состояния $x_{t_*}[s]$ и любого вектора $u_l \in P$ имеет место соотношение

$$\mathrm{X}(t^*; t_*, x_{t_*}, [s]) \cap W_{t^*} \neq \varnothing \tag{31}$$

Аналогично предыдущему можно показать, что замыкание системы $v-$стабильных множеств в $C_{[-\tau,0]}$ $v-$стабильно.

Определим процедуру позиционного управления второго игрока, считая при этом, что в распоряжении второго игрока находится вспомогательная система, поведение которой на каждом промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$ описывается уравнением в контингенциях

$$\frac{dx[t]_{\Delta_j}}{dt} \in F(t, x[t+s]_{\Delta_j}, u_{l[\tau_i]}) \tag{32}$$

с начальным условием $x_{\tau_i}[s]_{\Delta_j} = x[\tau_i + s]_{\Delta_j}$, причём вектор $u_{l[\tau_i]} \in P$ выбирается на каждом промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$ из условия

$$\max_{v \in Q}(l[\tau_i], f(\tau_i, x_{\tau_i}[s]_{\Delta_j}, u_{l[\tau_i]}, v)) = \min_{u \in P}\max_{v \in Q}(l[\tau_i], f(\tau_i, x_{\tau_i}[s]_{\Delta_j}, u, v)). \tag{33}$$

Здесь и в дальнейшем

$$l_{[\tau_i]} = \begin{cases} \dfrac{s_{\tau_i}}{\| s_{\tau_i} \|_1}, \text{если } s_{\tau_i} \neq 0, \\ \textit{произвольному } l \in \mathrm{S}, \text{ если } s_{\tau_i} = 0, \end{cases}$$

$s_{\tau_i} = x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} - y_{\tau_i}[0]_{\Delta_j}$, $x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j}$- элемент множества $Z(y_i[0]_{\Delta_j})$ предельных точек последовательности $\{x^{(k)}_{\tau_i}[0]_{\Delta_j}\}$ являющейся 0–сечением последовательности $\{x^{(k)}_{\tau_i}[s]_{\Delta_j}\}$ минимизирующей величину
$r(y_t(s), W_{\tau_i}) = \inf \| y_t(s) - x_t(s) \|_3$, $x_t(s) \in W_t$.

Определение 6. Аппроксимационным движением системы (1) порожденным контр-позиционной процедурой управления второго игрока с начальным условием $y_{t_0}[s]_{\Delta_j} = y[t_0 + s]_{\Delta_j}$ назовем всякую абсолютно-непрерывную вектор функцию $y[t]_{\Delta_j} = y[t, q_0, \Gamma_j], t \in [t_0, \theta], q_0 = \{t_0, y_{t_0}[s]_{\Delta_j}\}$, удовлетворяющую на каждом промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$ разбиения Γ_j почти всюду уравнению в контингенциях

$$\frac{dy[t]_{\Delta_j}}{dt} \in F_{-l_{[\tau_i]}}(t, y[t+s]_{\Delta_j})$$

с начальным условием $y_{t_0}[s]_{\Delta_j} = y[t_0+s]_{\Delta_j}$, $F_{-l}(t, y[t+s]) = co\{f:(-l,f) \le \rho(t, y_y[s], l)\}$ или

$$F_{-l}(t, y[t+s]) = co\{f:(l,f) \ge \rho^*(t, y_y[s], l)\} \tag{34}$$

где $\rho^*(t, y_y[s], l)\} = \min_{u\in P}\max_{v\in Q}(l, f(t, y_y[s], u, v)$

Определение 7. Движением системы (1), с начальным условием $y_{t_0}[s]_{\Delta_j} = y[t_0+s]_{\Delta_j}$, порожденным контр-позиционной процедурой управления второго игрока назовем абсолютно-непрерывную вектор-функцию $y[t] = y[t, q_0], t\in[t_{0,}\theta]$, для которой найдется последовательность аппроксимационных движений $y[t]_{\Delta_j} = y[t, q_0, \Gamma_j], t\in[t_{0,}\theta], j=1,2,...$, равномерно по t на отрезке $[t_{0,}\theta]$ удовлетворяющая соотношению $y[t] = \lim_{j\to\infty} y[t]_{\Delta_j}$. Здесь последовательность $\{\delta_j\}; j=1,2,...$, диаметров $\{\delta_j\}$ разбиения Γ_j удовлетворяет соотношению $\lim_{j\to\infty}\delta_j = 0$.

Уточним постановку задачи уклонения от множества $M\subset H_\tau$, которая решается с помощью контр-позиционной процедуры управления второго игрока [8-9].

Определение 8. При заданной начальной позиции игры $q_0 = \{t_0, y_0(s)\}$ контр-позиционная процедура управления второго игрока гарантирует уклонение движений y[t] от цели $M\subset B_\tau$ в момент θ, если

$$r(y_t(s), W_{\tau_i}) = \inf \| y_\theta[s] - x_\theta[s]\|_3 > 0, x_\theta[s]\in M.$$

При этом предполагается, что $W_t \cap M = \varnothing \quad \forall t\in[t_0, \theta)$.

Ниже указываются достаточные условия разрешимости задачи уклонения от множества M.

Теорема 2. Пусть на промежутке $[t_0, \theta]$ задача минимаксная $v-$ стабильная система $\{W_t\}$ множеств $W_t, [t_0, \theta]$, причем $M\cap W_t = \varnothing \quad \forall t\in[t_0,\theta]$. Если начальная позиция игры $q_0 = \{t_0, y_0(s)\}$ удовлетворяет условию $r(y_0(s), W_{t_0}) = 0$, то контр-позиционная процедура управления второго игрока гарантирует уклонение движений $y[t] = y[t, q_0]$ системы (1) от множества M вплоть до момента θ.

Сформулированная теорема вытекает из леммы.

Лемма 3. Пусть начальная позиция игры $q_0 = \{t_0, y_0(s)\}$, такова, что $r(y_0(s), W_{t_0}) = 0$ в H_τ. Если система множеств $W_t, t\in[t_0,\theta]$ v - стабильна, то контр-позиционная процедура управления второго игрока удовлетворяет условию $r(y_t[s], W_t) = 0, t\in[t_0,\theta]$, в H_τ.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 1, рассмотрим произвольно выбранное движение $y[t] = y[t, q_0]$, порожденное контр-позиционной процедурой управления второго игрока. По определению этого движения существует последовательность функций $\{y[t]_{\Delta_j}\} = \{y[t, q_0, \Gamma_j\}$ равномерно сходящаяся на $[t_0, \theta]$ к $y[t]$. Выберем из последовательности $\{y[t]_{\Delta_j}\}$ произвольным образом функцию $y[t]_{\Delta_j}$ и построим вдоль нее оценку величины $\varepsilon^2_\Delta[\tau_{i+1}]$ через величины $\varepsilon^2_\Delta[\tau_\mathrm{i}]$. Здесь и в дальнейшем $\varepsilon_\Delta[\tau] = r(y[t]_{\Delta_j}, W_t)$ в H_t. Не нарушая общности считаем, что сечение $\{x^{(k)}_{\tau_i}[0]_{\Delta_j}\}$ сходится к $x_{\tau_i}[0]_{\Delta_j}$. Рассмотрим позицию $q(k,i) = \{\tau_i, x^{(k)}_{\tau_i}[s]_{\Delta_j}\}$. В силу v – стабильности системы множеств $W_t, t\in[t_0,\theta]$, среди движений $x^{(k)}_{\tau_i}[t]_{\Delta_j} = x[t, p(k,i), \Gamma]$ есть движение со свойством

$$x^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta_j} \in W_{\tau_{i+1}}, \tag{35}$$

удовлетворяющее почти всюду на $[\tau_i, \tau_{i+1})$ уравнению в контингенциях

$\dfrac{dx^{(k)}[s]_{\Delta_j}}{dt} \in F(t, x^{(k)}[t+s], u_{l[\tau_i]})$ с начальным условием $x^{(k)}_{\tau_i}[s] = x^{(k)}[t_i + s]$.

Аналогично (14) имеем:

$$\varepsilon^2_\Delta[\tau_{i+1}] \le \left\| y_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta_j} - x^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta_j} \right\|^2_3 \tag{36}$$

Отрезки $y_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta_j}, x^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta_j}$ траекторий $y[t]_{\Delta_j}, x^{(k)}[t]_{\Delta_j}$ могут быть представлены в следующем виде (считаем, что $\tau_{i+1} - \tau_i \le \tau, \alpha_i(t) = t - \tau_i, \alpha_i = \tau_{i+1} - \tau_i, t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$)

$$y_t[s]_{\Delta_j} = \begin{cases} y_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} + \int\limits_{\tau_i}^{t+s} f[\xi]d\xi, & -\alpha_i(t) \le s \le 0, \\ y_{\tau_i}[s+\alpha_i(t)], & -\tau \le s \le -\alpha_i(t), \end{cases} \tag{37}$$

$$x^{(k)}_t[s]_{\Delta_j} = \begin{cases} x^{(k)}_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} + \int\limits_{\tau_i}^{t+s} f_l[\xi]d\xi, & -\alpha_i(t) \le s \le 0, \\ x^{(k)}_{\tau_i}[s+\alpha_i(t)], & -\tau \le s \le -\alpha_i(t). \end{cases} \tag{38}$$

Здесь $f[t], f_l[t]$ суммируемые функции, удовлетворяющие при почти всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ включениям $f_l[t] \in F(t, x^{(k)}[t+s]_{\Delta_j}, u_{l[\tau_i]}), \; f[t] \in F_{-1_{[\tau_i]}}(t, y[t+s]_{\Delta_j})$.

Из соотношений (35)-(38):

$$\varepsilon^2[\tau_{i+1}] \le \| y_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta_j} - x^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta_j} \|^2_3 = \| y_{\tau_{i+1}}[0]_{\Delta_j} - x^{(k)}_{\tau_{i+1}}[0]_{\Delta_j} \|^2_1 + \int\limits_{-\tau}^{0} \| y_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta_j} - x^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta_j} \|^2_1 \, ds,$$

подставляем сюда (37), (38)

$$\| y_{\tau_{i+1}}[0]_{\Delta_j} - x^{(k)}_{\tau_{i+1}}[0]_{\Delta_j} \|^2_1 + \int\limits_{-\tau}^{0} \| y_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta_j} - x^{(k)}_{\tau_{i+1}}[s]_{\Delta_j} \|^2_1 \, ds =$$

$$= \| y_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} - x^{(k)}_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi]d\xi - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_l[\xi]d\xi \|^2_1 + \tag{39}$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} \| y_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} - x^{(k)}_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi]d\xi \|^2_1 \, ds - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} f_{l[\tau_i]}[\xi] \|^2_1 \, d\xi.$$

Будем оценивать первое слагаемое в правой части (39) аналогично тому, как это делалось при решении задачи о сближении.

По теореме Каратеодори [1]

$$f_{l_{[\tau_i]}}[t] = \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta^{(\nu)}_t f(t, x^{(k)}[t+s]_{\Delta_j}, u_{l_{[\tau_i]}}, v^{(\nu)}_t), \qquad \beta^{(\nu)}_t \ge 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta^{(\nu)}_t = 1, \tag{40}$$

$v^{(\nu)}_t \in Q$.

Теперь с учётом (40) и непрерывности множества $F(t, x_t[s]_{\Delta_j}, u_{l[\tau_i]})$ по t и $x[s]$, аналогично [6,7], можем утверждать, что

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (l_{[\tau_i]}, f_l[\xi])d\xi = \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sum_{\nu=1}^{n} \beta^{(\nu)}_\xi (l_{[\tau_i]}, f(\xi, x^{(k)}[\xi]_{\Delta_j}, u_{l[\tau_i]}, v^{(\nu)}_\xi))d\xi =$$

$$= \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta_\xi^{(\nu)} (l_{[\tau_i]}, f(\tau_i, x_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta_j}, u_{l[\tau_i]}, v_\xi^{(\nu)})) d\xi + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta_\xi^{(\nu)} \psi_1(\xi) d\xi + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta_\xi^{(\nu)} \psi_2(\xi) d\xi. \quad (41)$$

Аналогично

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \rho^*(\xi, y_\xi[0]_{\Delta_j}, l_{[\tau_i]}) d\xi = \alpha_i \rho^*(\tau_i, y_{\tau_i}[0]_{\Delta_j}, l_{[\tau_i]}) + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \psi_3(\xi) d\xi + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sum_{\nu=1}^{n+1} \psi_4(\xi) d\xi. \quad (42)$$

Здесь $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\psi_3(t)$, $\psi_4(t)$ непрерывные функции, удовлетворяющие неравенствам [6,7] $\psi_1(t) \le \omega_1(t-\tau_i)$, $\psi_2(t) \le \omega_2(t-\tau_i)$, $\psi_3(t) \le \omega_3(t-\tau_i)$, $\psi_4(t) \le \omega_4(t-\tau_i)$, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ - положительные монотонно – убывающие функции, стремящиеся к нулю при $t-\tau_i \to 0$ равномерно относительно моментов τ_i, $\tau_i, t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i \in [t_0, \theta)$.

Обозначим $s_{\tau_i}^{(k)} = x_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta_j} - y_{\tau_i}[0]_{\Delta_j}$, $\quad l_{\tau_i}^{(k)} = \dfrac{s_{\tau_i}^{(k)}}{\left\| s_{\tau_i}^{(k)} \right\|_1}$.

Тогда из (34) для достаточно больших k имеем

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left\{ \rho^*(\xi, y_\xi[0]_{\Delta_j}, l_{[\tau_i]}) - (l_{\tau_i}^{(k)}, f[\xi]) \right\} d\xi \le 0, \quad (43)$$

а из (33) для достаточно больших k получаем

$$(l_{[\tau_i]}^{(k)}, f(\tau_i, x_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta_j}, \mathrm{u}_{l[\tau_i]}, v_t^{(\nu)}) \le \rho^*(\tau_i, x_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta_j}, l_{[\tau_i]}). \quad (44)$$

Из (43), (44) заключаем

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta_\xi^{(\nu)} (l_{[\tau_i]}^k, f(\tau_i, x_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta_j}, u_{l[\tau_i]}, v_\xi^{(\nu)})) d\xi \le \alpha_i \rho^*(\tau_i, x_{\tau_i}^{(k)}[s]_{\Delta_j}, l_{[\tau_i]}). \quad (45)$$

Наконец из (41)-(44), с учётом условия Липшица, получаем для достаточно больших k

$$\| y_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} - x_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta_j} + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi] d\xi - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_l[\xi] d\xi \|_1^2 =$$

$$\left\| s_{\tau_i}^{(k)} \right\|_1^2 - 2\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (s_{\tau_i}^{(k)}, f[\xi]) d\xi + 2\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (s_{\tau_i}^{(k)}, f_l[\xi]) d\xi + \left(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi] d\xi - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_l[\xi] d\xi\right)^2 = \left\| s_{\tau_i}^{(k)} \right\|_1^2 +$$

$$+ 2\left\| s_{\tau_i}^{(k)} \right\|_1 \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta_\xi^{(\nu)} (l_{[\tau_i]} f(\xi, x_\xi^{(k)}[0]_{\Delta_j}, u_{l_{[\tau_i]}}, v_\xi^{(\nu)})) d\xi -$$

$$- 2\left\| s_{\tau_i}^{(k)} \right\|_1 \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \rho^*(\xi, y_\xi[0]_{\Delta_j}, l_{[\tau_i]}) d\xi + 2\left\| s_{\tau_i}^{(k)} \right\|_1 \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left\{ \rho^*(\xi, y_\xi[0]_{\Delta_j}, l_{[\tau_i]}) - \right.$$

$$\left. - (l_{[\tau_i]}^{(k)}, f[\xi]) \right\} d\xi + \left(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi] d\xi - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_l[\xi] d\xi\right)^2 \le$$

$$\le \left\| s_{\tau_i}^{(k)} \right\|_1^2 + 2\left\| s_{\tau_i}^{(k)} \right\|_1 \alpha_i \rho^*(\tau_i, x_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta_j}, l_{[\tau_i]}) - 2\left\| s_{\tau_i}^{(k)} \right\|_1 \alpha_i \rho^*(\tau_i, y_{\tau_i}[0], l_{[\tau_i]}) +$$

$$+ \left(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi] d\xi - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_l[\xi] d\xi\right)^2 + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \omega(\xi - \tau_i) d\xi \quad (46)$$

где $\omega = \sum_{i=1}^{m=4} \omega_i$.

Из (39)-(46) получаем оценку

$$\| y_{\tau_{i+1}}[0]_{\Delta_j} - x_{\tau_{i+1}}^{(k)}[0]_{\Delta_j} \|_1^2 = \| y_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} - x_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta_j} + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f[\xi]d\xi - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_l[\xi]d\xi \|_1 \le$$

$$\le \left\| s_{\tau_i}^{(k)} \right\|_1^2 + 2L\alpha_i \left\| x_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta_j} - y_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} \right\|_1^2 + O(\delta_j), \qquad (47)$$

L – постоянная Липшица, $O(\delta_j)$ - равномерно по k имеет более высокий порядок малости относительно δ_j.

Оцениваем второе слагаемое в правой части (39). По плану доказательства (46) и из [11,12] получаем

$$\| y_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} - x_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta_j} + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} f[\xi]d\xi - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} f_l[\xi]d\xi \|_1^2 \le$$

$$\le \left\| y_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} - x_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta_j} \right\|_1^2 + 2\delta_j L \left\| y_{\tau_i}^{(k)}[s] - x_{\tau_i}[s]_{\Delta_j} \right\|_1^2 + O(\delta_j) \qquad (48)$$

для любого $s \in [-\tau, 0]$.

Интегрируем (48) по Лебегу, тогда по условиям леммы

$$\int_{-\tau}^{0} \| y_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} - x_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta_j} + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} f[\xi]d\xi - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} f_{l[\tau_i]}[\xi]d\xi \|_1^2 \, ds \le$$

$$\int_{-\tau}^{0} \| y_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} - x_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta_j} \|_1^2 \, ds + 2\delta_j L \int_{-\tau}^{0} \left\| y_{\tau_i}^{(k)}[s]_{\Delta_j} - x_{\tau_i}[s]_{\Delta_j} \right\|_1^2 ds + \tau\, O(\delta_j) \le$$

$$\le \int_{-\tau}^{0} \left\| y_{\tau_i}[s]_{\Delta_j} - x_{\tau_i}^{(k)}[s]_{\Delta_j} \right\|_1^2 ds + 2\delta_j L \int_{-\tau}^{0} \left\| y_{\tau_i}^{(k)}[s]_{\Delta_j} - x_{\tau_i}[s]_{\Delta_j} \right\|_1^2 ds + O(\delta_j). \qquad (49)$$

Из (39) и (43) – (49) следует оценка

$$\varepsilon_\Delta^2[\tau_{i+1}] \le \left\| y_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} - x_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta_j} \right\|_1^2 + \int_{-\tau}^{0} \left\| y_{\tau_i}[s]_{\Delta_j} - x_{\tau_i}^{(k)}[s]_{\Delta_j} \right\|_1^2 ds +$$

$$+ 2\delta_j L (\left\| y_{\tau_i}[0]_{\Delta_j} - x_{\tau_i}^{(k)}[0]_{\Delta_j} \right\|_1^2 + \int_{-\tau}^{0} \left\| y_{\tau_i}[s]_{\Delta_j} - x_{\tau_i}^{(k)}[s]_{\Delta_j} \right\|_1^2) ds + O(\delta_j),$$

отсюда $\varepsilon_\Delta^2[\tau_{i+1}] \le (1 + 2\delta_j L)\varepsilon_\Delta^2[\tau_i] + O(\delta_j)$.

Далее, аналогично работе [6], получаем, что каково бы ни было положительное число β, все функции $x[t]_{\Delta_j}$ для разбиения Γ_j с достаточно большим номером j при всех $t \in [t_0, \theta]$ удовлетворяют неравенству $\varepsilon_\Delta^2[t] \le \beta \exp[3L(t - t_0)]$, что и доказывает лемму, а вместе с тем и теорему.

При рассмотрении вопроса об альтернативе, как для случая конечномерного пространства, так и для случая бесконечномерного пространства схема доказательства одна и та же с несущественными изменениями, которые не зависят от выбора вида нормы элемента [5]. По аналогии с [1, 5, 9], а также [11, 12] доказывается теорема об альтернативе.

Уберём из пространства $\{t, x_t[s]\}$ все те позиции $\{t_*, x_{t_*}[s]\}$, $t_* \in [t_0, \theta]$, для каждой из которых, как для начальной, разрешима задача об уклонении на отрезке $[t_*, \theta]$.

Символом $W_{t_*}^u$ обозначим всех оставшихся позиций.

Теорема 3. Либо $x_{t_*}[s] \in W_{t_*}^u$ и тогда позиционная процедура управления первого игрока решает задачу сближения с множеством M в момент θ.

Либо $x_{t_*}[s] \notin W_{t_*}^u$ и тогда контр – позиционная процедура управления второго игрока решает задачу уклонения от множества M в момент θ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский, Н. Н.* Позиционные дифференциальные игры / *Н.Н. Красовский, А.И. Субботин*. — М.: Наука, 1974. — 456с.

2. *Красовский, Н. Н. К* задаче унификации дифференциальных игр // ДАН СССР. — 1976. —Т.226. —№6. — с. 1260-1263.

3. *Красовский, Н. Н.* Минимаксная дифференциальная игра / *Н.Н. Красовский, А. И. Субботин, В.Н. Ушаков* //ДАН СССР. — 1972. — Т. 206. — №2. — с. 277-280.

4. *Осипов, Ю.С.* Об одной дифференциальной игре сближения // Дифференциальные игры и задачи управления. Свердловск: АН СССР УНЦ — 1975 — с. 157-166.

5. *Осипов, Ю.С.* Альтернатива в дифференциально-разностной игре // ДАН СССР. — 1971. — Т. 197. — №5. — с. 1022-1026.

6. *Осипов, Ю.С.* Дифференциальная игра наведения для систем с последействием // ПММ. — 1971. — Т. 35. —№1 — с. 123-131.

7. *Осипов, Ю.С.* О регуляризации управления в дифференциально-разностной игре сближения-уклонения / *Ю. С. Осипов, Л. П. Алесенко* // Дифференциальные уравнения. — 1976. — Т. 12. — №6. — с 1000-1006.

8. *Ушаков, В.Н.* Минимаксное поглощение в дифференциальных играх // Экстремальные стратегии в позиционных дифференциальных играх. Свердловск: АН СССР УНЦ – 1977 – с.253-272.

9. *Ушаков, В.Н.* Минимаксная дифференциальная игра сближения – уклонения и локальные условия разрешимости задач сближения – уклонения. // Дифференциальные системы управления. Свердловск: АН СССР УНЦ – 1979 – с.87-93.

10. *Максимов, В. И.* О существовании седловой точки в дифференциально-разностной игре сближения-уклонения // ПММ. — 1978. — Т. 42. — №1 — с. 15-22.

11. *Пасиков, В.Л.* Альтернатива в минимаксной дифференциальной игре для систем с последействием // Известия ВУЗов. Математика. — 1983. —№8. — с. 45-50.

12. *Пасиков, В.Л.* Минимаксная дифференциальная игра сближения-уклонения для систем с последействием / Рязанский ордена «Знак Почета» госпединститут. — Рязань. —1982. — с. 40. — Библиогр.: 7 назв. — Деп. в ВИНИТИ, №3582-83 Деп.