

Теория гарантированного поиска на графах

Т. В. Абрамовская, Н. Н. Петров

Введение. Статья содержит обзор наиболее интересных результатов в теории поиска, полученных на кафедре исследования операций Санкт-Петербургского государственного университета, отметившей в 2010 году своё сорокалетие. Обзор содержит также историю вопроса, некоторые нерешённые проблемы и обсуждение многочисленных связей теории гарантированного поиска с другими областями математики.

Типичная задача гарантированного поиска на графах на неформальном уровне может быть сформулирована следующим образом. На графе располагаются две группы игроков. Первая группа — назовём её участников *преследователями* — ставит своей задачей «переловить» всех участников второй группы, которых будем называть *убегающими*. Впрочем, из дальнейшего станет ясно, что поставленную задачу достаточно решить для одного убегающего, что и будет предполагаться в нижеследующих рассуждениях. Цель команды преследователей — построить «программу» действий, которая обеспечивала бы им поимку «невидимого» убегающего при любом его поведении. Иными словами, поимка должна быть гарантирована даже в том случае, когда выбранная преследователями программа становится известной убегающему «до начала поиска». В каждой формализации задачи поиска фиксируются динамические возможности участников, условие успешного завершения поиска (условие поимки), арена поиска (комбинаторный или топологический граф), и ставится следующая задача: *найти наименьшее число преследователей, необходимое для успешного завершения поиска.*

Это число называют *поисковым числом* графа с соответствующим прилагательным, которое зависит от принятой формализации. Столь естествен-

ная задача вполне могла быть поставлена в *XVIII* веке, во времена Эйлера, но первые содержательные результаты появились лишь в 70–80 годы прошлого века в рамках теории конфликтного управления с неполной информацией. В монографии Р. Айзекса [6], содержащей основы теории дифференциальных игр, рассматривается одна (неформально поставленная) задача преследования–уклонения — проблема «Принцесса и Чудовище», в которой участники не получают никакой информации о поведении друг друга. В случае, если ареной поиска является окружность, максимальные скорости игроков равны и платой является время поимки, эта задача была решена М. И. Зеликиным ([19]), который доказал существование ситуации равновесия в классе смешанных стратегий. Эта проблема существенно отличается от задач гарантированного поиска, в основу которых положен «минимаксный принцип», не использующий вероятностного описания поведения игроков.

Из дифференциальных игр с полной информацией уместно упомянуть задачу «казаки–разбойники», в которой казаки должны переловить всех разбойников в предположении, что все игроки используют «простые движения» ([24, 29]). Статья [24] написана Николаем Никандровичем Петровым.

Статья организована следующим образом. В Разделе *I* речь идёт о некоторых поисковых числах комбинаторных графов. Раздел *II* посвящён задачам поиска «с противодействием». В Разделе *III* рассматриваются проблемы гарантированного поиска с фиксированными максимальными скоростями участников, а в Разделе *IV* — с фиксированным радиусом поимки (без ограничений на скорости). В разделах *III* и *IV* задачи поиска ставятся на топологических графах. Раздел *V* посвящён приложениям. Результаты разделов *II* — *IV* не имеют аналогов в мировой математической литературе.

Раздел *IV* написан первым автором. Остальной материал подготовлен авторами совместно.

I. О некоторых поисковых числах графа

1. Рёберно–поисковое число

Любопытно, что впервые вопрос о наименьшем числе преследователей, необходимом для поимки «невидимого» убегающего, был поставлен спелеологом Брейшом в «пещерном» журнале *SWCavers* [42]. Представим себе, что в некоторой пещере, состоящей из ходов и лазов, потерялся незадачливый исследователь, которого мы должны спасти. В нашем распоряжении имеется

карта¹ пещеры (граф), но число спасателей ограничено. То, что заблудившийся спелеолог желает встречи со спасателями, никак не облегчает нашу задачу, если речь идёт о гарантированном спасении. Он может бесцельно метаться по всей пещере с неизвестной скоростью. Требуется разработать план поиска, гарантирующий спасение спелеолога, т. е. исключаящий любую возможность с ним разминуться.

Впервые задача о поисковом числе рассматривалась в следующей формализации. Пусть арена поиска представляет собой одномерный CW -комплекс ([21] с. 233). Именно так в цитируемой монографии определяется *граф*. *Траекториями* игроков считаются произвольные непрерывные (в топологии графа) функции «времени» (топологические пути) со значениями в графе G . *Программой* преследователей P_1, \dots, P_n называется произвольная совокупность траекторий $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$, заданных для $t \in [0, T]$. Никаких ограничений на число T не накладывается.

Программа называется *выигрывающей*, если для любой траектории $y(t)$, $t \in [0, T]$, убегающего E найдутся такие $i \in \overline{1, n}$ и $\tau \in [0, T]$, что $x_i(\tau) = y(\tau)$. Поисковым числом графа G называется наименьшее число преследователей, обладающих выигрывающей программой.

Впервые задача нахождения поискового числа была поставлена Парсонсом в [67] и независимо вторым автором в [23], но при более ограничительных предположениях о структуре графа и допустимых траекториях. Впрочем, П. А. Головач доказал в [7], что обе формализации эквивалентны, так что в обоих случаях речь идёт об одном и том же поисковом числе. Более того, П. А. Головач свёл проблему нахождения поискового числа к некоторой дискретной задаче ([8]) на соответствующем комбинаторном графе, который иногда мы будем называть *комбинаторной схемой*. В дальнейшем она получила название «задача Парсонса–Петрова», хотя в статьях [67] и [23] речь шла о поиске на топологических графах. Обе работы содержали решение задачи для деревьев. Правда, П. А. Головач обнаружил в рассуждениях Парсонса неточность, но она легко устранялась при естественной корректировке основного результата.

В работе [23] доказано, что поисковое число дерева совпадает с его *степенью ветвления*, топологическим инвариантом, который эффективно вычисляется. Из результатов этой статьи, в частности, следует, что *наименьшее число преследователей, необходимое для успешного завершения поиска на любом дереве, число рёбер которого не превосходит n , равно числу цифр в*

¹На самом деле, для большинства известных пещер составление такой карты — дело безнадёжное.

троичном представлении числа n .

Позднее, когда появились другие поисковые числа, ту величину, о которой шла речь выше, стали называть рёберно–поисковым числом графа G и обозначать $es(G)$.

Упомянутая выше дискретная задача, поставленная на комбинаторном графе, формулируется следующим образом.

Движение каждого преследователя описывается последовательностью ходов. Каждым ходом преследователь может быть

- a) поставлен в вершину,
- b) снят с вершины,
- c) передвинут из вершины в вершину вдоль ребра.

Дискретная задача трактуется как задача *очистки* графа. Первоначально все рёбра предполагаются *загрязнёнными*. Ребро e с концами x, y становится *очищенным* в двух случаях:

- i) либо один преследователь стоит в x , а другой переходит из x в y вдоль ребра e ,
- ii) либо все рёбра, инцидентные x , за исключением e , очищены, и преследователь переходит из x в y вдоль ребра e .

Очищенное ребро e может быть снова загрязнено после удаления или передвижения преследователя, если в этот момент существует не содержащий преследователей путь, соединяющий ребро e с некоторым загрязнённым ребром. Требуется найти минимальное число преследователей, необходимое для очистки всех рёбер графа. Иначе говоря, для каждой выигрывающей программы преследователей (т. е. программы, приводящей к очистке всех рёбер графа) определяется «штраф», равный максимальному числу преследователей, одновременно находящихся на графе. Требуется найти такую выигрывающую программу, для которой этот штраф принимает наименьшее значение.

В работе [65] доказано, что задача вычисления рёберно–поискового числа графа в общем случае является NP –полной. На основе результатов Парсонса–Петрова, авторы работы [65] построили полиномиальный (линейный) алгоритм для вычисления рёберно–поискового числа дерева. Наконец, в той же работе [65] были охарактеризованы графы с рёберно–поисковым числом, не

превосходящим 3. Аналогичные результаты (при участии второго автора) были получены в [30].

Основной трудностью в задаче определения рёберно-поискового числа является доказательство оценки $es(G)$ снизу. Приведём один частный результат, принадлежащий П. А. Головачу (см. [9]), позволяющий, однако, найти рёберно-поисковое число в некоторых нетривиальных случаях.

Пусть G — граф (без петель и кратных рёбер) с множеством вершин VG и множеством рёбер EG . Для всякой вершины $v \in VG$ определяется величина $deg v$ — степень v в графе G , т. е. число всех инцидентных ей рёбер. L называется *циклом* графа G , если L — связный подграф графа G , все вершины которого имеют степень 2 в L . Обозначим через $c(G)$ множество всех циклов графа G . Если $L \in c(G)$, то через $l(L)$ обозначается число вершин в L , т. е. $l(L) = |VL|$.

Тогда имеет место следующее утверждение: *если $deg v \geq 3$ для всех $v \in VG$, то*

$$es(G) \geq \min_{L \in c(G)} \left(\min_{v \in VL} deg v + l(L) \right) - 2.$$

Для некоторых графов эта оценка оказывается точной. *Графом многогранника* будем называть комбинаторную схему его одномерного остова. Упомянутое выше утверждение приводит к следующим результатам:

1. если T — граф тетраэдра, то $es(T) = 4$,
2. если C — граф куба, то $es(C) = 5$,
3. если O — граф октаэдра, то $es(O) = 5$,
4. если K_n — полный граф с n вершинами, $n \geq 4$, то $es(K_n) = n$,
5. если G — полный двудольный граф с долями $V_1 \in VG, V_2 \in VG, |V_1| \geq 3, |V_2| \geq 3$, то $es(G) = \min \{|V_1|, |V_2|\} + 2$.

Позднее было доказано ([16]), что $es(I) = es(D) = 7$, где I, D — графы икосаэдра и додекаэдра соответственно. Обращает на себя внимание совпадение рёберно-поисковых чисел двойственных правильных многогранников. Выяснить, в каких случаях этот факт имеет место для произвольных многогранников, пока не удаётся.

Многие задачи теории поиска рассматривались на графах правильных многогранников. Такой выбор объясняется следующими обстоятельствами.

Как правило, модельные задачи на графах с «большими» поисковыми числами нетривиальны. С другой стороны, их исследование облегчается наличием симметрии, однородности и других упрощающих моментов. В общей ситуации поисковые числа графов удаётся найти лишь в исключительных случаях.

Опишем один способ рассуждения в задачах о поисковых числах, использующий шахматные мотивы. Как уже отмечалось выше, наибольшие трудности возникают при доказательстве оценок поисковых чисел снизу, т. е. при доказательстве того, что некоторого числа преследователей недостаточно для успешного завершения поиска. При доказательстве от противного рассматривается гипотетическая выигрывающая программа Π и выбирается некоторая конечная совокупность B подмножеств графа G .² Далее рассматривается первый ход (с номером k) в программе Π , после которого какое-либо подмножество из B , свободное от преследователей, оказывается очищенным. В некоторых случаях удаётся доказать, что ситуация в этот момент нелегальная, т. е. не может возникнуть при соблюдении всех правил игры. Иногда, чтобы убедиться в этом, необходимо провести ретроградный анализ, состоящих в рассмотрении всевозможных предыдущих ходов, подобно тому, как это делается в шахматной композиции. В других случаях ситуация после k -го хода легальна, но удаётся доказать, что последующие ходы приводят к повторению позиции. Удачный выбор совокупности B может существенно упростить рассуждения.

²Например, в одной задаче поиска на додекаэдре совокупность B состоит из пятиугольников.

2. Вершинно–поисковое число

В работе [58] впервые была рассмотрена новая версия задачи о рёберно–поисковом числе. В этой задаче движение каждого преследователя также описывается последовательностью ходов, но правила игры более простые. Каждым ходом либо преследователь ставится в вершину, либо один из преследователей, находящихся на графе, снимается. Ребро считается очищенным, если его концы заняты преследователями. Повторное загрязнение ребра определяется так же, как и в задаче о рёберно–поисковом числе. Требуется найти минимальную численность группы преследователей, способной очистить все рёбра графа. Это число было названо *вершинно–поисковым числом* графа и для каждого графа G получило стандартное обозначение $ns(G)$.

Величина $ns(G)$ оказалась во многих отношениях более простой, чем $es(G)$. Например, $ns(K_n) = n$ для всех натуральных n , в то время как $es(K_2) = 1$, а $es(K_3) = 2$. Известны многочисленные результаты о связи вершинно–поискового числа с рёберно–поисковым числом. Самый простой из них — очевидное неравенство

$$|ns(G) - es(G)| \leq 1$$

для любого графа G . Следующая теорема доказана в [58].

Пусть H — граф, полученный из G заменой каждого ребра путём длины 3 (помещением на каждое ребро двух вершин степени 2). Тогда $ns(G) = es(H)$.

Известно, что задача нахождения вершинно–поискового числа в общем случае является NP –полной ([58]), для деревьев же разработаны линейные алгоритмы (см., например, [48, 90, 91]).

Сформулируем ещё одну теорему о вершинно–поисковом числе.

В дискретной математике большую роль играют так называемые *графы пересечений*. Графом пересечений называется граф, каждая вершина которого «ассоциируется» с одним из подмножеств некоторого множества, причём вершины графа смежны тогда и только тогда, когда соответствующие подмножества пересекаются.

Важным классом графов пересечений являются *графы интервалов*. Графом интервалов называется граф, вершины которого ассоциируются с интервалами вещественной прямой, причём две вершины считаются смежными тогда и только тогда, когда соответствующие интервалы пересекаются ([40], с. 35).

Кликовым числом графа G называется наибольшее число попарно смежных вершин. Это число обозначается $cl(G)$.

Нетрудно доказать, что для любого графа интервалов I

$$ns(I) = cl(I).$$

Оказывается, это простое утверждение допускает далеко идущее обобщение. В работе [57] введено понятие *интервальной ширины* графа G :

$$iw(G) := \min \{cl(I) : I \text{ — граф интервалов, содержащий } G \\ \text{ в качестве подграфа}\}$$

и доказано, что для любого графа G

$$ns(G) = iw(G).$$

Переходим к изложению результатов П. А. Головача о вершинно–поисковых числах деревьев. Будем говорить, что граф G_1 *содержится* в графе G_2 , если у G_2 имеется такой подграф G , что

1. либо G изоморфен G_1 ,
2. либо из G можно получить граф, изоморфный G_1 , стягиванием некоторых рёбер.

Дерево T назовём *минимальным деревом* с вершинно–поисковым числом k , если $ns(T) = k$ и для любого дерева T_1 , неизоморфного T и содержащегося в T , справедливо неравенство $ns(T_1) < k$.

Обозначим через T_{ns}^k множество всех попарно неизоморфных минимальных деревьев с вершинно–поисковым числом k . В работе [11] множества T_{ns}^k построены индуктивно, и для них решена задача перечисления с помощью подходящей производящей функции.

Величина $|T_{ns}^k|$ растёт с увеличением k чрезвычайно быстро. Например, $|T_{ns}^3| = 1$, $|T_{ns}^4| = 10$, $|T_{ns}^5| = 117480$. Доказано, что порядок роста определяется следующим предельным соотношением

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln |T_{ns}^k|}{k \ln 3} = 1.$$

Аналогичная задача решена и для рёберно–поискового числа ([12]). Обозначим через T_{es}^k множество всех попарно неизоморфных минимальных деревьев с рёберно–поисковым числом k . Величина $|T_{es}^k|$ с увеличением k также

растёт довольно быстро: $|T_{es}^3| = 1$, $|T_{es}^4| = 4$, $|T_{ns}^5| = 1330$. Однако оказалось, что порядок роста этой величины тот же:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln |T_{es}^k|}{k \ln 3} = 1.$$

Известны работы, в которых рассматриваются бинарные операции над графами. Ставится задача вычисления того или иного поискового числа через характеристики операндов. Одна из них ([97]) посвящена *декартову произведению* графов. Напомним, что если G_1, G_2 — графы, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ (т. е. G_1 и G_2 не имеют ни общих рёбер, ни общих вершин), то их декартовым произведением называется граф с множеством вершин $VG_1 \times VG_2$ и такой, что (a_1, b_1) и (a_2, b_2) соединены ребром тогда и только тогда, когда либо $a_1 = a_2$ и $(b_1, b_2) \in EG_2$, либо $b_1 = b_2$ и $(a_1, a_2) \in EG_1$.

Декартовое произведение графов G_1 и G_2 обозначается $G_1 \times G_2$. Упомянутая выше задача для декартового произведения графов, по-видимому, является непростой. Авторам известен лишь следующий результат ([97]): если $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, то

$$es(G_1 \times G_2) \leq \min \{|VG_1| \cdot es(G_2), |VG_2| \cdot es(G_1)\} + 1.$$

П. А. Головачом была рассмотрена другая бинарная операция — *соединение графов*. Эта операция была введена А. А. Зыковым (см., например, [40]).

Пусть G_1, G_2 — графы, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Граф G называется соединением графов G_1 и G_2 , если $VG = VG_1 \cup VG_2$ и $EG = EG_1 \cup EG_2 \cup \{(a, b) : a \in VG_1, b \in VG_2\}$. Соединение графов G_1 и G_2 обозначается $G_1 + G_2$. В работе [9] П. А. Головач получил следующий красивый и нетривиальный результат:

$$ns(G_1 + G_2) = \min \{|VG_1| + ns(G_2), |VG_2| + ns(G_1)\}.$$

Аналогичная задача для рёберно-поискового числа оказалась значительно сложнее. Её решение также получено П. А. Головачом ([9]).

Пусть G — граф. Обозначим через G^k граф, полученный из G добавлением k «висячих» рёбер к каждой вершине графа G . Пусть K_n , как и выше, полный граф с n вершинами, а E_n — пустой граф с n вершинами, т. е. граф, не имеющий ни одного ребра. Пусть G_1, G_2 — графы, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, и пара $\{G_1, G_2\}$ не совпадает ни с одной из пар $\{E_1, E_1\}$, $\{E_1, E_2\}$, $\{E_2, E_2\}$, $\{E_2, K_m\}$, где $m \geq 3$. Пусть также $n_1 = |VG_1|$, $n_2 = |VG_2|$. Тогда

$$es(G_1 + G_2) = \min \{es(G_1^{n_2}) + n_2, es(G_2^{n_1}) + n_1\}.$$

В оставшихся случаях легко доказывается, что

$$\begin{aligned} es(E_1 + E_1) &= es(E_1 + E_2) = 1, \\ es(E_2 + E_2) &= 2, \\ es(E_2 + K_m) &= m + 1 \text{ для } m \geq 3. \end{aligned}$$

Доказанные теоремы позволяют определить вершинно- и рёберно-поисковые числа всех полных n -дольных графов.

Напомним, что граф G называется *полным n -дольным* ($n \geq 2$), если $G = E_{k_1} + \dots + E_{k_n}$. Будем считать, что $k_1 \leq \dots \leq k_n$ и $k = k_1 + \dots + k_n$. Тогда

$$ns(G) = k - k_n + 1.$$

Соответствующее утверждение для рёберно-поискового числа оказывается более сложным. Величина $es(G)$ легко вычисляется, если в G существует вершина, степень которой меньше 3. В противном же случае,

$$es(G) = \begin{cases} k - k_n + 1, & \text{если } k_n \leq 2, \\ k - k_n + 2, & \text{если } k_n > 2. \end{cases}$$

II. Поиск с противодействием

В этом разделе рассматриваются задачи поиска на графе, главной особенностью которых является активное противодействие убегающего команде преследователей. Противодействие заключается в том, что при определённых условиях убегающий может уничтожить одного из участников группы поиска, после чего преследование продолжается в уменьшенном составе. В момент уничтожения преследователя убегающий обнаруживает себя, что для группы поиска является своеобразной информационной компенсацией за потерю этого преследователя. Рассматривается также «шашечная» версия этой задачи. Дополнительное условие, определяющее эту версию, состоит в том, что убегающий *обязан* уничтожить преследователя, если такая возможность ему предоставляется. Обе задачи являются моделями конфликтного поиска с учётом засад и возможных потерь в команде преследователей.

Переходим к точной постановке задачи поиска с противодействием. Ареной поиска является неориентированный связный (комбинаторный) граф G , содержащий, по крайней мере, одно ребро и не имеющий ни петель, ни кратных рёбер. На этом графе рассматривается многошаговая игра преследования, участниками которой являются преследователи P_1, \dots, P_n и убегающий E . Всех участников игры будем называть *игроками*.

На каждом шаге игры все игроки располагаются в вершинах графа G , причём каждая вершина не может быть занята более чем одним игроком. *Ходом* игрока будем называть его переход в смежную вершину. *Ходом команды* является, по определению, ход ровно одного из её участников. Команда преследователей и убегающий делают ходы по очереди (начинают преследователи). Каждый шаг в игре состоит из хода команды преследователей и ответного хода убегающего. Начальные позиции и дальнейшие ходы выбираются сторонами на основе поступающей им информации, о чём будет сказано ниже.

Если после хода одного из преследователей он окажется в вершине, занятой убегающим, то игра завершается в пользу преследователей (в этом случае говорят, что убегающий *пойман*). В свою очередь, если убегающий переходит в вершину, занятую преследователем, то этот преследователь *снимается* с графа, и игра продолжается. Цель команды преследователей — поймать убегающего, цель убегающего — помешать этому.

Переходим теперь к описанию информации, которую получают стороны в течение игры. Убегающему на каждом шаге сообщается полная информация

о расположении преследователей; более того, предполагается, что он «до начала игры» получает информацию о выбранной ими стратегии (точное определение приводится ниже). Таким образом, и в данной формализации речь идёт о задаче *гарантированного* поиска.

Что касается преследователей, то на первом шаге начальное положение убегающего им неизвестно (они его «не видят»), он может находиться в любой вершине графа G , не занятой преследователями. На шаге с номером $k \geq 2$ команда преследователей получает информацию одного из следующих трёх видов:

1. на $(k - 1)$ -ом шаге убегающий был пойман, в этом случае игра завершается;
2. на $(k - 1)$ -ом шаге убегающий снял одного из преследователей, занял его вершину и стал «видимым» для преследователей (информацию о положении убегающего преследователи получают только после его хода «со снятием»);
3. на $(k - 1)$ -ом шаге убегающий сделал ход «без снятия».

Позицией на шаге с номером $k \geq 2$ будем называть информацию, полученную преследователями о всей «предыстории» игры, включая ход убегающего на $(k - 1)$ -ом шаге. Аналогичное определение используется в шахматном кодексе: в понятие позиции включается не только расположение фигур, но и некоторые элементы предыстории, определяющие право на рокировку или взятие «на проходе».

Стратегией команды преследователей назовём тройку $S = \{m, D_0, U\}$, где m — число ходов в игре, D_0 — начальная расстановка преследователей, т. е. множество всех вершин графа, занятых преследователями перед первым ходом, и U — отображение, которое каждой позиции ставит в соответствие ход.

Стратегия называется *выигрывающей*, если она приводит к поимке при любом поведении убегающего, информированного указанным выше образом.

Наименьшую численность команды преследователей, обладающей выигрывающей стратегией, будем называть α -поисковым числом графа G и обозначать $\alpha(G)$. В данном случае α не является числовым параметром, а лишь определяет тип задачи поиска.

Задача с обязательным противодействием («шашечная» версия) отличается от сформулированной выше тем, что на поведение убегающего наклад-

дывается следующее условие: убегающий *обязан* снять преследователя, если такая возможность ему предоставляется.

Наименьшую численность команды преследователей, обладающей выигрывающей стратегией в «шашечной» версии основной задачи, будем называть α_0 -поисковым числом графа G и обозначать $\alpha_0(G)$.

Для некоторых графов величины $\alpha(G)$ и $\alpha_0(G)$ могут сильно отличаться. Например, для $n \geq 4$

$$\alpha(K_n) = n - 2,$$

в то время как $\alpha_0(K_n) \equiv 2$.

Изучению α -поисковых чисел посвящены работы [18, 20, 32, 35], в которых были получены первые результаты, касающиеся поиска с противодействием.

Задача нахождения α -поискового числа для произвольного графа исключительно трудна. Уже случай циклов оказывается нетривиальным. Выяснилось, что с уменьшением числа вершин в цикле α - и α_0 -поисковые числа могут увеличиваться.

В общем случае может оказаться, что $\alpha(H) > \alpha(G)$ для связного подграфа H графа G . Эти «странности» существенно отличают величины $\alpha(G)$ и $\alpha_0(G)$ от других поисковых чисел (таких, как $ns(G)$, $es(G)$ и т. д.).

Сформулируем, например, теорему о циклах ([18]).

Пусть C_n — цикл с n вершинами. Тогда для $n \geq 13$

$$\alpha(C_n) = \alpha_0(C_n) = \begin{cases} 5, & \text{если } n \text{ чётно,} \\ 4, & \text{если } n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Можно показать, что $\alpha_0(C_{12}) = 4$, но $\alpha(C_{12}) = 5$. Для меньших n величины $\alpha_0(G)$ и $\alpha(G)$ вычисляются без труда.

Неудача четырёх преследователей на цикле C_n ($n \geq 13$) с чётным числом вершин объясняется тем, что им никак не удаётся «выиграть темп». Ситуация меняется, если к одной из вершин этого цикла «подвесить» треугольник. Оказывается, α -поисковое число полученного таким образом графа равно 4, в то время как α -поисковое число его подграфа C_n равно 5.

Аналогичная идея под названием «королевский треугольник» используется в эндшпиле шахматной партии для того, чтобы при фиксированном расположении фигур «передать ход» противнику.

В работе [32] рассматриваются графы с «большими» α -поисковыми числами. В частности, даётся характеристика графов с n вершинами, α -поисковое

число которых равно $(n - 1)$ или $(n - 2)$.

Сформулируем полученные результаты.

1. Для любого графа G , $|VG| = n \geq 2$, выполнено неравенство $\alpha(G) \leq n - 1$. $\alpha(G) = n - 1$ тогда и только тогда, когда G — путь или цикл длины 3.
2. Для любого графа G , $|VG| = n \geq 4$, выполнено неравенство $\alpha(G) \leq n - 2$. $\alpha(G) = n - 2$ тогда и только тогда, когда G удовлетворяет одному из трёх условий:
 - (a) $n = 4$, G неизоморфен двудольному графу $K_{1,3}$;
 - (b) $n = 5$ или $n = 6$, G — цикл;
 - (c) $n \geq 4$, G — полный граф.

Описание графов с α -поисковым числом $(n - 3)$ удаётся получить при некоторых дополнительных предположениях.

В работе [20], напротив, рассматриваются графы с «малыми» α -поисковыми числами. Доказано, например, следующее утверждение: для произвольного графа G величина $\alpha(G) = 1$ в том и только в том случае, если G изоморфен двудольному графу $K_{1,n}$ для некоторого k . Остальная часть статьи [20] посвящена деревьям. Чтобы сформулировать её основной результат, дадим необходимые определения.

Для всякого множества $T \subset VG$ символом $G \setminus T$ обозначим граф, полученный из G удалением всех вершин T вместе со всеми инцидентными им рёбрами. Тройку вершин графа назовём *рёберной*, если она содержит ребро, т. е. пару смежных вершин.

Будем говорить, что рёберная тройка *особая*, если граф $G \setminus T$ пустой, и *неособая* в противном случае. Тогда имеет место следующая теорема.

Пусть G — дерево, имеющее более одного ребра. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- i) $\alpha(G) \geq 3$;
- ii) G имеет в качестве подграфа одно из деревьев, представленных на рис. 1;
- iii) каждая рёберная тройка в дереве G неособая.

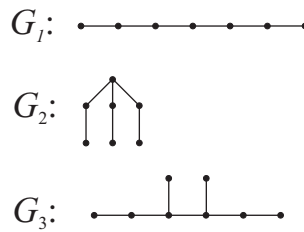


Рис. 1

Следствие: пусть G — дерево, имеющее более одного ребра. Тогда $\alpha(G) = 2$ в том и только в том случае, если G неизоморфен $K_{1,n}$ и в G существует, по крайней мере, одна особая тройка.

Для некоторых классов деревьев дана более детальная характеристика, проливающая свет на структуру деревьев с α -поисковым числом, равным 2. Например, имеет место следующий нетривиальный факт.

Пусть G — дерево, у которого есть только одна вершина A степени большей двух. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- i) $\alpha(G) \leq 2$;
- ii) вершине A инцидентны не более чем два невисячих ребра, и в дереве G не более трёх вершин степени 2;
- iii) в дереве G существует не более двух вершин степени 2 или существует такое $n \geq 7$, что граф G изоморфен одному из деревьев, представленных на рис. 2.

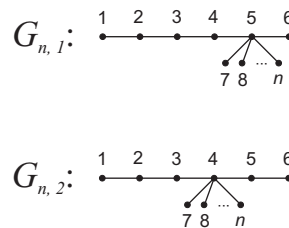


Рис. 2

В работе [35] найдены α -поисковые числа для всех полных и полных n -дольных графов. Для полных графов ответ такой:

$$\alpha(K_2) = 1,$$

$$\alpha(K_3) = 2,$$

$$\alpha(K_n) = n - 2 \text{ для } n \geq 4.$$

Пусть теперь G является полным n -дольным графом. Удобно считать, что все его вершины правильно раскрашены в n цветов, а классы «цветности» пронумерованы в порядке возрастания их мощности: $|M_1| \leq |M_2| \leq \dots \leq |M_n|$.

Обозначим через $M = \bigcup_{i=1}^{n-1} M_i$. Тогда имеет место следующая теорема.

Пусть G — полный n -дольный граф. Тогда

1. если $n = 2$, то $\alpha(G) = |M_1|$;
2. если $n = 3$ и $|M_2| = 1$, то $\alpha(G) = 2$;
3. если $n = 3$ и $|M_2| \geq 2$, то $\alpha(G) = |M| - 1$;
4. если $n \geq 4$, то $\alpha(G) = |M| - 1$.

Найдены также α -поисковые числа некоторых графов, «близких» к n -дольным.

В работе [35] рассмотрен также один интересный вариант задачи об α -поисковом числе. А именно, вводится дополнительное ограничение на число ходов в допустимой стратегии команды преследователей. Если число m , максимальное число ходов, фиксировано, то искомую величину называют α_m -поисковым числом, которое для каждого графа G обозначается $\alpha_m(G)$. Задачи подобного рода также исключительно трудны. Уже случай $m = 2$ («двухходовка») оказывается нетривиальным. Тем не менее в работе [35] получено полное решение задачи об α_2 -поисковом числе.

Сформулируем этот важный результат. Будем говорить, что множество $M \subset VG$ обладает свойством A , если $F := G(M)$ (т. е. подграф графа G , порождённый множеством M) не имеет изолированных вершин и имеет место, по крайней мере, одно из следующих двух утверждений:

1. EF не является паросочетанием в G ,
2. EF содержит висячие (в G) рёбра.

Введём в рассмотрение следующий класс множеств:

$$W := \{M \subset VG : M \text{ обладает свойством } A, |M| \geq 3, \text{ граф } G \setminus M \text{ — пустой}\}.$$

Тогда справедливо следующее утверждение: если граф G неизоморфен ни одному графу вида $K_{1,n}$, то $W \neq \emptyset$ и

$$\alpha_2(G) = \min_{M \in W} |M| - 1.$$

Основы теории поиска с противодействием были заложены в дипломных работах А. Б. Зеленовской, В. О. Капилевич, М. А. Тетерятниковой и А. В. Чумановой. Каждая из этих работ была удостоена премии Правительства Санкт-Петербурга.

III. Поиск с ограничениями на скорости

В этом разделе рассматриваются задачи поиска на топологических графах. Предполагается, что вершины графа G суть точки в трёхмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , а рёбра — попарно непересекающиеся конечнозвенные ломаные с концами в соответствующих вершинах, замкнутые в \mathbb{R}^3 .

Преследователи P_1, \dots, P_n и убегающий E используют *простые* движения:

$$\begin{aligned} (P_i): \quad \dot{x}_i &= u_i, \quad \|u_i\| \leq 1, \quad i \in \overline{1, n}, \\ (E): \quad \dot{y} &= u_0, \quad \|u_0\| \leq \mu, \end{aligned}$$

где $\|\dots\|$ — евклидова норма в \mathbb{R}^3 . *Допустимыми управлениями* игроков являются кусочно постоянные вектор-функции, заданные на произвольных промежутках $[0, T]$, причём для траекторий всех участников граф G является фазовым ограничением.

Допустимой программой Π команды преследователей является произвольный набор траекторий

$$\{x_1(t), \dots, x_n(t), t \in [0, T]\}.$$

Программа Π называется *выигрывающей*, если для любой траектории $y(t)$, $t \in [0, T]$, существуют такой номер $i \in \overline{1, n}$ и такой момент $\tau \in [0, T]$, что $x_i(\tau) = y(\tau)$. В этих условиях, как и выше, речь пойдёт о проблемах *гарантированного* поиска.

Ставится задача о нахождении наименьшей численности команды преследователей, обладающей выигрывающей программой.

Искомая величина называется μ -*поисковым числом* графа G и обозначается $s^\mu(G)$.

Впервые поставленная задача рассматривалась вторым автором в работе [22]. Было доказано, что если граф G имеет, по крайней мере, одну вершину степени большей 2, то $s^\mu(G) \geq 2$ для всех $\mu > 0$, причём если μ достаточно мало, то $s^\mu(G) = 2$. Иначе говоря, на любом графе G двое преследователей всегда имеют выигрывающую программу, если их преимущество в скорости (т. е. число μ^{-1}) достаточно велико. В доказательстве этого утверждения существенную роль играет предположение о том, что допустимыми управлениями преследователей являются кусочно постоянные функции. В классе измеримых управлений (довольно специального вида) удаётся доказать, что

на любом графе поимку сможет осуществить один преследователь, если его преимущество в скорости достаточно велико. Соответствующий «обход» графа был назван в монографии [39] траекторией Петрова.

Кроме того, в работе [22] рассмотрен граф T , являющийся одномерным остовом (правильного) тетраэдра. Доказано, что

$$s^\mu(T) \leq 4 \text{ для всех } \mu \in [0, \infty),$$

$$s^\mu(T) \leq 3 \text{ для всех } \mu \in [0, 1),$$

$$s^\mu(T) = 2 \text{ для всех } \mu \in (0, \frac{1}{4}],$$

$$s^0(T) = 1.$$

В дальнейшем это утверждение было обобщено Ф. В. Фоминым ([39]), который доказал, что $s^1(T) = 4$ и $s^\mu(T) = 2$ для $\mu \in (0, \frac{1}{3}]$. Является ли последняя оценка точной неизвестно.

Вычисление μ -поискового числа представляет значительные трудности, а построение функции $s^\mu(G)$ для всех $\mu \in [0, \infty)$ возможно лишь в исключительных случаях. Поэтому большой интерес представляют результаты, так или иначе облегчающие решение этой задачи. В этом направлении важные результаты получены Ф. В. Фоминым с использованием так называемых *дискретных программ* ([39]).

Программа Π команды преследователей, заданная для $t \in [0, T]$, T — натуральное число, называется *дискретной*, если для любого $k \in \overline{1, T}$ на промежутке времени $[k - 1, k]$ каждый из преследователей либо стоит в вершине графа, либо переходит из вершины в смежную вершину с максимальной скоростью.

Доказано, что если длины рёбер графа равны, а максимальная скорость убегающего равна 1, то из существования выигрывающей программы n преследователей следует наличие у них дискретной выигрывающей программы некоторого специального вида. Доказывается также, что таких программ конечное число. Таким образом, в рассматриваемом случае решение задачи сводится к конечному перебору. В общей ситуации такое сведение, по-видимому, невозможно.

Для больших μ имеет место следующая теорема, принадлежащая П. А. Головачу ([9]): *пусть $\mu > 4L \cdot l^{-1}$, где l — длина кратчайшего ребра графа G ,*

а L — сумма длин всех его рёбер. Тогда

$$s^\mu(G) = es(G).^3$$

Для некоторых графов полученная оценка может быть значительно улучшена. Следующий нетривиальный факт доказан Ф. В. Фоминым ([37]): *если граф G — дерево, то $s^\mu(G) = es(G)$ для всех $\mu \geq 1$.*

При $\mu < 1$ начинают играть роль длины рёбер. В работе [38] Ф. В. Фомин рассмотрел дерево T с четырьмя вершинами степени три O, A_1, A_2, A_3 и шестью вершинами степени один $B_1, C_1, B_2, C_2, B_3, C_3$, в котором для каждого $i \in \overline{1, 3}$ вершина A_i смежна вершине O и вершинам B_i, C_i . Известно, что всякое дерево с рёберно-поисковым числом, большим 2, содержит комбинаторную схему T в качестве подграфа.

Будем обозначать через $d(x, y)$ длину ребра с концами x, y , а через $a_i = d(O, A_i)$, $i \in \overline{1, 3}$. Можно считать, что $a_1 \leq a_2 \leq a_3$. Получен следующий результат:

если $\max\{d(B_1, A_1), d(C_1, A_1)\} \leq a_1$ и

$c := (a_2 + a_3) \cdot (2a_1 + a_2 + a_3)^{-1}$, то

$$s^\mu(T) = \begin{cases} 3, & \text{если } \mu > c, \\ 2, & \text{если } 0 < \mu \leq c. \end{cases}$$

В общем случае найти функцию $s^\mu(T)$ для всех μ не удаётся.

Нетривиальные проблемы возникают и при рассмотрении θ -графа, т. е. топологического графа, «гомеоморфного букве θ ». В этом случае Ф. В. Фомин доказаны следующие три утверждения ([39]).

1. На любом θ -графе при $\mu < 1$ существует выигрывающая программа двух преследователей.
2. Существует θ -граф, на котором при $\mu = 1$ поимка двумя преследователями невозможна.
3. Для каждого $\mu > 1$ существует такой θ -граф, на котором поимка двумя преследователями возможна.

Переходим к изложению результатов о возможностях группы поиска, состоящей из двух преследователей. В работе [39] Ф. В. Фомин ввёл следующие

³Здесь и далее характеристики, введённые для комбинаторных графов, используются и при рассмотрении топологических графов. В этих случаях имеются в виду их комбинаторные схемы.

две характеристики графа G :

$$M_2(G) := \sup \{ \mu : s^\mu(G') \leq 2 \text{ для всех } G' \in I(G) \},$$

$$m_2(G) := \sup \{ \mu : \text{найдётся такой граф } G' \in I(G), \text{ что } s^\mu(G') \leq 2 \}.$$

Здесь $I(G)$ — класс всех топологических графов, изоморфных G .

Доказано, что $M_2(G) > 0$ для всякого графа G . Этот результат является обобщением основной теоремы работы [22], в которой, напомним, было доказано, что для всякого топологического графа G существует такое положительное число δ (зависящее от длин рёбер графа G), что если $\mu \leq \delta$, то $s^\mu(G) \leq 2$. Из неравенства $M_2(G) > 0$ следует, что число δ с указанным свойством можно выбрать зависящим только от комбинаторной схемы графа G .

Что касается величины $m_2(G)$, то интерес представляют условия, при которых $m_2(G) = +\infty$, т. е. для любого μ существует такой топологический граф $G_\mu \in I(G)$, что

$$s^\mu(G_\mu) \leq 2.$$

Сформулируем одно достаточное условие, доказанное Ф. В. Фоминым в [39]. Простую цепь W в графе G называют *почти гамильтоновой*, если она содержит все вершины графа G степени ≥ 3 . Будем говорить, что почти гамильтонова цепь $W = (v_1, \dots, v_n)$ графа G удовлетворяет *условию внешнепланарности*, если для всех $1 \leq i < k < j < l \leq n$ справедливо следующее утверждение: если $(v_i, v_j) \in EG$, то вершины v_k, v_l несмежны. Оказывается, *если в графе G существует почти гамильтонова цепь, удовлетворяющая условию внешнепланарности, то $m_2(G) = +\infty$.*

Результаты Ф. В. Фомина по теории поиска были удостоены I премии на Конкурсе молодых учёных СПбГУ в 1994 году.

Для группы поиска, состоящей из двух преследователей, С. В. Лунегов с помощью компьютера получил следующие интересные результаты ([62]). Обозначим через T, C, O одномерные остовы тетраэдра, куба и октаэдра соответственно и через K_n полный топологический граф с n вершинами и единичными рёбрами.

1. Если $\mu \leq \frac{1}{3}$, то существует дискретная выигрывающая программа двух преследователей на графе T .
2. Если $\mu \leq \frac{1}{5}$, то существует дискретная выигрывающая программа двух преследователей на графе C .

3. Если $\mu \leq \frac{1}{4}$, то существует дискретная выигрывающая программа двух преследователей на графе O , состоящая из 38 шагов.
4. Если $\mu \leq \frac{1}{4}$, то существует дискретная выигрывающая программа двух преследователей на графе K_5 , состоящая из 19 шагов.
5. Если $\mu \leq \frac{1}{7}$, то существует дискретная выигрывающая программа двух преследователей на графе K_6 , состоящая из 58 шагов.

Если утверждения 1 и 2 были доказаны без помощи компьютера, то доказать утверждения 3 – 5 без помощи компьютера практически невозможно. В каждом из последних трёх случаев компьютер предъявил искомую программу. Тот факт, что она является выигрывающей, легко проверяется.

С другой стороны, компьютер «утверждает», что не существует дискретной выигрывающей программы двух преследователей на графе G в следующих случаях:

1. $G = T, \mu = (3 - \varepsilon)^{-1}$;
2. $G = C, \mu = (5 - \varepsilon)^{-1}$;
3. $G = O, \mu = (4 - \varepsilon)^{-1}$;
4. $G = K_5, \mu = (4 - \varepsilon)^{-1}$;
5. $G = K_6, \mu = (7 - \varepsilon)^{-1}$;

где $\varepsilon = 10^{-6}$. К сожалению, мы не можем убедиться в справедливости этого утверждения и должны полностью довериться компьютеру. Вместе с тем можно предположить, что в рассмотренных случаях «критическое» значение преимущества преследователей в скорости (т. е. μ^{-1}) является целым числом.

IV. Задачи типа «увидел–поймал»

Рассмотрим одно обобщение задачи о поисковом числе для арен поиска более сложной топологической структуры.

Пусть множество M , на котором ставится задача поиска, снабжено структурой топологического пространства, d — некоторая метрика на нём (вообще говоря, никак не связанная с этой структурой), ε — неотрицательное число, характеризующее «радиус захвата». Путь y на M , т. е. непрерывное отображение $[0, 1] \rightarrow M$, интерпретируется как «траектория» одного из участников поиска. Совокупность путей

$$\{x_i, i = 1, \dots, n\}$$

называется *выигрывающей* программой для группы n преследователей, если для любого пути y («траектории убегающего») найдётся такой момент $\tau \in [0, 1]$, что $d(x_i(\tau), y(\tau)) \leq \varepsilon$ для некоторого $i \in \overline{1, n}$.

В работах [31, 36] предполагалось, что M является замкнутым полигонально связным подмножеством евклидова пространства \mathbb{E}^3 с топологией, индуцированной из \mathbb{E}^3 , а траектории преследователей и убегающего суть непрерывные функции времени со значениями в M .

Ставится вопрос об определении наименьшей численности группы преследователей, имеющей выигрывающую программу. Отметим, что большинство задач поиска укладываются в описанную схему.

Введём на M следующую метрику d_0 . Пусть a и b — две различные точки M и $L(a, b)$ — множество всех ломаных, лежащих в M и соединяющих точки a и b . Для каждой такой ломаной l через $g(l)$ обозначим число её звеньев. Положим $d_0(a, b) = \min \{g(l) : l \in L(a, b)\}$ и $d_0(a, a) = 0$.

Рассмотрим теперь поставленную выше задачу для $\varepsilon = 1$. Тогда условие $d_0(x_i(\tau), y(\tau)) \leq 1$ означает, что отрезок с концами $x_i(\tau)$, $y(\tau)$ целиком лежит в M , то есть в момент τ преследователь с номером i «видит» убегающего. Такие задачи называются иногда задачами «увидел–поймал».

Обозначим через $\beta(M)$ наименьшую численность группы преследователей, обладающих выигрывающей программой в поставленной выше задаче поиска. Некоторые достаточные условия равенства $\beta(M) = 1$ получены Сузуки и Ямашито в [96].

В работе [31] получен следующий результат: если в множестве M существует «равносторонний» треугольник, сторона которого (в метрике d_0) не меньше 6, то $\beta(M) \geq 2$.

Для некоторых множеств M это достаточное условие является также и необходимым.

Далее рассматривается задача типа «увидел–поймал», называемая задачей ε –поиска.

Задача ε –поиска, впервые поставленная П. А. Головачом в работе [10] (и потому называемая здесь *задачей Головача*), является обобщением дискретной задачи гарантированного поиска и состоит в следующем. Рассматривается конечный связный топологический граф без петель и кратных рёбер, вершины которого — точки в \mathbb{R}^3 , а рёбра — непересекающиеся конечнозвенные ломаные с концами в соответствующих вершинах. Будем считать, что концы ребра (вершины графа) не принадлежат ребру.

На графе G находятся n преследователей P_1, \dots, P_n и убегающий E . Все игроки обладают в \mathbb{R}^3 простыми движениями:

$$\begin{aligned} (P_i): \quad \dot{x}_i &= u_i, \quad \|u_i\| \leq 1, \quad i \in \overline{1, n}, \\ (E): \quad \dot{y} &= u_0, \end{aligned}$$

где $\|\dots\|$ — евклидова норма, причём G является для всех участников фазовым ограничением. Допустимыми управлениями игроков являются кусочно постоянные функции, заданные на произвольных промежутках $[0, T]$. Таким образом, допустимые траектории преследователей и убегающего представляют собой кусочно аффинные вектор–функции со значениями в G .

Обозначим через ρ внутреннюю метрику графа G , т. е. длину кратчайшего (по евклидовой норме) пути, соединяющего две точки и целиком лежащего в графе.

Убегающий считается пойманным преследователем, если в некоторый момент они находятся на расстоянии, не превосходящем некоторого неотрицательного числа ε , характеризующего *радиус поимки*. Проблема ε –поиска состоит в определении минимального числа преследователей, необходимого для поимки убегающего. Искомое минимальное число преследователей называется ε –*поисковым числом* и обозначается $s_\varepsilon(G)$.

При $\varepsilon = 0$ поимка убегающего вырождается в поточечную поимку, и задача Головача для нулевого радиуса поимки совпадает с задачей нахождения рёберно–поискового числа $es(G)$.

Для произвольного графа ε –поисковое число, как и рёберно–поисковое число, может быть вычислено с помощью конечной процедуры (см. [9, 10]). Приведём здесь результат [10], позволяющий при исследовании ε –поисковых

чисел ограничиться рассмотрением программ преследователей специального вида.

Пусть $\varepsilon \geq 0$, $s_\varepsilon(G) \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует выигрывающая программа Π команды n преследователей на G такая, что в каждый момент времени из множества задания программы Π на любом ребре графа G находятся не более двух преследователей.

Это утверждение можно усилить, если рассматривать достаточно малый радиус поимки.

Пусть G — некоторый граф, l — длина кратчайшего в G ребра, $0 \leq \varepsilon < \frac{l}{4}$, $s_\varepsilon(G) \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует выигрывающая программа Π команды n преследователей на G такая, что в каждый момент времени из интервала задания Π на любом ребре графа G находится не более одного преследователя.

Исследование $s_\varepsilon(G)$ как функции от ε было предпринято в работе [10]. В частности, было показано, что $s_\varepsilon(G)$ — невозрастающая кусочно постоянная непрерывная справа функция.

Рассмотрим следующую задачу: зафиксируем число преследователей и поставим вопрос о нахождении минимального радиуса поимки, с которым команда указанной численности может поймать убегающего на графе. Последнее утверждение гарантирует существование искомого минимального радиуса поимки. Эта новая задача, в некотором смысле двойственная к задаче Головача. Зная решение задачи о нахождении минимального радиуса поимки на графе G для всех натуральных k , мы обладаем полной информацией для построения функции Головача для графа G . В некоторых случаях формулировки в терминах двойственной задачи оказываются более подходящими при доказательстве тех или иных свойств функции Головача.

Обозначим через $\varepsilon_G(k)$ минимальный радиус поимки, с которым k преследователей могут поймать убегающего на графе G .

Решение двойственной задачи на дереве для одного преследователя приведено в [1].

Пусть $Z = (a_1, \dots, a_n)$ — произвольная диаметральная цепь (т. е. простой путь наибольшей длины) дерева T , через l_i , $i = 1, \dots, m$, обозначим длины всевозможных путей, ведущих из вершин Z в висячие вершины дерева T и имеющих с Z только одну общую вершину. Тогда

$$\varepsilon_T(1) = \frac{1}{2} \max_{i \in \overline{1, m}} l_i.$$

Задача ε -поиска не является дискретной, многое зависит от длин рёбер графа, поэтому исключительную ценность имеют утверждения, позволяющие оценивать ε -поисковые числа для некоторых классов графов. Например, следующие соотношения (см. [10]) показывают связь между рёберно-поисковым числом $es(G)$ и ε -поисковым числом при малых значениях радиуса поимки.

Пусть l — длина наименьшего ребра графа G . Тогда

1. $s_\varepsilon(G) = s(G)$ при $0 \leq \varepsilon < \frac{l}{4}$;
2. $s_\varepsilon(G) \geq s(G) - 1$ при $0 \leq \varepsilon < \frac{l}{2}$.

Предъявленные оценки точны в классе деревьев (см. [3]).

Ещё одна оценка ε -поискового числа для радиуса поимки, меньшего длины кратчайшего ребра графа, опубликована в [26], для её описания нам понадобятся некоторые дополнительные определения.

Обозначим через $G'(v)$ подграф графа G , порождаемый множеством смежных с v вершин, а через $n_k(G, v)$ — число компонент связности графа $G'(v)$ с ровно k вершинами. Определим величины

$$c(G, v) := \sum_{k=1}^{\infty} n_k(G, v) \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$$

и

$$c(G) := \min_{v \in VG} c(G, v).$$

Пусть l — длина наименьшего ребра графа G , $0 \leq \varepsilon < l$. Тогда

1. $s_\varepsilon(G) \geq c(G)$;
2. если для каждой вершины $v \in VG$ все коэффициенты $n_k(G, v)$ с нечётными номерами k равны 0, то $s_\varepsilon(G) \geq c(G) + 1$.

Приведённые выше утверждения позволили построить функции Головача для графов некоторых правильных многогранников (см. [15, 26, 52]).

Пусть T — граф тетраэдра с рёбрами единичной длины. Тогда

$$s_\varepsilon(T) = \begin{cases} 4, & 0 \leq \varepsilon < 0.25, \\ 3, & 0.25 \leq \varepsilon < 0.5, \\ 2, & 0.5 \leq \varepsilon < 1.5, \\ 1, & 1.5 \leq \varepsilon; \end{cases}$$

Пусть C — граф куба с рёбрами единичной длины. Тогда

$$s_\varepsilon(C) = \begin{cases} 5, & 0 \leq \varepsilon < 0.25, \\ 4, & 0.25 \leq \varepsilon < 0.5, \\ 3, & 0.5 \leq \varepsilon < 1, \\ 2, & 1 \leq \varepsilon < 3, \\ 1, & 3 \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Пусть O — граф октаэдра с рёбрами единичной длины. Тогда

$$s_\varepsilon(O) = \begin{cases} 5, & 0 \leq \varepsilon < 0.25, \\ 4, & 0.25 \leq \varepsilon < 0.5, \\ 3, & 0.5 \leq \varepsilon < 1, \\ 2, & 1 \leq \varepsilon < 2, \\ 1, & 2 \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Однако задача ε -поиска решена не для всех графов правильных многогранников. Приведём здесь в качестве гипотезы функции Головача для графа икосаэдра I и додекаэдра D с рёбрами единичной длины.

$$s_\varepsilon(I) = \begin{cases} 7, & 0 \leq \varepsilon < 0.25, \\ 6, & 0.25 \leq \varepsilon < 0.5, \\ 4, & 0.5 \leq \varepsilon < 1, \\ 3, & 1 \leq \varepsilon < 1.25, \\ 2, & 1.25 \leq \varepsilon < 3, \\ 1, & 3 \leq \varepsilon. \end{cases}$$

$$s_\varepsilon(D) = \begin{cases} 7, & 0 \leq \varepsilon < 0.25, \\ 6, & 0.25 \leq \varepsilon < 0.5, \\ 4, & 0.5 \leq \varepsilon < 1.5, \\ 3, & 1.5 \leq \varepsilon < 2.25, \\ 2, & 2.25 \leq \varepsilon < 5, \\ 1, & 5 \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Построение функции Головача для произвольного графа является чрезвычайно трудной задачей, которая осложняется ещё и тем, что функция Головача для некоторых графов может иметь *неединичные скачки*: увеличение численности преследователей необязательно позволяет осуществить поимку с меньшим радиусом. Этот эффект можно проиллюстрировать на примере полных графов (см. [15, 26]).

Пусть K_n — полный граф с n вершинами и рёбрами единичной длины. Тогда

$$s_\varepsilon(K_n) = \begin{cases} n, & 0 \leq \varepsilon < 0.25, \\ n - 1, & 0.25 \leq \varepsilon < 0.5, \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil, & 0.5 \leq \varepsilon < 1, \\ 2, & 1 \leq \varepsilon < 1.5, \\ 1, & 1.5 \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Функция Головача для K_n , $n \leq 5$, — невырожденная, т. е. имеет только единичные скачки. Уже для дерева K_6 скачок в точке 0.5 будет двойным. Для произвольного N существует такое натуральное число n , что скачок функции Головача для дерева K_n больше N .

В связи с выявлением *нетривиальных* (неединичных) скачков функции Головача для полных графов, возникает вопрос, для каких графов функция Головача имеет только единичные скачки. Первоначальная гипотеза о невырожденности функции Головача для любого планарного графа опровергается примерами деревьев, построенными в [1], функция Головача для которых имеет скачок высоты 2. Таким образом, единичные скачки функции Головача не гарантированы даже для класса деревьев.

Перейдём к результатам, касающимся свойств скачков функции Головача для деревьев. Введём новые определения.

Будем говорить, что преследователь P_i , движущийся по траектории $x_i(\cdot)$ в программе Π , ε -близок (ε -неблизок) к точке дерева a в некоторый момент t , если $\rho(a, x_i(t)) \leq \varepsilon$ ($\rho(a, x_i(t)) > \varepsilon$).

Вершину степени три или более будем называть *существенной*. Существенную вершину будем называть ε -критической, если она находится на расстоянии 2ε от некоторой другой существенной вершины.

Как правило, наибольшие трудности возникают при оценке ε -поискового числа снизу, т. е. при доказательстве того, что некоторого числа преследователей недостаточно для успешного завершения ε -поиска. Для решения этого

вопроса часто полезным оказывается следующее утверждение (см. [2]).

Пусть от вершины a дерева T отходят три ветви V_i , $i = 1, 2, 3$, для каждой из которых выполнено следующее: в любой программе команды k преследователей, выигрывающей в задаче ε -поимки на V_i , найдется момент времени, в который каждый из преследователей ε -неблизок к a . Тогда команда k преследователей не может успешно завершить ε -поиск на T .

Достаточное условие единичного скачка найдено в [2] и состоит в следующем.

Рассмотрим дерево T и $\varepsilon > 0$, пусть T не содержит ε -критических вершин, а k преследователей ловят убегающего с радиусом поимки ε . Тогда группа из $k + 1$ преследователей осуществляет δ -поимку на T , где $\delta < \varepsilon$.

Это условие не является необходимым, оно лишь гарантирует единичный скачок для всех таких $\varepsilon > 0$, относительно которых известно, что никакие две существенные вершины не лежат на расстоянии 2ε друг от друга. Ясно, что для произвольного дерева T указанное условие (т. е. отсутствие ε -критических вершин) выполнено для всех значений ε , кроме конечного числа.

Ограничение на число рёбер в дереве приводит к следующему результату [1].

Пусть дерево T имеет не более 27 рёбер. Тогда функция Головача для дерева T имеет только единичные скачки.

Оценка числа рёбер здесь является точной: построенный в [1] пример дерева с двойным скачком, который упоминался ранее, содержит 28 рёбер. Кроме того, этот пример содержит одну вершину степени 4, а степень остальных не превосходит трёх. Ограничения на степень вершин дерева не приводят к существенному улучшению результата, а именно *функция Головача для дерева T , содержащего не более 28 рёбер и вершины степени не более трёх, имеет только единичные скачки (как и прежде, оценка числа рёбер точна).*

Упомянем здесь, что скачок функции Головача для деревьев при увеличении численности преследователей до двух всегда единичный [1].

Как уже было отмечено, высота скачков функции Головача для полных графов может быть сколь угодно большой. Аналогичное утверждение, как показано в [3], верно и для деревьев, что позволяет утверждать следующее.

Для произвольного натурального N существует такое дерево T , функция Головача которого имеет скачок, больше N .

Будем называть ε -поисковое число *монотонным* для связного подграфа

H графа G , если выполнено неравенство $s_\varepsilon(H) \leq s_\varepsilon(G)$. В условии пото-
 чечной поимки, указанное неравенство, очевидно, выполняется для каждого
 подграфа произвольного графа. Монотонность ε -поискового числа при лю-
 бом неотрицательном ε доказана для случая деревьев в [2]. Хорошо известно,
 что в общем случае ε -поисковое число не является монотонным. Например,
 для куба C с рёбрами единичной длины, $s_3(C) = 1$, но если обозначить через
 Z самый длинный цикл в C (его длина равна 8), то $s_3(Z) = 2$ (так как для
 поимки на Z одному преследователю необходимо обладать радиусом поимки
 равным 4). В [4] доказано следующее утверждение.

*Для любого натурального N существуют граф G , его связный подграф H
 и положительное число ε такие, что $s_\varepsilon(H) - s_\varepsilon(G) > N$.*

Достаточное условие монотонности ε -поискового числа, а также его уточ-
 нение для некоторых графов, содержащих полный подграф, опубликованы
 в [4].

*Пусть G — граф, l — длина наименьшего ребра G , H — произвольный
 связный подграф G . Тогда для $0 \leq \varepsilon < \frac{l}{2}$ выполнено неравенство: $s_G(\varepsilon) \geq$
 $s_H(\varepsilon)$.*

*Пусть граф G с рёбрами единичной длины содержит в качестве под-
 графа полный граф с n вершинами и рёбрами единичной длины. Тогда для
 $0 \leq \varepsilon < 1$ выполнено неравенство: $s_G(\varepsilon) \geq s_{K_n}(\varepsilon)$.*

С помощью последнего утверждения легко показать, что функция Голо-
 вача для графа K'_n , $n \geq 5$, полученного из полного графа с рёбрами единичной
 длины K_n удалением произвольного ребра, совпадает с функцией Головача
 графа K_{n-1} [4].

Далее рассмотрим проблемы, возникающие при *малых изменениях длин*
рёбер дерева.

Зафиксируем комбинаторную схему некоторого дерева T , $|ET| = n$, пе-
 ренумеруем рёбра T . Тогда каждому дереву выбранной комбинаторной схе-
 мы сопоставим набор $(l_1, \dots, l_n) \in (0, \infty)^n$, где l_i — длина i -го ребра. Пусть
 на множестве $(0, \infty)^n$ введена стандартная топология произведения. Авторы
 формулируют следующую гипотезу: множество всех графов фиксированной
 комбинаторной схемы с невырожденной функцией Головача в этой топологии
 открыто и плотно. Некоторые шаги в этом направлении предприняты в [3],
 где доказано следующее утверждение.

*Для произвольного дерева T существует такое дерево T' , полученное
 сколь угодно малым изменением длин рёбер дерева T , что функция Головача*

для T' невырождена.

В цикле работ [13, 14] вводится другое обобщение задачи о поисковом числе графа, существенное отличие которого от задачи о нахождении ε -поискового числа заключается в ином определении метрики на графе.

Пусть G — топологический граф, введём метрику d на графе. Положим $d(x, x) = 0$ для любого $x \in G$. Если $x, y \in G$, $x \neq y$, то $d(x, y)$ совпадает с минимальным натуральным k , таким, что путь из x в y , полностью лежащий в графе, пересекает k рёбер.

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Убегающий считается пойманным, если в некоторый момент он сблизится с хотя бы одним из преследователей на расстояние k во введённой метрике d . Минимальное число преследователей, необходимое для поимки убегающего в описанной задаче, называется k -поисковым числом и обозначается $\sigma_k(G)$. Следует отметить, что при $k = 0$ k -поисковое число совпадает с рёберно-поисковым числом, а при $k = 1$ — с l -поисковым числом, рассмотренным в работах [33, 34]. Заметим, что k -поисковое число графа является топологическим инвариантом графа. Как показано в [14], задача определения k -поискового числа сводится к дискретной задаче, и вследствие этого она может быть эффективно решена для некоторых классов графов.

Так в работе [14] задача нахождения k -поискового числа решена для графов интервалов. Введём некоторые определения.

Через K_n обозначим полный граф с n вершинами, через E_m — пустой граф с m вершинами. Тогда K_n^m обозначает граф, полученный из графов K_n и E_m соединением рёбрами каждой вершины первого графа с каждой вершиной второго.

Пусть G — граф интервалов, $n = cl(G)$ — его кликовое число. Тогда

$$\sigma_0(G) = \begin{cases} n - 1, & \text{если либо } n = 2 \text{ и } K_1^3 \text{ не является подграфом } G, \\ & \text{либо } n = 3 \text{ и } K_2^3 \text{ не является подграфом } G, \\ n, & \text{если либо } n = 1, \\ & \text{либо } n = 2 \text{ и } K_1^3 \text{ — подграф } G, \\ & \text{либо } n = 3 \text{ и } K_2^3 \text{ — подграф } G, \\ & \text{либо } n \geq 3 \text{ и } K_{n-1}^3 \text{ не является подграфом } G, \\ n + 1, & \text{если } n \geq 4 \text{ и } K_{n-1}^3 \text{ — подграф } G; \end{cases}$$

$$\sigma_1(G) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, 2, \\ 2, & \text{если } n \geq 3; \end{cases}$$

$$\sigma_k(G) = 3, k \geq 2.$$

Как следствие последних соотношений, для $n \geq 4$ справедлива формула для полного графа K_n :

$$\sigma_k(K_n) = \begin{cases} n, & k = 0, \\ 2, & k = 1, \\ 1, & k = 2. \end{cases}$$

Теоремы о k -поисковых числах графов правильных многогранников приведены в работах [13,25], результаты которых содержатся в следующих утверждениях.

Пусть T — граф тетраэдра. Тогда

$$\sigma_k(T) = \begin{cases} 4, & k = 0, \\ 2, & k = 1, \\ 1, & k \geq 2. \end{cases}$$

Пусть C — граф куба. Тогда

$$\sigma_k(C) = \begin{cases} 5, & k = 0, \\ 2, & k = 1, 2, \\ 1, & k \geq 3. \end{cases}$$

Пусть O — граф октаэдра. Тогда

$$\sigma_k(O) = \begin{cases} 5, & k = 0, \\ 2, & k = 1, \\ 1, & k \geq 2. \end{cases}$$

Пусть I — граф икосаэдра. Тогда

$$\sigma_k(I) = \begin{cases} 7, & k = 0, \\ 4, & k = 1, \\ 2, & k = 2, \\ 1, & k \geq 3. \end{cases}$$

Пусть D — граф додекаэдра. Тогда

$$\sigma_k(D) = \begin{cases} 7, & k = 0, \\ 4, & k = 1, \\ 3, & k = 2, \\ 2, & k = 3, 4, \\ 1, & k \geq 5. \end{cases}$$

В работе [13] доказано, что для всякого натурального k задача вычисления k -поискового числа является NP -трудной.

V. Приложения

Удивительны связи задач о поисковых числах с проблемами, на первый взгляд, не имеющими никакого отношения к поиску. Далее обсуждаются многочисленные приложения теории гарантированного поиска в различных областях науки и техники.

1. Теория сверхбольших интегральных схем (СБИС).

Начнём с формальных определений.

Линейной укладкой (linear layout) графа G называется биекция

$$L : \{1, \dots, n\} \rightarrow G, n = |VG|,$$

т. е. некоторая нумерация вершин графа G .

Множество всех линейных укладок графа G обозначим через $\mathcal{L}(G)$.

Положим

$$cw(G, L) := \max_{i \in \overline{1, n}} |\{(u, v) \in EG : L^{-1}(u) < i, L^{-1}(v) \geq i\}|$$

и

$$cw(G) := \min_{L \in \mathcal{L}(G)} cw(G, L).$$

Величина $cw(G)$ называется *шириной разреза* (cut-width) графа G .

Теперь положим

$$mcw(G, L) := \max_{i \in \overline{1, n}} |\{(u, v) \in EG : L^{-1}(u) < i, L^{-1}(v) > i\}|$$

и

$$mcw(G) := \min_{L \in \mathcal{L}(G)} mcw(G, L).$$

Величина $mcw(G)$ называется *модифицированной шириной разреза* (modified cut-width) графа G .

Наконец, положим

$$vs(G, L) := \max_{i \in \overline{1, n-1}} |\{(u, v) \in EG : L^{-1}(u) \leq i, L^{-1}(v) > i\}|$$

и

$$vs(G) := \min_{L \in \mathcal{L}(G)} vs(G, L).$$

Величина $vs(G)$ называется *величиной вершинного разделения* (vertex separation number) графа G .

Введённые в рассмотрение параметры играют большую роль в теории сверхбольших интегральных схем при проектировании «линейных укладок» СБИС. Типичная модель электронной микросхемы описывается графом G , в котором вершинами являются «переключатели» (gates), а рёбрами — «соединители». Если переключатели «укладываются» на прямой в порядке, задаваемой нумерацией L , то величина $cw(G, L)$, $mcw(G, L)$, $vs(G, L)$ характеризуют «дефект» этой укладки, зависящий от рёберной структуры графа G .

Величина $vs(G)$ естественно возникает в теории разделителей графа. *Разделителем* (separator) графа называется такое множество его вершин, удаление которых (вместе с инцидентными им рёбрами) увеличивает число компонент связности графа. Задачи о «разделении» графа представляют интерес как с чисто теоретической (см., например, теорему Менгера в [40], с. 34), так и с практической точек зрения. В частности, «малые» разделители, приводящие к примерно равным компонентам связности, были использованы для описания «хороших» линейных укладок СБИС ([60]) и для построения некоторых алгоритмов типа «разделяй и властвуй» ([61]).

Из многочисленных результатов о связи теории гарантированного поиска с линейными укладками СБИС наиболее впечатляющим является старая теорема Кироузиса и Пападимитриу ([58]): *для любого графа G*

$$vs(G) = ns(G) - 1.$$

Что касается ширины разреза $cw(G)$, то известно, что задача её нахождения NP -трудна ([17]), но для деревьев существует полиномиальный алгоритм ([99]). Известно также, что для всякого графа G справедливы следующие неравенства:

$$es(G) \leq cw(G) \leq \left\lfloor \frac{1}{2} \Delta(G) \right\rfloor (es(G) - 1) + 1,$$

где $\Delta(G)$ — максимальная степень вершины в графе G , а $\lfloor \alpha \rfloor$ — целая часть вещественного числа α ([64]).

В частности, *если $\Delta(G) \leq 3$, то*

$$cw(G) = es(G).$$

Если же G — регулярный граф степени 3, то, как показал П. А. Головач в [9],

$$es(G) = cw(G) = mcw(G) + 2.$$

Рассмотрим ещё одну характеристику графа, встречающуюся в электротехнике. Пусть $L \in \mathcal{L}(G)$, положим

$$b(G, L) := \max \{ |L^{-1}(u) - L^{-1}(v)| : (u, v) \in EG \}$$

и

$$b(G) := \min_{L \in \mathcal{L}(G)} b(G, L).$$

Величина $b(G)$ называется *шириной ленты* (bandwidth) графа G . Этой важной величине посвящено огромное число работ (см., например, обзоры в [44] и [45]).

Первоначально задача о ширине ленты возникла в теории матриц. Пусть $A = \|a_{ij}\|$ — матрица порядка n . Если число ненулевых элементов «мало», по сравнению с её порядком (в этом случае A называется *разреженной* матрицей), то полезной оказывается следующая задача: с помощью одновременных перестановок столбцов и строк (если меняются местами i -тый и j -тый столбцы, то меняются местами и i -я, j -я строки) привести матрицу A к такому виду, чтобы все ненулевые элементы располагались на диагоналях матрицы, «ближайших» к главной. Минимальное число диагоналей, получившихся таким образом, называется *шириной ленты* матрицы A .

Разреженные матрицы больших порядков возникают во многих прикладных задачах, например, при использовании метода конечных элементов для решения краевых задач в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Этот метод приводит к решению систем линейных уравнений с «большими» разреженными симметричными матрицами.

Укажем связь между шириной ленты матрицы и шириной ленты графа. Пусть $G(A)$ — граф с вершинами $\{1, \dots, n\}$, причём вершины i и j смежны тогда и только тогда, когда либо $a_{ij} \neq 0$, либо $a_{ji} \neq 0$. Оказывается, задачи о вычислении величины $b(G(A))$ и ширины ленты матрицы A эквивалентны.

Важную роль в теории СБИС играет одна модификация ширины ленты графа. Граф G' называется гомеоморфным образом⁴ графа G , если G' может быть получен из G помещением на рёбра графа G конечного числа вершин степени 2.

Величина

$$tb(G) := \min \{ b(G') \},$$

где минимум берётся по всем гомеоморфным образам G' графа G , называется *топологической шириной* ленты графа G . В работе [63] доказан ряд соотно-

⁴Такова общепринятая терминология, никак не связанная с какой-либо топологией.

шений, связывающих топологическую ширину ленты с рёберно–поисковым числом. Например, если $\Delta(G) \leq 3$, то $es(G) - 1 \leq tb(G) \leq es(G)$.

Если граф G описывает структуру некоторой электронной микросхемы, то вершины степени 2, помещённые на его рёбра, могут быть интерпретированы как драйверы или «повторители» (repeaters), которые используются для передачи сигнала на «большие» расстояния.

В линейной алгебре понятие топологической ширины ленты графа возникает следующим образом. Пусть

$$Ax = b$$

— линейная система с матрицей A указанной выше структуры. Можно ввести новую переменную $y = a_{ij}x_j$ и добавить это уравнение к системе $Ax = b$. Это введение новой переменной соответствует помещению вершины степени 2 на ребро (i, j) графа $G(A)$. Тогда можно показать, что

$$tb(G(A)) = \min \{b(G(A'))\},$$

где минимум берётся по всем матрицам A' , для которых система $A'z = b'$ получается из системы $Ax = b$ с помощью конечного числа подстановок указанного вида.

В работе [63] доказаны многочисленные утверждения о связи топологической ширины ленты с поисковыми числами. Например для произвольного графа G справедливы следующие неравенства

$$es(G) - 1 \leq tb(G) \leq cw(G).$$

Позднее П. А. Головачом было доказано, что левое неравенство превращается в равенство для регулярных графов степени 3 ([9]).

Любопытная связь ширины ленты графа с одной задачей поиска (helicopter search problem) установлена Ф. В. Фоминым ([50, 51]).

Обозначим через D множество всех топологических графов с рёбрами единичной длины, содержащих, по крайней мере, две вершины. Для каждого графа $G \in D$ ставится следующая задача.

Группа поиска состоит из одного преследователя, программа которого представляет собой произвольное отображение

$$\Pi : \{1, 2, \dots, T\} \rightarrow VG,$$

где T — натуральное число, а $\Pi(i)$, $i \in \overline{1, T}$, — вершина, занимаемая преследователем на i -ом шаге, при этом преследователь может посещать каждую вершину графа не более одного раза.

Убегающий использует простые движения $y = y(t)$, $t \in [0, T]$ с максимальной скоростью μ .

Программа Π называется *выигрывающей*, если для любой траектории убегающего $y = y(t)$, $t \in [0, T]$, существует такой момент $i \in \overline{1, T}$, что расстояние между точками $\Pi(i)$ и $y(i)$ меньше 1. Иначе говоря, преследователь, вставая в вершину $\Pi(i)$, «просматривает» все инцидентные ей рёбра (исключая смежные вершины) и, если он «видит» убегающего, находящегося на одном из них, то это и означает поимку. Здесь мы снова имеем дело с задачей типа «увидел–поймал» (см. начало раздела IV).

В рассматриваемой ситуации ставится задача о нахождении величины $\mu_0(G) := \inf\{\mu : \text{при максимальной скорости убегающего, равной } \mu, \text{ у преследователя нет выигрывающей программы на } G\}$.

Ф. В. Фоминым доказано, что для любого графа $G \in D$ справедливо следующее равенство:

$$\mu_0^{-1}(G) = b(G).$$

Рассмотрим ещё одну задачу теории СБИС, упомянутую в обзоре [66] и сводящуюся к проблеме вершинного поиска (т. е. к нахождению вершинно-поискового числа некоторого графа).

Пусть M — схема, состоящая из m электронных устройств (ключей) и n сетей, которые осуществляют связи между этими устройствами. Известно, какие электронные устройства объединены каждой сетью. Пусть $\delta = (G_1, \dots, G_m)$ — некоторое упорядочение ключей и M_δ — $(n \times m)$ -матрица, столбцы которой соответствуют ключам G_1, \dots, G_m , а строки — сетям N_1, \dots, N_n , причём элемент этой матрицы с номерами i, j равен 1, если сеть N_i содержит ключ G_j , и нулю в противном случае.

Соединение производится по дорожкам. Для заданного упорядочения δ каждому соединению отводится часть дорожки от самого левого до самого правого ключа, между которыми должно быть установлено соединение. Поэтому матрицу M_δ изменяют следующим образом: в каждой строке нуль заменяется на 1, если он находится «между» двумя единицами, так что в результате в изменённой строке все единицы оказываются расположенными «подряд».

Обозначим полученную матрицу через \overline{M}_δ , а её строки («расширенные сети») — через $\overline{N}_1, \dots, \overline{N}_n$. Рассмотренные сети могут быть уложены на одну дорожку, если у них нет общих ключей. Более формально, будем говорить, что сети \overline{N}_i и \overline{N}_j пересекаются, если эти сети имеют общий ключ. Говорят,

что расширенные сети $\overline{N}_1, \dots, \overline{N}_n$ можно уложить на t дорожек, если существует такое разбиение T_1, \dots, T_t множества индексов $\{1, \dots, n\}$, что для всякого $j \in \overline{1, t}$ любые две расширенные сети с номерами из T_j не пересекаются. Ясно, что это всегда возможно, если t достаточно велико. Наименьшее число дорожек, на которые можно уложить упомянутые расширенные сети, обозначим через $t(M, \delta)$.

Введём в рассмотрение следующую характеристику схемы M :

$$t(M) := \min \{t(M, \delta) : \delta \text{ — упорядочение ключей в } M\}.$$

Укладка сетей в наименьшее число дорожек исключительно важна при разработке линейных упадок СБИС, поскольку площадь электронной платы, занимаемой m ключами, пропорциональна mt , где t — число дорожек, на которые укладываются расширенные сети.

Каждой схеме M сопоставим граф $G(M)$ с вершинами v_1, \dots, v_n , в котором v_i и v_j , $i \neq j$, смежны тогда и только тогда, когда сети N_i и N_j имеют общий ключ. Граф $G(M)$ иногда называют *графом несовместимости*, так как его смежные (в этом графе) сети не могут быть уложены на одну дорожку.

Теперь мы готовы сформулировать основную теорему: *для любой схемы M имеет место равенство*

$$t(M) = ns(G(M)).$$

По-видимому, существует глубокая связь между проблемами гарантированного поиска на графах и теорией линейных упадок СБИС. И те, и другие задачи сформулированы на основе минимаксного принципа. Однако в полной мере эта связь не выяснена.

2. *Теория миноров Робертсона–Сеймура.* Кратко изложим основные положения этой теории.

Граф H называется *минором* графа G , если H получен стягиванием некоторых k рёбер ($k \geq 0$) одного из подграфов графа G .

Из многочисленных результатов Робертсона и Сеймура ([68–89]), посвящённых гипотезе Вагнера ([98]), упомянем одну из основных теорем: *для всякого замкнутого относительно операции взятия минора класса графов \mathbf{G} существует такое конечное множество графов, $ob(\mathbf{G})$, называемое запрещённым для \mathbf{G} , что $G \in \mathbf{G}$ тогда и только тогда, когда ни один из графов $H \in ob(\mathbf{G})$ не является минором G .*

Например, запрещённое множество для планарных графов состоит из K_5 и $K_{3,3}$ ($K_{3,3}$ — полный двудольный граф, каждая «доля» которого состоит из трёх вершин). Запрещённое множество для деревьев с заданным рёберно-поисковым числом было найдено в упоминавшихся выше работах Парсонса и Петрова. Есть надежда, что с использованием мощных средств теории миноров это множество может быть построено и в других случаях.

С многочисленными примерами теории Робертсона–Сеймура можно ознакомиться, например, в обзорах [43, 72].

Далее речь пойдёт о результатах этой теории, имеющих непосредственное отношение к задачам поиска. Два понятия играют особую роль в теории Робертсона–Сеймура: *путевая ширина* (pathwidth) и *древовидная ширина* (treewidth) графа. Первое понятие используется при изучении графов, имеющих в качестве минора лес. Говоря неформально, чем больше путевая ширина графа, тем «больше» лес, содержащийся в качестве минора этого графа.

Древовидная ширина естественным образом возникает при исследовании структуры графов, имеющих в качестве минора планарный граф. Оказалось, что эти параметры так же естественно возникают и в задачах поиска.

Перейдём к точным определениям.

Древовидная декомпозиция графа G состоит из дерева T , множество вершин которого представляет собой некоторое индексное множество I , и множеств

$$\{X_i \subset VG : i \in I\},$$

обладающих следующими свойствами:

1. $\bigcup_{i \in I} X_i = VG$;
2. для каждого ребра $(u, v) \in EG$ найдётся такая вершина i дерева T , что $u, v \in X_i$;
3. для всех вершин i, j, k дерева T верно следующее: если j лежит на пути с концами i и k , то

$$X_i \cap X_k \subset X_j.$$

Шириной древовидной декомпозиции графа называется величина $\max_{i \in I} |X_i| - 1$, а древовидная ширина графа G есть, по определению, минимальная ширина древовидной декомпозиции.

Если в определении, приведённом выше, дерево T заменить на путь, то получится понятие путевой ширины графа G , обозначаемой далее через $pw(G)$.

Известно ([55]), что граф G является графом интервалов тогда и только тогда, когда существует такая путевая декомпозиция (X_i, I) графа G , что каждое множество X_i , $i \in I$, является кликой в графе G . Отсюда следует, что для произвольного графа G величина

$$pw(G) = iw(G) - 1 = ns(G) - 1.$$

Таким образом, введённые выше характеристики графа G в общем случае связаны следующими соотношениями:

$$es(G) - 1 \leq ns(G) = vs(G) + 1 = iw(G) = pw(G) + 1 \leq es(G) + 1.$$

Прямое доказательство равенства $vs(G) = pw(G)$ дано в [56].

Древовидная ширина графа имеет, по крайней мере, две теоретико–игровые интерпретации. Одна из них принадлежит Томасу и Сеймуру ([92]). В этой работе описана одна конфликтная ситуация, в которой минимальное число преследователей, необходимое для успешного завершения поиска на графе, совпадает с его древовидной шириной $+1$.

Другая теоретико–игровая интерпретация древовидной ширины графа предложена в [47]. В этой работе рассматривается модификация задачи о вершинно–поисковом числе, названная авторами задачей поиска инерционного («ленивого») убегающего. В этой задаче убегающий может начать движение только в том случае, когда один из преследователей собирается перейти в вершину, занятую убегающим. Напомним, что каждый ход любого из преследователей диктуется программой, выбранной группой поиска, причём эта программа известна убегающему «до начала поиска».

В зависимости от «скорости» убегающего (определяемой числом рёбер, которые он может пройти за один ход), возникают различные задачи. В работе [47] показано, что если на скорость убегающего не накладывать никаких ограничений, то наименьшее число преследователей, необходимое для успешного завершения поиска на произвольном графе, равно его древовидной ширине $+1$. Если же скорость убегающего равна 1, то это число совпадает с другим параметром, называемым *шириной* (width) графа.

Этот параметр определяется следующим образом. Пусть G — граф и L — некоторая нумерация его вершин. Каждой вершине v_i , $i \in \overline{1, n}$, $n = |VG|$, сопоставляется величина $w(i, L)$, равная числу всех вершин, предшествующих

v_i в нумерации L и смежных с ней. Положим

$$w(L) := \max_{i \in \overline{1, n}} w(i, L).$$

Тогда *шириной графа* G называется величина

$$\min w(L),$$

где минимум берётся по всем нумерациям L . Эта характеристика графа G обозначается через $w(G)$. Таким образом, ширина графа $w(G)$ стоит в одном ряду с рассмотренными выше величинами $vs(G)$, $cw(G)$, $b(G)$, которые играют важную роль в теории линейных укладок СБИС. Как правило, задачи нахождения оптимальной нумерации вершин графа NP -трудны. Но для нахождения ширины графа существует удивительно простой алгоритм. В этом алгоритме в качестве вершины v_n выбирается любая вершина, имеющая наименьшую степень в графе G . При уже выбранных вершинах $v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n$ в качестве v_i нужно взять такую вершину, которая смежна наименьшему числу вершин из множества ещё «неупорядоченных» вершин графа G .

3. *Игра в камни (pebbling)*. Эти игры моделируют задачи о рациональном использовании памяти компьютера и, на первый взгляд, не имеют никакого отношения к поиску. Однако и в этом случае наблюдаются любопытные совпадения.

Ареной игры в камни является ориентированный ациклический⁵ граф. Цель её единственного участника состоит в том, чтобы, в соответствии с некоторыми правилами, «замостить» граф (точнее, его вершины) с помощью минимального числа камней. Известно несколько вариантов игры в камни.

Опишем один из них. Игра состоит из конечного числа шагов, которое зависит от выбранной игроком стратегии. На каждом шаге игрок может либо

1. поставить камень на вершину v , если начала всех дуг, входящих в v , заняты камнями (на вершину, не имеющую «предшественников», камень можно поставить всегда); либо
2. снять камень с вершины.

Предполагается также, что на каждую вершину камень можно ставить только один раз.

⁵т. е. не имеющий контуров

Первоначально на вершинах графа нет камней. Первый камень игрок ставит на вершину, не имеющую «предшественников», которая, в силу ацикличности графа, всегда существует. Игра заканчивается, когда весь граф оказывается «замощённым», т. е. в том случае, когда на каждую вершину графа на одном из шагов был поставлен камень.

Обозначим через S множество всех стратегий игрока, приводящих к «замощению» графа \vec{G} . Для каждой стратегии $s \in S$ введём в рассмотрение величину $dem\ s$, равную максимальному числу камней, одновременно находящихся на графе, при использовании стратегии s . Определим величину

$$dem\ \vec{G} := \min_{s \in S} dem\ s,$$

называемую *демандом* графа \vec{G} .

Для произвольного (неориентированного) графа G через $O(G)$ обозначим множество всех ориентированных ациклических графов \vec{G} , полученных из G заданием ориентаций на всех его рёбрах.

Положим

$$Dem(G) := \min_{\vec{G} \in O(G)} dem\ \vec{G}.$$

Тогда, как показано в [58], для каждого графа G имеет место равенство

$$Dem(G) = ns(G).$$

4. *Антивирусные программы.* Некоторые учёные полагают, что теория гарантированного поиска может быть использована для создания антивирусных программ. Сошлёмся на мнение известного специалиста Биенстока ([41]), которое приводится в авторизованном переводе Ф. В. Фомина.

«Рассмотрим поведение в сети компьютерного вируса. Получая информацию о наличии в сети вируса, мы не знаем масштабы заражения. Предполагая худшее, мы должны подозревать, что заражена вся сеть, а потому все узлы должны быть проверены и очищены. Предположим, что у нас имеется несколько копий вакцинных программ, и невозможно, а, может быть, непрактично изготовление большего числа копий. Тогда стратегия очистки должна разрабатываться с учётом ограниченного числа копий. С другой стороны, плохо разработанная стратегия может стать причиной повторного заражения узла. Таким образом, ставится задача разработки стратегии очистки, использующей наименьшее число копий вакцинных программ».

5. *Игры «подслушивания» (eavesdropping games).* В работе [54] предложен интересный подход к задачам сохранения секретности информации, переда-

ваемой по электронным сетям в присутствии мобильных подслушивающих устройств («жучков»). В качестве модели рассматривается игра между Сетью и Противником. Каждый узел сети (вершина графа) является процессором, который хранит и стирает информацию, делает вычисления и посылает сообщения в соседние узлы. Несколько подслушивающих жучков перемещаются по узлам сети, считывая содержание сообщений и хранящуюся информацию. Протокол работы Сети известен обеим сторонам.

Налагая на движения жучков различные ограничения, авторы упомянутой статьи приходят к различным «играм подслушивания», на основе которых решают некоторые задачи безопасной передачи информации. В одном из вариантов авторы доказывают следующее утверждение: *наименьшее число жучков, позволяющих Противнику собрать информацию при любом протоколе Сети, совпадает с вершинно–поисковым числом графа, определяющего её структуру.*

Итак, снова вершинно–поисковое число.

6. *Биология.* В биологии нередко возникают задачи, связанные с нахождением некоторых специальных путевых декомпозиций. Для картирования человеческого генома биологи используют теорию графов, в частности, графы интервалов, которые моделируют перекрытия мутационных искажений. *NP–полная задача Интервализация Раскрашиваемых Графов (Intervalizing Colored Graph)* рассматривалась в [49] как приближённая модель для нахождения карт ДНК. Эта важная проблема заключается в следующем: для данного k –раскрашиваемого графа G определить, содержится ли G в качестве подграфа в некотором k –раскрашиваемом графе интервалов. Можно показать, что эта задача эквивалентна нахождению путевой декомпозиции $(X_i, i \in I)$, обладающей следующими свойствами:

1. её ширина не превосходит k ,
2. для всякого $i \in I$ любые две различные вершины $u, v \in X_i$ окрашены в разные цвета.

В работе [100] предложены эффективные алгоритмы для выяснения структуры биополимеров (таких, как РНК или протеины), которая описывается с помощью некоторого графа. Эффективность этих алгоритмов во многом объясняется тем, что этот граф имеет малую древовидную ширину.

Как показано выше, путевые и древовидные декомпозиции графа могут быть использованы для нахождения различных поисковых чисел, которые в некоторых случаях получают «биологическую» интерпретацию.

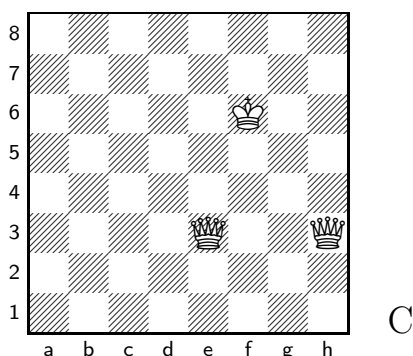
7. *Лингвистика.* В теории «обработки» естественных языков (natural language processing) рассматриваются графы, кодирующие основные синтаксические отношения между словами. Как отмечается в работе [59], наибольший интерес представляют графы, имеющие путевую ширину, не превосходящую 6. Напомним, что для произвольного графа путевая ширина равна вершинно-поисковому числу минус 1.

8. *Робототехника.* Некоторые задачи поиска типа «увидел-поймал» в случае, когда ареной поиска является решётка (grid), рассматривались в работах [46, 93–95]. Японские математики Сугихара и Сузуки выявили связь между теорией гарантированного поиска на решётках и задачами координации движения роботов. В частности, рассматривалась задача о перемещении «команды» роботов из начального положения в конечное, исключая взаимные столкновения.

В другой задаче команда роботов должна перехватить движущуюся цель, например, робота из «вражеской» команды. Авторы упомянутых работ рассмотрели два варианта поиска. В первом варианте требовалось лишь «обнаружить» убегающего (по определению, преследователь его обнаруживал, если оказывался с ним на одном отрезке, целиком принадлежащем решётке). Таким образом, первый вариант является одной из задач типа «увидел-поймал». Во втором варианте преследователи должны догнать убегающего, но предполагается, что они могут его «видеть» лишь в том случае, если один из них находится с убегающим на одном отрезке решётки.

9. *Шахматная композиция.* Изучение проблем гарантированного поиска привело к появлению в шахматной композиции новых задач, в которых целью является матование «невидимого» чёрного короля. Ниже приводится одна такая задача, составленная вторым автором и опубликованная в [28]. Она была удостоена специального приза на конкурсе, организованном журналом «Шахматная композиция» (1998 – 1999 гг.) в разделе задач на ретроградный анализ (другого, более «близкого» раздела не оказалось). На самом деле, она является задачей поиска с противодействием при очевидных дополнительных условиях, определяемых шахматными правилами. Эта задача получила высокую оценку выдающего российского проблемиста, профессора математико-механического факультета СПбГУ Юрия Акимовича Сушкова.

Мат в 5 ходов (одиноким чёрным королём «невидим»).



(3+0)

Эта задача имеет трёх близнецов:

- a) ♔g7,
- b) ♔g6,
- c) ♔f7.

Приведём решение этих задач.

Во всех случаях первый ход **1. ♚e8**. Если ответный ход чёрных «без снятия», решает «линейный мат»:

2. ♚h3–d7. 3. ♚e8–c8. 4. ♚d7–b7. 5. ♚c8–a8.

Если ответный ход чёрных **1... ♔e8** (в близнеце c) он невозможен), то в позиции на диаграмме белые матуют немедленно: **2. ♚c8**. В близнеце a) к мату приводит

2. ♚d3. 3. ♚d5. 4. ♔f6. 5. ♚f7(d8, a8) — мат.

В близнеце b) решает

2. ♚h7. 3. ♚b7. 4. ♚c7. 5. ♚d8 — мат.

В близнеце c) много решений, что для задач с невидимым чёрным королём не является серьёзным дефектом.

Кроме **1. ♚e8**, решает **1. ♚d7, 1. ♚h4, 1. ♚h8**.

В последних двух случаях второй ход белых **2. ♚d8** является «жертвой».

В задаче имеются «ложные следы». Укажем один из них:

Маневр: 1. ♔h4. 2. ♔h4–d4. 3. ♕e3–c3. 4. ♕d4–b4. 5. ♕c3–a3 к цели не приводит, так как после четвёртого хода белых чёрный король может быть запатован на поле a2.

Решение близнеца с), потребовавшее перебора около 500000000 вариантов, было найдено с помощью компьютера В. Ю. Андриановым ([5]). Его программа, принципиально отличающаяся от известных шахматных программ, может быть использована для решения широкого класса задач поиска с противодействием (и без оно́го). Буква *C* справа от диаграммы, как всегда, означает, что решения задач проверены с помощью компьютера.

В статье «Задача о квадриге», опубликованной вторым автором в [27], доказывается, что «команда» белых фигур, состоящая из короля (Аполлона) и четырёх коней (квадриги) из некоторой начальной позиции матует одинокого «невидимого» чёрного короля не позднее 28–го хода. Напомним, что для матования одинокого «видимого» короля требуется, как минимум, 3 коня (при отсутствии других белых фигур).

Приведённые шахматные композиции едва ли можно отнести к числу актуальных результатов, полученных в теории гарантированного поиска. По мнению В. В. Набокова, который был неплохим проблемистом, шахматы являются истинным искусством, которое он понимал как нечто, обладающее сильным эстетическим воздействием, но не приносящее никакой практической пользы. С другой стороны, Г. Г. Харди как-то сказал:

«Шахматные задачи — это мелодии математических гимнов».

Благодарности.

Авторы благодарят выпускников кафедры исследования операций СПбГУ П. А. Головача, А. Б. Зеленевскую, В. О. Капилевич, С. В. Лунегова, С. А. Старостину, М. А. Тетерятникову, И. Туре, Ф. В. Фомина и А. В. Чуманову за их вклад в теорию гарантированного поиска, которая была предметом настоящего обзора.

По мнению второго автора (который не является выпускником кафедры исследования операций), такую же благодарность заслуживает первый автор, которая в самое последнее время получила глубокие результаты в теории ε -поиска.

Особую признательность авторы выражают профессору университета города Берген (Норвегия) Фёдору Владимировичу Фомину за предоставленные им⁶ материалы, в частности, прекрасную аннотированную библиографию по теории поиска ([53]).

⁶Эта очевидная двусмысленность не требует однозначного уточнения.

Литература

1. Абрамовская Т. В. Нетривиальные разрывы функции Головача для деревьев // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2010. Вып.3. С.3–12.
2. Абрамовская Т. В., Петров Н. Н. О некоторых задачах гарантированного поиска на графах // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2010. Вып.2. С.64–70.
3. Абрамовская Т. В., Петров Н. Н. О сколь угодно больших скачках функции Головача для деревьев // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2011. Вып.1. С.84–93.
4. Абрамовская Т. В., Петров Н. Н. О монотонности поискового числа в задаче Головача // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2011. Вып.4. С.3–9.
5. Андрианов В. Ю., Петров Н. Н. Поиск с противодействием // Труды института математики и механики УрО РАН. 2002. Т.8, №2. С.1–9.
6. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
7. Головач П. А. Эквивалентность двух формализаций задачи поиска на графе // Вестник ЛГУ. Сер. 1. 1989. Вып.1, №1. С.10–14.
8. Головач П. А. Об одном топологическом инварианте в задачах преследования // Дифференциальные уравнения. 1989. Т.2, №6. С.923–929, 1097.
9. Головач П. А. Экстремальные задачи поиска на графах. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. ЛГУ. 1990.
10. Головач П. А. Об одной экстремальной задаче поиска на графах // Вестник ЛГУ. Сер. 1. 1990. Вып.3, №15. С.16–21.
11. Головач П. А. Минимальные деревья с данным вершинно-поисковым числом // Дискретная математика. 1992. Т.4, Вып.2. С.52–60.
12. Головач П. А. Минимальные деревья с данным поисковым числом // Кибернетика и системный анализ. 1992. №4. С.25–31.

13. Головач П. А., Петров Н. Н. Некоторые обобщения задачи о поисковом числе графа // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1995. Вып.3, № 15. С.21-27.
14. Головач П. А., Петров Н. Н. K -поисковое число графов правильных многогранников // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1995. Вып.4, № 22. С.8-13.
15. Головач П. А., Петров Н. Н., Фомин Ф. В. Поиск на графах // Труды института математики и механики УрО РАН. 2000. Т.6, № 1. С.39-54.
16. Головач П. А., Фомин Ф. В. Поисковое и вершинно-поисковое число двойственных графов // Вестник СыктГУ. Сер.1. 2001. Вып.4. С.125-136.
17. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
18. Зеленевская А. Б., Петров Н. Н. О некоторых задачах поиска на графах с противодействием // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2004. Вып.2. С.23-33.
19. Зеликин М. И. Об одной дифференциальной игре с неполной информацией // Доклады АН СССР. 1972. Т.202, № 5. С.998-1000.
20. Капилевич В. О., Петров Н. Н. Задачи поиска на графах с противодействием // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2003. Вып.3. С.31-37.
21. Масси У., Столлингс Дж. Алгебраическая топология. Введение. М.: Мир, 1977. - 343 с.
22. Петров Н. Н. Некоторые экстремальные задачи поиска на графах // Дифференциальные уравнения. 1982. Т.18, № 5. С.821-827.
23. Петров Н. Н. Задачи преследования при отсутствии информации об убегающем // Дифференциальные уравнения. 1982. Т.18, № 8. С.1345-1352.
24. Петров Н. Н. Одна оценка в дифференциальной игре со многими убегающими // Вестник ЛГУ. Сер. 1. 1985. № 22. С.107-109.
25. Петров Н. Н. Задачи поиска на графах правильных многогранников // Дискретная математика. 1996. Т.8. Вып.2. С.108-116.

26. Петров Н. Н. Преследование невидимого подвижного объекта // Дифференциальные уравнения. 1996. Т.32, № 11. С.1563-1565, 1583.
27. Петров Н. Н. Задача о квадриге // Уральский проблемист. 1997. № 1(9). С.26.
28. Петров Н. Н. Мат невидимому королю // Шахматная композиция. 1998. № 21. С.62-63.
29. Петров Н. Н., Петров Н. Никандрович. О дифференциальной игре «Казачи — Разбойники» // Дифференциальные уравнения. 1983. Т.19, № 8. С.1366-1374.
30. Петров Н. Н., Старостина С. А. Минимальные графы с поисковым числом меньшим четырёх // Вестник ЛГУ. Сер. 1. 1989. Вып.3. С.105-106.
31. Петров Н. Н., Старостина С. А. О некоторых задачах гарантированного поиска // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1994. Вып.1. С.114-116.
32. Петров Н. Н., Тетерятникова М. А. О некоторых задачах поиска на графах с противодействием // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2004. Вып.3. С.50–59.
33. Петров Н. Н., Туре И. Об одной задаче преследования на графе // Вестник ЛГУ. Сер. 1. 1990. Вып.4. С.12-18.
34. Петров Н. Н., Туре И. Определение минимальной численности группы поиска на графе // Вестник ЛГУ. Сер. 1. 1991. Вып.2. С.66-69.
35. Петров Н. Н., Чуманова А. В. О некоторых проблемах поиска на графах с противодействием // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2003. Вып.4. С.51-57.
36. Старостина С. А. Задачи преследования на графах при отсутствии информации об убегающем // Дис. ... канд. физ.-матем. наук. СПбГУ. 1993.
37. Фомин Ф. В. Задача поиска на деревьях // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1995. Вып.2. С.36-41.
38. Фомин Ф. В. Поиск на 3-минимальных деревьях // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1995. Вып.3. С.67-72.

39. Ф о м и н Ф . В . Задачи преследования и поиска на графах. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. СПбГУ. 1996.
40. Х а р а р и Ф . Теория графов. М.: Мир, 1973.
41. B i e n s t o c k D . Graph searching, path-width, tree-width and related problems (a survey). In Reliability of computer and communication networks (New Brunswick, NJ, 1989), DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 5(1991) 33–49.
42. B r e i s c h R . An intuitive approach to speleotopology. Southwestern Cavers (A publication of the Southwestern Region of the National Speleological Society), VI(1967) 72–78.
43. B o d l a e n d e r H . L . A tourist guide through treewidth. Acta Cybernet, 11(1993) 1-21.
44. C h u n g F . R . K . Labelings of graphs. In Selected Topics in Graph Theory 3, Academic Press, New York, (1988) 151-168.
45. C h u n g F . R . K ., S e y m o u r P . D . Graphs with small bandwidth and cutwidth. Graph theory and combinatorics (Cambridge, 1988). Discrete Math., 75 (1989) 113-119.
46. D a w e s R . W . Some pursuit–evasion problems on grids. Inform. Process. Lett., 43(1992) 241-247.
47. D e n d r i s N . D ., K i r o u s i s L . M ., T h i l i k o s D . M . Fugitive–search games on graphs and related parameters. In Proceedings 20th International Workshop on Graph Theoretic Concepts in Computer Science WG'94. E. W. Mayr, and G. Tinhofer eds, Springer Verlag, Lecture Notes in Computer Science, 903(1995) 26-37.
48. E l l i s J . A ., S u d b o r o u g h I . H ., T u r n e r J . S . Graph separation and search number. Proc. of Allerton Conf. on Communication, Control and Comput., (1983) 224-233.
49. F e l l o w s M . R ., H a l l e t M . T ., W a r e h a m H . T . DNA physical mapping: Three ways difficult. In Proceedings of European Symposium on Algorithms (ESA '93). T. Lengauer, ed., Lecture Notes in Comput. Sci., Springer, Berlin, 726(1993) 157-168.

50. F o m i n F . V . Helicopter search problems, bandwidth and pathwidth. *Discrete Appl. Math.*, 85(1998) 59–70.
51. F o m i n F . V . Note on a helicopter search problem on graphs. *Discrete Appl. Math.*, 95(1999) 241–249.
52. F o m i n F . V ., G o l o v a c h P . A ., P e t r o v N . N . Search problems on 1–skeletons of regular polyhedrons. *International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra*, 7(1998) 101–111.
53. F o m i n F . V ., T h i l i k o s D . M . An annotated bibliography on guaranteed graph searching. *Theoretical Computer Science.*, 399(2008), №3, 236–245.
54. F r a n k l i n M ., G a l i l Z ., Y u n g M . Eavesdropping games: a graph–theoretic approach to privacy in distributed system. *Proceedings 34th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, IEEE Computer Society Press, (1993) 670–679.
55. K a s h i w a b a r a T ., F u j i s a w a T . NP–completeness of the problem of finding a minimum clique number interval graph containing a given graph as a subgraph. In *Proceeding ISCAS*, (1979) 657–660.
56. K i n n e r s l e y N . G . The vertex separation number of a graph equals its path–width. *Inform. Process. Lett.*, 42(1992) 345–350.
57. K i r o u s i s L . M ., P a p a d i m i t r i o u C . H . Interval graphs and searching. *Discrete Math.*, 55(1985) 181–184.
58. K i r o u s i s L . M ., P a p a d i m i t r i o u C . H . Searching and pebbling. *Theoret. Comput. Sci.*, 47(1986) 205–218.
59. K o r n a i A ., T u z a Z . Narrowness, pathwidth, and their application in natural language processing. *Discrete Appl. Math.*, 36(1992) 87–92.
60. L e i e r s o n C . E . Area–efficient graph layouts for VLSI. In *Proceedings 21st Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, (1980) 270–281.
61. L i p t o n R . J ., T a r j a n R . E . Applications of a planar separator theorem. *SIAM J. Comput.*, 3(1980) 615–627.

62. Lunegov S. V., Petrov N. N. Search problems on graphs. In Proceedings of the 5-th IFAC Symposium „Nonlinear Control Systems“ (NOLCOS 2001), July 4–6, 2001, Saint-Petersburg, Russia, (2001) 1022–1024.
63. Makedon F. S., Papadimitriou C. H., Sudborough I. H. Topological bandwidth. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 6(1985) 418–444.
64. Makedon F. S., Sudborough I. H. Min Cut is NP-complete for edge weighted trees. *Theor. Computer Sci*, 58(1988) 209–229.
65. Megiddo N., Hakimi S. L., Garey M. R. et al. The complexity of searching a graph. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 35(1988) 18–44.
66. Möhring R. H. Graph problems related to gate matrix layout and PLA folding. In *Computational Graph Theory, Computing Suppl. G. Tinhofer et al.*, eds., Springer Verlag, Wien, 7(1990) 17–51.
67. Parsons T. D. Pursuit–evasion in a graph. In *Theory and Applications of Graphs*. Y. Alavi and D. R. Lick, eds, Springer–Verlag, 642(1978) 426–441.
68. Robertson N., Seymour P. D. Graph minors. I. Excluding a forest. *J. Comb. Theory Series B*, 35(1983) 39–61.
69. Robertson N., Seymour P. D. Generalizing Kuratowski’s theorem. *Congressus Numerantium*, 45(1984) 129–138.
70. Robertson N., Seymour P. D. Graph minors. III. Planar tree–width. *J. Comb. Theory Series B*, 36(1984) 49–64.
71. Robertson N., Seymour P. D. Graph width and well–quasi ordering: a survwey. In *Proress in Graph Thery*. J. A. Bondy and U. S. R. Murty, eds, Academic Press, Toronto, (1984) 399–406.
72. Robertson N., Seymour P. D. Disjoint paths — a survey. *SIAM J. Alg. Discr. Meth.*, 6(1985) 300–305.
73. Robertson N., Seymour P. D. Graph minors — a survey. In *Surveys in Combinatorics. I*. Anderson, ed., Cambridge Univ. Press, (1985) 153–171.

74. Robertson N., Seymour P. D. Graph minors. II. Algorithmic aspect of tree-width. *J. Algorithms*, 7(1986) 309-322.
75. Robertson N., Seymour P. D. Graph minors. V. Excluding a planar graph. *J. Comb. Theory Series B*, 41(1986) 92-114.
76. Robertson N., Seymour P. D. Graph minors. VI. Disjoint paths across a disc. *J. Comb. Theory Series B*, 41(1986) 115-138.
77. Robertson N., Seymour P. D. Graph minors. VII. Disjoint paths on a surface. *J. Comb. Theory Series B*, 45(1988) 212-254.
78. Robertson N., Seymour P. D. Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering. *J. Comb. Theory Series B*, 48(1990) 227-254.
79. Robertson N., Seymour P. D. Graph minors. VIII. A Kuratowski theorem for general surfaces. *J. Comb. Theory Series B*, 48(1990) 255-288.
80. Robertson N., Seymour P. D. Graph minors. IX. Disjoint crossed paths. *J. Comb. Theory Series B*, 49(1990) 40-77.
81. Robertson N., Seymour P. D. Graph minors. X. Obstructions to tree-decomposition. *J. Comb. Theory Series B*, 52(1991) 153-190.
82. Robertson N., Seymour P. D. Excluding a graph with one crossing. In *Graph Structure Theory, Proceedings of the AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference*, Neil Robertson and Paul Seymour, eds, Seattle WA, June 1991, Providence, RI, American Math. Soc. *Contemp. Math.*, 147(1993) 669-675.
83. Robertson N., Seymour P. D. Graph minors. XI. Distance on a surface. *J. Comb. Theory Series B*, 60(1994) 72-106.
84. Robertson N., Seymour P. D. Graph minors. XIII. The disjoint paths problem. *J. Comb. Theory Series B*, 63(1995) 65-110.
85. Robertson N., Seymour P. D. Graph minors. XII. Excluding a non-planar graph. *J. Comb. Theory Series B*, 64(1995) 240-272.
86. Robertson N., Seymour P. D. Graph minors. XIV. Extending an embedding. *J. Comb. Theory Series B*, 65(1995) 23-50.

87. R o b e r t s o n N . , S e y m o u r P . D . , Thomas R. Structural description of lower ideals of trees. In Graph Structure Theory, Proceedings of the AMS–IMS–SIAM Joint Summer Research Conference, Neil Robertson and Paul Seymour, eds, Seattle WA, June 1991, Providence, RI, American Math. Soc. Contemp. Math., 147(1993) 525–538.
88. R o b e r t s o n N . , S e y m o u r P . D . , Thomas R. A survey of linkless embeddings. In Graph Structure Theory, Proceedings of the AMS–IMS–SIAM Joint Summer Research Conference, Neil Robertson and Paul Seymour, eds, Seattle WA, June 1991, Providence, RI, American Math. Soc. Contemp. Math., Providence, RI, American Math. Soc. Contemp. Math., 147(1993) 125–136.
89. R o b e r t s o n N . , S e y m o u r P . D . , Thomas R. Quickly excluding a planar graph. J. Comb. Theory Series B, 62(1994) 323–348.
90. S c h e f f l e r P . Optimal embedding of a tree into an interval graph in linear time. Fourth Czechoslovakian Symposium on Combinatorics, Graphs and Complexity Ann. Discr. Math., North–Holland, Amsterdam, (1992) 287–291.
91. S c h e f f l e r P . A linear algorithm for the pathwidth of trees. In Collection: Topics in combinatorics and graph theory, R. Bodendiek, R.H., ed., Oberwolfach, Physica-Verlag Heidelberg, (1990) 613–620.
92. S e y m o u r P . D . , T h o m a s . R . Graph searching and a min–max theorem for tree–width. J. of Combin. Theory Ser. B, 58(1993) 22–33.
93. S u g i h a r a H . , S u z u k i I . On pursuit–evasion problem related to motion coordination of mobile robots. In Proc. 21st Hawaii Internat. Conf. on System Sciences, Kailua–Kona, Hawaii, (1988) 218–226.
94. S u g i h a r a H . , S u z u k i I . Optimal algorithms for a pursuit–evasion problem in grids. SIAM J. Discrete Math., 2(1989) 126–143.
95. S u g i h a r a H . , S u z u k i I . , L e e Y . C . Distributed algorithms for motion coordination of multiply objects. In Proc. 30st Midwest Symposium on Circuits and System, Syracuse, NY, (1987) 652–655.
96. S u z u k i I . , Y a m a s h i t a M . Searching for a mobile intruder in a polygonal region. SIAM J. Comput., 21(1992) 863–888.

97. Tošič R. Search number of the cartesian product of graphs. Zbornik Radova Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu, Serija za matematiku, 17, 1 (1987) 239-243.
98. Wagner K. Über eine Eigenschaft der ebenen Complexe. Math. Ann., 14(1937) 570-590.
99. Yannakakis M. A polyminal algorithm for the min-cut lineal arrangement of trees. J. of ACM, 32(1985) 950-988.
100. Ying S., Chunmei L., Xiuzhen H. et al. Efficient parameterized algorithms for biopolymer structure — sequence alignment. IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics (TCBB), 3(2006) №4 423-432.