ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2014
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Динамические системы на многообразиях

УДК 517

Теорема Мане и теория отслеживания псевдотраекторий

С. Ю. Пилюгин[1]

Математико-механический факультет Санкт-Петербургского
государственного университета

Россия, 198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., д. 28

e-mail: sp@sp1196.spb.edu

Аннотация. Во многих работах по связи теории отслеживания псевдотраекторий динамических систем с теорией структурной устойчивости авторы используют теорему Мане о характеризации структурной устойчивости через аналитическое строгое условие трансверсальности. Оригинальное доказательство этой теоремы содержит доказательство импликации (аналитическое строгое условие трансверсальности) $\Rightarrow$ (плотность периодических точек в неблуждающем множестве), опирающееся на довольно нетривиальную теорию гиперболических предельных множеств. В данной заметке мы показываем, что в случае диффеоморфизмов, обладающих свойством отслеживания псевдотраекторий, доказательство этой импликации может быть существенно упрощено. Библиогр. 17 назв.

Abstract. In many papers devoted to connections between the theory of shadowing of pseudotrajectories of dynamical systems and the theory of structural

[1]Исследования автора поддержаны РФФИ (грант 12-01-00275) и проектом СПбГУ 6.38.223.2014 "Устойчивость динамических систем относительно возмущений и применения к исследованию прикладных задач".

stability, the authors apply the Mañé theorem on characterization of structural stability in terms of the analytic strong transversality condition. The original proof of this theorem contains a proof of the implication (the analytic strong transversality condition) $\Rightarrow$ (density of periodic points in the nonwandering set) which is based on a nontrivial theory of hyperbolic limit sets. In this short note, we show that the proof of this implication can be essentially simplified in the case of a diffeomorphism having the shadowing property. Bibl. 17 titles

Ключевые слова: динамическая система, отслеживание псевдотраекторий, структурная устойчивость

MSC: 37C50

1 Введение

В настоящее время теория отслеживания псевдотраекторий в динамических системах – одна из интенсивно развивающихся областей современной глобальной теории динамических систем. Основы этой теории изложены в монографиях [1, 2]; многие результаты, полученные в начале XXI века, отражены в обзоре [3].

Наиболее важными представляются связи теории отслеживания псевдотраекторий с теорией структурной устойчивости, несомненно, одной из центральных ветвей теории гладких динамических систем во второй половине XX века.

Классическим является утверждение о том, что структурная устойчивость диффеоморфизма гладкого замкнутого многообразия влечет свойство отслеживания [4-6]; в то же время, обратное утверждение неверно: легко привести примеры диффеоморфизмов, обладающих свойством отслеживания и не являющихся структурно устойчивыми (см, например, [7]).

Анализируя первые результаты об отслеживании в окрестности гиперболического множества диффеоморфизма, принадлежащие Аносову и Боуэну [8, 9], несложно понять, что отслеживание в этом случае липшицево – расстояние между точками псевдотраектории и отслеживающей ее точной траектории оценивается линейно через пошаговую ошибку псевдотраектории. В книге [1] было показано, что такова же ситуация и в случае структурно устойчивого диффеоморфизма – отслеживание липшицево.

В недавней статье [10] автор и его ученик Тихомиров показали, что липшицево свойство отслеживания равносильно структурной устойчивости. Схема доказательства импликации (липшицево отслеживание) $\Rightarrow$ (структурная устойчивость) была, по-видимому, впервые применена в статье автора [7], посвященной так называемому вариационному отслеживанию. Эта схема использует две известные теоремы – теорему Мане о характеризации структурной устойчивости через аналитическое строгое условие трансверсальности [11] и теорему Плисса о связи свойства Перрона для линейных разностных уравнений с трансверсальностью некоторых подмногообразий [12]. Эта схема была позднее применена при решении нескольких задач, связанных с теорией отслеживания (см., например, [13, 14]).

Хорошо известны условия, равносильные структурной устойчивости диффеоморфизма – это одновременное выполнение Аксиомы А, введенной Смейлом (неблуждающее множество Ω гиперболично, и периодические точки плотны в Ω), и геометрического строгого условия трансверсальности (устойчивые и неустойчивые многообразия неблуждающих точек трансверсальны).

Главная часть доказательства теоремы Мане в [11] (аналитическое строгое условие трансверсальности влечет гиперболичность Ω) основана на переходе к двойственным системам (эта часть подробно изложена в книге автора [15]). Импликация (аналитическое строгое условие трансверсальности) $\Rightarrow$ (геометрическое строгое условие трансверсальности) практически тривиальна.

При доказательстве импликации (аналитическое строгое условие трансверсальности) $\Rightarrow$ (плотность периодических точек в Ω) Мане опирается на довольно нетривиальную теорию гиперболических предельных множеств, развитую в [16].

В данной заметке мы показываем, что используя теорему Мане при доказательстве импликации (липшицево отслеживание) $\Rightarrow$ (структурная устойчивость), т.е., предполагая заранее, что изучаемый диффеоморфизм обладает свойством отслеживания, можно сильно упростить доказательство импликации (аналитическое строгое условие трансверсальности) $\Rightarrow$ (плотность периодических точек в Ω), используя два хорошо известных результата – теорему об экспансивности диффеоморфизма в окрестности гиперболического множества и теорему о константе Биркгофа.

2 Основные определения и вспомогательные результаты

Пусть f – диффеоморфизм класса C^1 гладкого замкнутого (т.е., компактного и без края) многообразия M с римановой метрикой dist. Мы обозначаем через $Df(x)$ дифференциал f в точке $x \in M$.

Обозначим через T_xM касательное простнство к M в точке x; пусть $|v|$, $v \in T_xM$, – норма, индуцированная метрикой dist.

Как обычно, последовательность $\xi = \{x_i \in M, \;\; i \in \mathbb{Z}\}$ называется d-псевдотраекторией f, если

$$\operatorname{dist}(f(x_i), x_{i+1}) < d, \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Определение 1. Диффеоморфизм f обладает *свойством отслеживания*, если для любого положительного ε найдется такое положительное d, что если $\xi = \{x_i\}$ – d-псевдотраектория, то найдется такая точка p, что

$$\operatorname{dist}(f^i(p), x_i) < \varepsilon, \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Определение 2. Диффеоморфизм f обладает *липшицевым свойством отслеживания*, если существуют такие положительные числа L, d_0, что если $\xi = \{x_i\}$ – d-псевдотраектория с $d \le d_0$, то найдется такая точка p, что выполнены неравенства (2) с $\varepsilon = Ld$.

Напомним, наконец, что диффеоморфизм f называется *структурно устойчивым*, если существует такая окрестность U диффеоморфизма f в C^1 топологии, что любой диффеоморфизм $g \in U$ топологически сопряжен с f.

Как уже отмечалось выше, недавно было показано, что диффеоморфизм f обладает липшицевым свойством отслеживания тогда и только тогда, когда f структурно устойчив.

Основными инструментами в доказательстве необходимости этого утверждения являются формулируемая ниже теорема Мане, а также теорема Плисса о необходимых и достаточных условиях, при которых система линейных разностных уравнений обладает ограниченным решением для любой ограниченной неоднородности.

Фиксируем точку $x \in M$ и определим следующие два подпространства T_xM:

$$B^+(x) = \{v \in T_xM : \; |Df^k(x)v| \to 0, \quad k \to \infty\}$$

и

$$B^-(x) = \{v \in T_xM: \ |Df^k(x)v| \to 0, \quad k \to -\infty\}.$$

Определение 3. Диффеоморфизм f удовлетворяет *аналитическому строгому условию трансверсальности*, если

$$B^+(x) + B^-(x) = T_xM \quad \text{для любого} \quad x \in M. \tag{3}$$

Теорема 1. (Р. Мане, [11]). *Диффеоморфизм f структурно устойчив тогда и только тогда, когда f удовлетворяет аналитическому строгому условию трансверсальности.*

Замечание. В оригинальном тексте Мане в [11] теорема 1 формулируется в несколько ином виде: подпространства $B^+(x)$ и $B^-(x)$ определяются равенствами

$$B^+(x) = \{v \in T_xM: \ \lim\inf_{k\to\infty} |Df^k(x)v| = 0\}$$

и

$$B^-(x) = \{v \in T_xM: \ \lim\inf_{k\to-\infty} |Df^k(x)v| = 0\},$$

но, как легко понять, теорема верна при обеих формулировках аналитического строгого условия трансверсальности.

Во введении уже отмечалось, что цель данной заметки – дать упрощенное доказательство одного из основных этапов в доказательстве теоремы 1, а именно импликации (аналитическое строгое условие трансверсальности) $\Rightarrow$ (плотность периодических точек в Ω) в предположении, что диффеоморфизм f обладает свойством отслеживания. При этом мы используем два хорошо известных и несложно доказываемых результата – теорему об экспансивности диффеоморфизма в окрестности гиперболического множества и теорему о константе Биркгофа.

Определение 4. Диффеоморфизм f называется *экспансивным* на множестве V, если существует такое положительное число a (константа экспансивности), что если для точек x и y выполнены соотношения

$$f^k(x), f^k(y) \in V, \quad k \in \mathbb{Z},$$

и

$$\text{dist}(f^k(x), f^k(y)) \le a, \quad k \in \mathbb{Z},$$

то $x = y$.

Теорема 2. *Если Λ – гиперболическое множество диффеоморфизма f, то существует такая окрестность V множества Λ, что f экспансивен на V.*

По существу, утверждение теоремы 2 является фольклорным. Ее можно свести к некоторым имеющимся в литературе результатам (например, к теореме 1.3.2 в книге [1]), но прямое доказательство автор найти не смог. (Отметим, что Палмер доказывает в [2] экспансивность диффеоморфизма на гиперболическом множестве, но нам нужна экспансивность на окрестности гиперболического множества.) Поскольку данная заметка является скорее методической, считаем естественным привести короткое доказательство теоремы 2.

Доказательство теоремы 2. Для упрощения изложения предположим, что Λ – гиперболическое множество диффеоморфизма f евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

Хорошо известно (см., например [17]), что существует окрестность V множества Λ, на которую непрерывным образом продолжается гиперболическая структура с Λ и на которой определена так называемая ляпуновская норма, зависяшая от точки окрестность V (будем обозначать эту норму $|.|_x$, $x \in V$).

Сформулируем адаптированный для наших целей вариант леммы Аносова о ляпуновской норме: можно фиксировать константы $\lambda \in (0,1)$ и $N \geq 1$ и по любому $\varepsilon > 0$ найти окрестность V множества Λ с компактным замыканием и два непрерывных семейства линейных подпространств $S(x), U(x)$ со следующими свойствами:

(ЛН1) $S(x) \oplus U(x) = \mathbb{R}^n$ (обозначим через $P(x)$ и $Q(x)$ соответствующие проекторы на дополнительные подпространства $S(x), U(x)$);

(ЛН2) если $x \in V$ и $y = f(x) \in V$, то $P(y)Df(x)$ – изоморфизм $S(x) \to S(y)$ и $Q(y)Df(x)$ – изоморфизм $U(x) \to U(y)$,

$$|P(y)Df(x)v|_y \leq \lambda |v|_x,\ |Q(y)Df(x)v|_y \leq \varepsilon |v|_x, \quad v \in S(x),$$

и

$$|P(y)Df(x)v|_y \leq \varepsilon |v|_x,\ |Q(y)Df(x)v|_y \geq \lambda^{-1} |v|_x, \quad v \in U(x);$$

(ЛН3) если $|.|$ – стандартная евклидова норма, то

$$N^{-1}|v| \leq |v|_x \leq N|v|, \quad x \in V.$$

Из свойства (ЛН3) следует, что, не ограничивая общности, мы можем считать, что евклидова норма является ляпуновской. Кроме того, мы можем

считать, что
$$\|P(x)\|, \|Q(x)\| \le N, \quad x \in V.$$

Выберем число ε и окрестность V так, чтобы выполнялось неравенство
$$\varepsilon \frac{1+\lambda}{1-\lambda} < 1.$$

Тогда найдется такое $l_0 > 0$, что если $l = \varepsilon + N l_0$, то
$$l \frac{1+\lambda}{1-\lambda} < 1. \tag{4}$$

Представим
$$f(x+v) = f(x) + Df(x)v + h(x,v).$$
Так как замыкание V компактно, найдется такое $a > 0$, что
$$|h(x,v)| \le l_0 |v|, \quad x \in V, |v| \le a.$$

Покажем, что это a является константой экспансивности f на V. Рассмотрим такие точки x и y, что
$$x_k = f^k(x), y_k = f^k(y) \in V, \quad k \in \mathbb{Z},$$
и
$$|x_k - y_k| \le a, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Представим $y_k = x_k + v_k$, тогда
$$v_{k+1} = Df(x_k)v_k + h(x_k, v_k). \tag{5}$$

Положим $v_k^s = P(x_k)v_k$ и $v_k^u = Q(x_k)v_k$, тогда
$$m = \sup_{k \in \mathbb{Z}} (|v_k^s| + |v_k^u|) < \infty.$$

Фиксируем k; обозначим $\alpha = |v_k^s|$ и $\beta = |v_k^u|$. Так как $v_k = v_k^s + v_k^u$, из (5) следует, что
$$|v_{k+1}^u| = |Q(x_{k+1})(Df(x_k)(P(x_k)v_k + Q(x_k)v_k) + h(x_k, v_k))|.$$

Мы предположили, что $|v_k| \le a$. Поэтому
$$|h(x_k, v_k)| \le l_0 |v_k| \le l_0(|v_k^s| + |v_k^u|) \le l_0 m.$$

Следовательно,

$$|v^u_{k+1}| \geq \lambda^{-1}\beta - \varepsilon m - Nl_0 m = \lambda^{-1}\beta - lm.$$

Итерируя эту оценку, мы получаем неравенства

$$|v^u_{k+2}| \geq \lambda^{-1}(\lambda^{-1}\beta - lm) - lm = \lambda^{-2}(\beta - (\lambda + \lambda^2)lm),$$

$$\dots$$

$$|v^u_{k+j}| \geq \lambda^{-j}(\beta - (\lambda + \lambda^2 + \dots \lambda^j)lm) \geq \lambda^{-j}\left(\beta - \frac{\lambda lm}{1-\lambda}\right).$$

Так как величина $|v^u_{k+j}|$ ограничена, а $\lambda^{-j} \to \infty$ при $j \to \infty$, множитель в скобках в последней оценке неположителен; отсюда

$$\beta \leq \frac{\lambda lm}{1-\lambda}.$$

Аналогично показывается, что

$$\alpha \leq \frac{lm}{1-\lambda}.$$

Мы получаем оценку

$$\alpha + \beta \leq lm\frac{1+\lambda}{1-\lambda}.$$

Из произвольности k следует, что

$$m \leq lm\frac{1+\lambda}{1-\lambda},$$

но в силу (4) это возможно лишь при $m = 0$. Теорема доказана. □

Обозначим через $\mathrm{card}A$ число элементов конечного или счетного множества A.

Теорема 3 (теорема о константе Биркгофа). *Если фазовое пространство X гомеоморфизма f компактно, то для любой окрестности U неблуждающего множества f найдется такое число $T = T(U)$, что для любой точки $x \in X$ выполнено неравенство*

$$\mathrm{card}\{k \in \mathbb{Z}:\ f^k(x) \notin U\} \leq T.$$

Доказательство теоремы 3 можно найти, например, в [17].

3 Доказательство основного результата

Предположим, что уже доказана гиперболичность неблуждающего множества Ω диффеоморфизма f и мы знаем, что f обладает свойством отслеживания.

Докажем плотность периодических точек в множестве Ω.

Фиксируем произвольную точку $z \in \Omega$. Найдутся такие последовательности точек z_n и чисел $l_n \to \infty$, что

$$z_n \to z \quad \text{и} \quad f^{l_n}(z_n) \to z, \quad n \to \infty.$$

Пусть U – окрестность множества Ω, на которой f экспансивен и пусть a – константа экспансивности.

Найдем такое $\varepsilon > 0$, что 3ε-окрестность множества Ω является подмножеством U. Обозначим через U' 2ε-окрестность множества Ω. Будем считать, кроме того, что $2\varepsilon < a$.

По этому ε найдем такое d, что любая d-псевдотраектория f ε-отслеживается точной траекторией.

Существует такое n, что

$$\operatorname{dist}(z, z_n), \operatorname{dist}(z, f^{l_n}(z_n)) < d/2.$$

Построим последовательность $\{x_k\}$ следующим образом. Представим $k \in \mathbb{Z}$ в виде $k = k_0 + k_1 l_n$, где $k_1 \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq k_0 < l_n$, и положим $x_k = f^{k_0}(z_n)$.

Ясно, что последовательность $\{x_k\}$ имеет период l_n; из выбора n следует, что она является d-псевдотраекторией f.

Покажем, что

$$\{x_k\} \subset U'. \tag{6}$$

Предположим противное. Тогда найдется такой индекс m, что $x_m \notin U'$, т.е.,

$$\operatorname{dist}(x_m, \Omega) \geq 2\varepsilon,$$

но тогда

$$\operatorname{dist}(x_{m+kl_n}, \Omega) \geq 2\varepsilon, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Пусть $p \in M$ – точка, траектория которой ε-отслеживает $\{x_k\}$, т.е.,

$$|f^k(p) - x_k| < \varepsilon, \quad k \in \mathbb{Z};$$

пусть $p_k = f^k(p)$.

Тогда из неравенств (7) следует, что

$$\mathrm{dist}(p_{m+kl_n}, \Omega) \geq \varepsilon, \quad k \in \mathbb{Z},$$

и мы получаем противоречие с теоремой 3. Включение (6) доказано.

Положим $r = f^{l_n}(p)$. Так как $x_k = x_{k+l_n}$, выполнены неравенства

$$|f^k(r) - x_k| = |f^{k+l_n}(p) - x_{k+l_n}| < \varepsilon, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$|f^k(r) - f^k(p)| < 2\varepsilon < a, \quad k \in \mathbb{Z};$$

кроме того, из включения (6) вытекает, что

$$f^k(r), f^k(p) \in U, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Теперь из экспансивности f на U следует, что $r = p$.

Таким образом, p – периодическая точка f.

Так как ε и d можно взять произвольно малыми, такая периодическая точка p есть в произвольно малой окрестности точки z. Наше утверждение доказано. □

4 Литература

1. Pilyugin S. Yu. Shadowing in Dynamical Systems. Lecture Notes in Math., vol. 1706, Springer-Verlag, 1999. xvi+271 p.

2. Palmer K. Shadowing in Dynamical Systems. Theory and Applications. Kluwer, 2000. xiv+299 p.

3. Пилюгин С.Ю. Теория отслеживания псевдотраекторий в динамических системах. эл.журнал "Дифференциальные уравнения и процессы управления 2011, №. 4, с. 96-112,http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/pilyugin2.pdf

4. Robinson C. Stability theorems and hyperbolicity in dynamical systems. *Rocky Mount. J. of Math.*, 1977, pp. 425-437.

5. Morimoto A. The method of pseudo-orbit tracing and stability of dynamical systems. *Sem. Note Tokyo Univ.*, 1979, vol. 30.

6. Sawada K. Extended f-orbits are approximated by orbits. *Nagoya Math. J.*, 1980, vol. 79, pp. 33-45.

7. Pilyugin S. Yu. Variational shadowing. *Discrete Continuous Dynam. Systems, Ser. B.*, 2010, vol. 14, pp. 733-737.

8. Аносов Д.В. Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем. Труды 5 межд.конференции по нелинейным колебаниям Киев,1970,с. 39-45.

9. Bowen R. Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms. Lecture Notes in Math., vol. 470, Springer-Verlag, 1975. i+108 p.

10. Pilyugin S. Yu., Tikhomirov S. B. Lipschitz shadowing implies structural stability. *Nonlinearity*, 2010, vol. 23, pp. 2509-2515.

11. Mañé R. Characterizations of AS diffeomorphisms. Lecture Notes in Math., vol. 597, Springer-Verlag, 1977, pp. 389-394.

12. Плисс В.А. Ограниченные решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений. Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний Киев, 1977, с. 168-173.

13. Tikhomirov S. B. Hölder shadowing on finite intervals. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* (в печати). Препринт: arXiv:1106.4053v4, 2011.

14. Todorov D. Generalizations of analogs of theorems of Maizel and Pliss and their application in shadowing theory. *Discrete Continuous Dynam. Systems, Ser. A*, 2013, vol. 33, pp 4187 - 4205.

15. Пилюгин С.Ю. Введение в грубые системы дифференциальных уравнений. изд. Ленинградского ун-та, 1988, 159 с.

16. Newhouse S. Hyperbolic limit sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1972, vol. 167, pp. 125-150.

17. Пилюгин С.Ю. Пространства динамических систем. Регулярная и хаотическая динамика, Ижевск, 2008, 270с.