ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2008
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172

http://www.neva.ru/journal
http://www.math.spbu.ru/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

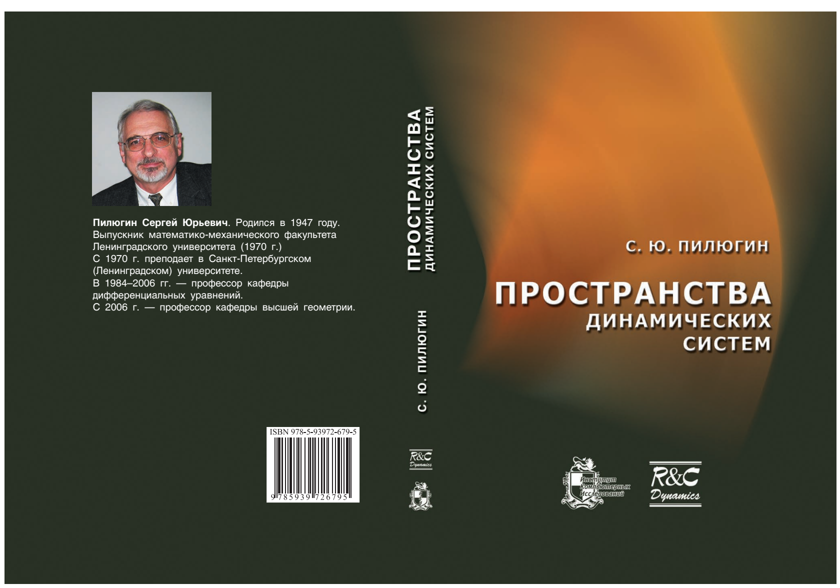
<u>Новые книги по динамическим системам</u>

С.Ю. Пилюгин

Пространства динамических систем

В 2008 г. издательство "Регулярная и хаотическая динамика" (Москва-Ижевск) опубликовало книгу С.Ю.Пилюгина "Пространства динамических систем". Ниже мы перепечатываем предисловие к этой книге.

По вопросу приобретения книги следует обращаться в издательство: subscribe@rcd.ru



Предисловие

Предлагаемая читателю книга написана на основе специальных курсов "Грубые системы дифференциальных уравнений" и "Пространства динамических систем", которые автор читал в течение последних 30 лет студентам кафедр дифференциальных уравнений и высшей геометрии математико-механического факультета Ленинградского - Санкт-Петербургского университета.

Как показывает ее название, книга посвящена теории динамических систем (точнее, структуре пространств динамических систем с различными топологиями).

Мировая математическая литература содержит немало книг, посвященных теории динамических систем. Их список открывает классическая монография Биркгофа [Bi1927]; многие годы советские математики учились теории динамических систем по основополагающей книге Немыцкого и Степанова [НС1949].

Новые подходы к теории динамических систем, связанные с задачей о структурной устойчивости, были отражены в книге Нитецки [Ni1971]; именно по этой книге (а также по оригинальным статьям) автор изучал современную теорию динамических систем.

Позже появились книги Гукенхеймера, Мозера и Ньюхауса [GMN1980], Палиса и ди Мелу [PM1982], Шуба [Sh1987], Робинсона [Robi1995] и других авторов.

Отметим, наконец, недавнюю книгу Брина и Штука [BS2002] и энциклопедическую по охвату тем монографию Катка и Хассельблатта [KH1995].

Предлагаемая книга отличается от известных автору монографий прежде всего тем, что она адресована не только профессионалам-математикам, но в первую очередь людям, которые только начинают знакомство с теорией динамических систем – студентам и аспирантам математических специальностей, а также людям, которые интересуются приложениями математики (в основном тем, кто изучает модели, описываемые динамическими системами).

Этим определяются и две основные цели, которые ставил перед собой автор при написании этой книги:

– дать и объяснить читателю точные определения основных объектов, изучаемых в теории пространств динамических систем, а также сформулировать наиболее важные и фундаментальные результаты этой теории;

– при проведении доказательств излагать их так, чтобы они не требовали от читателя, начинающего знакомиться с теорией, восстановления опускаемых иногда фрагментов рассуждений (которые часто заменяются фразами "ясно, что ..." или "при правильном выборе констант наше утверждение вытекает теперь из ...").

Такими же были установки автора при написании первой его книги "Введение в грубые системы дифференциальных уравнений" [Пи1988], напечатанной в 1988 г. Сравнив эту книгу с предлагаемым текстом, внимательный читатель увидит, что эти книги не дублируют (несмотря на совпадения заголовков некоторых параграфов), а дополняют друг друга.

И дело не только (и не столько) в том, что основными изучаемыми в данной книге объектами являются дискретные динамические системы (в отличие от потоков, порождаемых системами дифференциальных уравнений, которым в основном была посвящена книга [Пи1988]). Изменились подходы автора к описанию некоторых основных конструкций (как, например, при введении топологий на пространствах динамических систем) и к доказательству многих утверждений - упомянем, к примеру, принципиально иное доказательство структурной устойчивости диффеоморфизмов Аносова или иную трактовку гомоклинических точек (в книге [Пи1988] доказательство существования счетного числа периодических точек в окрестности трансверсальной гомоклинической точки проводилось на основе теории индекса, в то время как в данной книге мы сводим эту задачу к описанию подковы Смейла, о которой вообще не упоминалось в [Пи1988]).

Кроме того, в данную книгу включены разделы, посвященные C^0-типичным свойствам динамических систем и отслеживанию псевдотраекторий. Эти современные области теории динамических систем мало освещены в доступных источниках (в этом случае автор опирается на собственные книги [Pi1994] и [Pi1999], явившиеся первыми в мировой математической литературе монографиями по указанной тематике).

Перейдем к описанию содержания книги. Книга состоит из 12 параграфов и 2 приложений.

В п.1 мы определяем основные изучаемые в книге объекты – динамические системы с дискретным и непрерывным временем. Описаны возможные виды траекторий и простейшие свойства инвариантных множеств. В качестве примера рассмотрен гомеоморфизм сдвига на пространстве двоичных последовательностей (позже этот пример будет использован для описания структуры инвариантного множества в подкове Смейла). Описаны вложения дискретных динамических систем в потоки (системы с непрерывным временем) и локальный диффеморфизм Пуанкаре, порождаемый парой трансверсальных площадок к траектории автономной системы дифференциальных уравнений.

В п.2 вводятся две основные топологии на пространствах динамических систем: C^0-топология на пространстве гомеоморфизмов компактного метрического пространства и C^1-топология на пространстве диффеоморфизмов гладкого замкнутого многообразия. Для потоков, порождаемых автономными системами дифференциальных уравнений, описаны связи между двумя возможными путями введения топологии: через оценки разности между правыми частями и через оценки близости самих потоков. Введены понятия множеств II категории по Бэру и типичных свойств.

В п.3 мы изучаем основные отношения эквивалентности на пространствах динамических систем: топологическую сопряженность систем с дискретным временем и топологическую эквивалентность систем с непрерывным временем. Введены понятия структурной устойчивости и Ω-устойчивости. Определено множество неблуждающих точек и доказана теорема Биркгофа о том, что любая траектория проводит лишь конечное время вне окрестности неблуждающего множества.

П.4 – один из основных разделов книги, в котором многие важные для теории структурной устойчивости понятия (устойчивые и неустойчивые многообразия, фундаментальные области и т.д.) детально изучаются в простейшем случае гиперболической неподвижной точки. Описаны свойства гиперболического линейного отображения и доказана теорема Гробмана-Хартмана о локальной топологической сопряженности диффеоморфизма в окрестности гиперболической неподвижной точки и соответствующего линейного отображения. Приведено детальное доказательство теоремы об устойчивом многообразии, основанное на методе Перрона. Рассмотрен случай гиперболической периодической точки.

В п.5 мы переносим результаты, полученные в п.4, на случай гиперболических точки покоя и замкнутой траектории автономной системы дифференциальных уравнений. Показано, как переформулировать определение гиперболичности замкнутой траектории в стандартных для теории дифференциальных уравнений терминах мультипликаторов.

П.6 посвящен определению свойства трансверсальности. Определена трансверсальность отображений и подмногообразий, введено условие трансверсальности пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий для динамических систем. Доказана λ-лемма Палиса. Описана связь между трансверсальностью и гиперболичностью для одномерных отображений.

П.7, второй из основных разделов книги, посвящен гиперболическим множествам. Дается и анализируется определение гиперболического множества. Приведены два примера гиперболических множеств: гиперболическая неподвижная точка и гиперболический автоморфизм двумерного тора. Описаны некоторые свойства гиперболических множеств, используемые в дальнейшем. Сформулирована теорема об устойчивом многообразии. Введена Аксиома A и доказана теорема о спектральном разложении. Формулируются основные результаты теории структурной устойчивости: теоремы о необходимых и достаточных условиях структурной устойчивости и Ω-устойчивости. Описаны гиперболические множества потоков. Проанализированы связи между теоремой о структурной устойчивости и классической теоремой Андронова-Понтрягина о грубости плоских автономных систем.

В п.8 мы доказываем теорему о структурной устойчивости диффеоморфизмов Аносова.

Подкове Смейла и хаотическим множествам посвящен п.9. Мы доказываем теорему о топологической сопряженности диффеоморфизма на инвариантном множестве подковы Смейла и гомеоморфизма сдвига на пространстве двоичных последовательностей. Дано определение хаотического множества и показано, что инвариантное множество подковы Смейла хаотично. Рассмотрены трансверсальные гомоклинические точки плоских диффеоморфизмов. Мы поясняем (на геометрически-интуитивном уровне), почему трансверсальная гомоклиническая точка порождает инвариантное множество хаотического типа.

Классическая C^1-лемма о замыкании сформулирована в п.10. Приведено доказательство более простого результата, C^0-леммы о замыкании (этот результат используется позже, при изучении C^0-типичных свойств динамических систем). Мы формулируем также эргодическую лемму о замыкании, доказанную Мане (эта лемма сыграла очень важную роль при доказательстве необходимости гиперболичности неблуждающего множества для структурной устойчивости).

В п.11 изучаются C^0-типичные свойства динамических систем. Мы определяем метрику Хаусдорфа на пространстве замкнутых подмножеств компактного метрического пространства. Доказана теорема о точках непрерывности полунепрерывного сверху (или снизу) многозначного отображения. Изложены основные результаты теории Такенса о множествах максимально ϵ-

эквивалентных и минимально ϵ-эквивалентных систем, связанные с гипотезой о толерантной устойчивости.

Вторая часть п.11 посвящена аттракторам динамических систем и их поведению при C^0-малых возмущениях системы. Вначале мы описываем некоторые фундаментальные свойства аттракторов. Доказана теорема Херли о типичности устойчивости аттракторов в метрике Хаусдорфа относительно C^0-малых возмущений системы. Изучается устойчивость аттракторов относительно метрики R_0; показано, что такая устойчивость C^0-типична и что она влечет устойчивость по Ляпунову границы аттрактора.

В п.12 излагаются некоторые основные результаты теории отслеживания псевдотраекторий динамических систем. Доказана теорема о липшицевом отслеживании в окрестности гиперболического множества диффеоморфизма. Установлено наличие липшицевого обратного свойства отслеживания для траектории, обладающей (C, λ)-структурой. Приведенные в книге доказательства этих утверждений основаны на использовании теоремы Тихонова-Шаудера о неподвижной точке (насколько известно автору, такие методы не отражены в монографической литературе, хотя круг их использования в задачах теории отслеживания интенсивно расширяется). Полностью охарактеризованы свойства отслеживания для линейных диффеоморфизмов.

В приложении 1 мы излагаем схему доказательства теоремы Мане о необходимости гиперболичности неблуждающего множества для структурной устойчивости.

Приложение 2 основано на лекциях по истории теории дифференциальных уравнений и динамических систем, которые автор читал для аспирантов математико-механического факультета СПбГУ в последние годы. Мы прослеживаем основные направления развития этой теории от Ньютона до конца XX в.

Математические утверждения, входящие в общие университетские курсы, приводятся без ссылки на источник.

Автор этой книги много узнал о дифференциальных уравнениях и динамических системах из книг и статей; не менее важны, однако, были для него контакты с людьми, которые создавали и создают теорию дифференциальных уравнений и динамических систем.

Автор глубоко благодарен тем людям, которые не только учили его дифференциальным уравнениям, динамическим системам и топологии, но и щедрым личным общением помогли ему стать профессиональным математиком:

Ю. Н. Бибикову, С. М. Лозинскому, Н. Н. Петрову, В. А. Плиссу и В. А. Рохлину.

Автор благодарен за сотрудничество своим коллегам по математико-механическому факультету Л. Я. Адриановой, А. Ф. Андрееву, О. А. Иванову, Ю. А. Ильину, С. Г. Крыжевичу, Г. А. Леонову, Н. Ю. Нецветаеву, А. В. Осипову, В. Е. Чернышеву и Ю. В. Чурину.

Много полезного вынес автор из общения с отечественными и иностранными математиками Д. В. Аносовым, В. И. Арнольдом, В. С. Афраймовичем, Ю. С. Ильяшенко, В. М. Миллионщиковым, Ю. И. Неймарком, Г. С. Осипенко, Н. Х. Розовым, А. Н. Шарковским, Л. П. Шильниковым, а также В.-Ю. Байном и П. Клоденом (Германия), Р. Корлессом (Канада), Л. Веном и Ш. Ганом (Китай), Дж. Селлом и Дж. Хейлом (США) и К. Сакаем (Япония).

Автор счастлив, что ему удалось не только научить теории дифференциальных уравнений и динамических систем многих студентов ЛГУ-СПбГУ, но и самому поучиться у некоторых из своих учеников: Н. Ампиловой, А. Катиной, А. Осипова, О. Пламеневской, В. Погонышевой, О. Тараканова, С. Тихомирова и А. Фельштына.