

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 2, 2018

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>

e-mail: jodiff@mail.ru

Численные методы

Моделирование динамических систем

УДК 517.955+004.94

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
РАЗЛИЧНЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ
ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ
ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ**

Подорога А. В., Тихонов И. В.

Московский государственный университет

имени М. В. Ломоносова

Москва

e-mail: anastasiapodoroga@gmail.com, ivtikh@mail.ru

Аннотация

В настоящем сообщении дано расширенное изложение доклада, сделанного авторами на научной конференции «Герценовские чтения – 2017». Наше исследование посвящено математической теории транспортных потоков. Используется стандартный макроскопический подход: рассматривается квазилинейное уравнение дорожного движения. Обсуждаются четыре численных метода решения: метод разностных схем, метод характеристик, метод частиц и предложенный нами метод движения разрывов. Для каждого из этих методов излагается основная идея и отмечаются отличительные особенности вместе с достоинствами и недостатками. Также приведены иллюстрации с типичными примерами работы компьютерных моделей. Ряд численных экспериментов позволяет сформулировать специальное следствие о стабилизации транспортных потоков на кольцевой автодороге.

Ключевые слова: теория транспортных потоков, квазилинейные дифференциальные уравнения, численные методы, стабилизация решений.

Abstract

The paper presents an extended description of the report which was made at the scientific conference “Herzen Readings – 2017”. Our study is devoted to the mathematical theory of the traffic flow. A macroscopic approach is used. We consider a quasilinear equation of the traffic flow and provide the necessary theoretical information. Four numerical methods for solving the equation are discussed: difference schemes, method of characteristics, method of particles and a new method of shocks movement which we propose. For each of these methods the main idea is stated, the typical features with advantages and disadvantages are noted. Also we provide illustrations to give examples of the specified computer methods. The numerical experiments allow us to formulate a special corollary about the stabilization of traffic flows on a ring road.

Keywords: mathematical theory of traffic flow, quasilinear differential equations, numerical methods, stabilization of solutions.

При математическом описании процессов дорожного движения часто используют макроскопический подход, в рамках которого транспортный поток интерпретируют как специфический поток сплошной среды со своими особыми свойствами (см. [1]–[4]). Основными характеристиками являются координата x вдоль дорожного полотна, время t , плотность потока $\rho(x, t)$, скорость потока $v(x, t)$ и, наконец, интенсивность потока $q(x, t)$, означающая усредненное число автомобилей, проходящих через точку x в момент времени t .

Величины ρ , v , q являются зависимыми — они связаны стандартной *формулой потока*

$$q = \rho v. \quad (1)$$

Специфику транспортных задач отражает особое предположение о дополнительной зависимости скорости потока от его плотности: при увеличении плотности потока расстояния между автомобилями сокращаются, и водители неизбежно снижают скорость, чтобы обеспечить должную безопасность движения. Таким образом, скорость является непрерывной, монотонно убывающей функцией плотности:

$$v = V(\rho) \downarrow, \quad 0 < \rho \leq \rho_{\max}. \quad (2)$$

Значение $\rho = 0$ отвечает нулевой плотности, при стремлении к которой реализуется максимальная возможная скорость $v_{\max} = V(0+)$. Значение ρ_{\max}

соответствует максимальной плотности потока «в пробке», при которой все автомобили останавливаются, т. е. $V(\rho_{\max}) = 0$. Учитывая (1), (2), получаем ключевое соотношение, утверждающее, что интенсивность транспортного потока зависит от его плотности:

$$q = \rho V(\rho) \equiv Q(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq \rho_{\max}. \quad (3)$$

Зависимость (3) называют *фундаментальной диаграммой* дорожного движения. Функцию $Q(\rho)$ обычно считают непрерывной, выпуклой вверх и равной нулю на границах области определения: $Q(0) = Q(\rho_{\max}) = 0$. Эти предположения действуют на протяжении всей нашей работы.

Для описания движения потока используют естественный аналог уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \rho = \rho(x, t), \quad q = q(x, t). \quad (4)$$

Соотношение (4) выражает *закон сохранения* (автомобилей) и с учетом (3) дает квазилинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = 0, \quad \rho = \rho(x, t), \quad (5)$$

относительно неизвестной функции ρ . Уравнение (5) применяют при изучении транспортных потоков на протяженных участках шоссе без дополнительных съездов и въездов машин. При заданном начальном распределении плотности возникает задача Коши с условием

$$\rho(x, 0) = \varphi(x). \quad (6)$$

Из общей теории известно (см. [4]–[7]), что гладкое решение задачи (5), (6) может вообще отсутствовать, или же изначально гладкое решение может утратить свою гладкость через конечное время $t = t(\varphi)$. Для таких решений характерны сильные разрывы, называемые еще *ударными волнами*. Скорость движения разрыва с уравнением $x = \xi(t)$ подчинена известному *условию Гюгонио*

$$\xi'(t) = \frac{Q(\rho^+) - Q(\rho^-)}{\rho^+ - \rho^-}, \quad (7)$$

где

$$\rho^+ \equiv \rho(\xi(t) + 0, t), \quad \rho^- \equiv \rho(\xi(t) - 0, t). \quad (8)$$

Соотношение (7) легко получается (см. [5, с. 220]) при замене квазилинейного уравнения (5) его проинтегрированной версией

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{\beta} \rho(x, t) dx = Q(\rho(\alpha, t)) - Q(\rho(\beta, t)). \quad (9)$$

Считают, что равенство (9) должно быть выполнено при почти всех допустимых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ для почти всех $t > 0$. Соответствующую функцию $\rho(x, t)$, удовлетворяющую соотношению (9), называют *обобщенным решением* квазилинейного уравнения (5).

Интегральное тождество (9) приходится использовать и в случае негладкой (точнее, кусочно гладкой) фундаментальной диаграммы (3), когда процесс движения имеет несколько явно выраженных различных фаз. Стандартный пример такой фундаментальной диаграммы дает известная *модель Гринберга* [8] (см. также [1], [2], [4]), определяемая формулой

$$Q(\rho) = \begin{cases} k_1 \rho, & 0 \leq \rho \leq \rho^*, \\ k_2 \rho (\ln \rho_{\max} - \ln \rho), & \rho^* \leq \rho \leq \rho_{\max}, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$k_1 = v_{\max}, \quad k_2 = \frac{v_{\max}}{\ln \rho_{\max} - \ln \rho^*}. \quad (11)$$

График фундаментальной диаграммы (10) представлен на рис. 1.

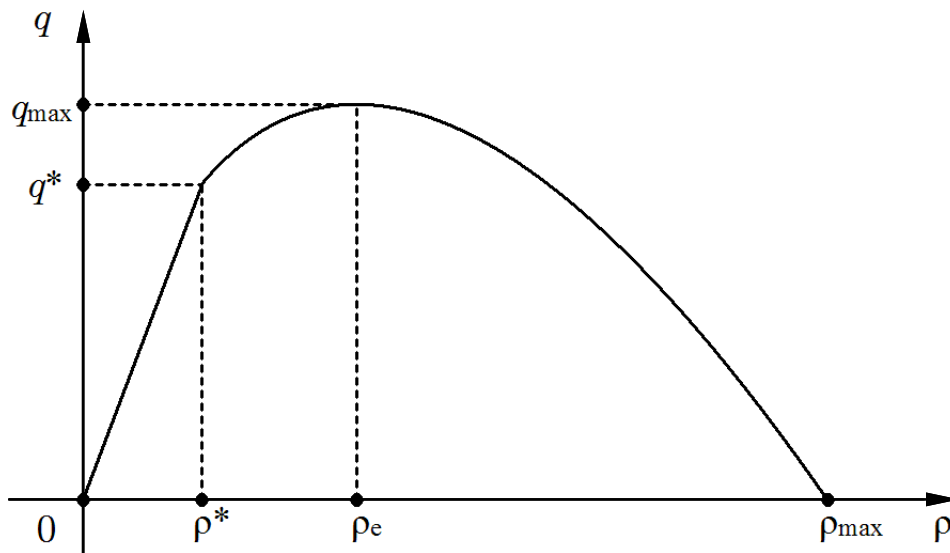


Рис. 1: Фундаментальная диаграмма в модели Гринберга. Максимальное значение интенсивности q_{\max} достигается при экстремальной плотности $\rho_e = \rho_{\max}/e$, где $e = 2.71828\dots$

Выбор коэффициента k_1 означает, что для плотностей $0 \leq \rho \leq \rho^*$ (при малой загрузке шоссе) движение транспортного потока происходит с максимальной скоростью v_{\max} . Значение ρ^* называют *переходной плотностью*, при переходе через которую характер транспортного потока изменяется и движение начинает замедляться. Коэффициент k_2 выбирается так, чтобы обеспечить непрерывность функции $Q(\rho)$. Модель Гринберга (10), (11) имеет некоторые теоретические достоинства (см. [2, с. 28]), но в целом не вполне отвечает практике и затрудняет явное (аналитическое) построение решений квазилинейного уравнения (5).

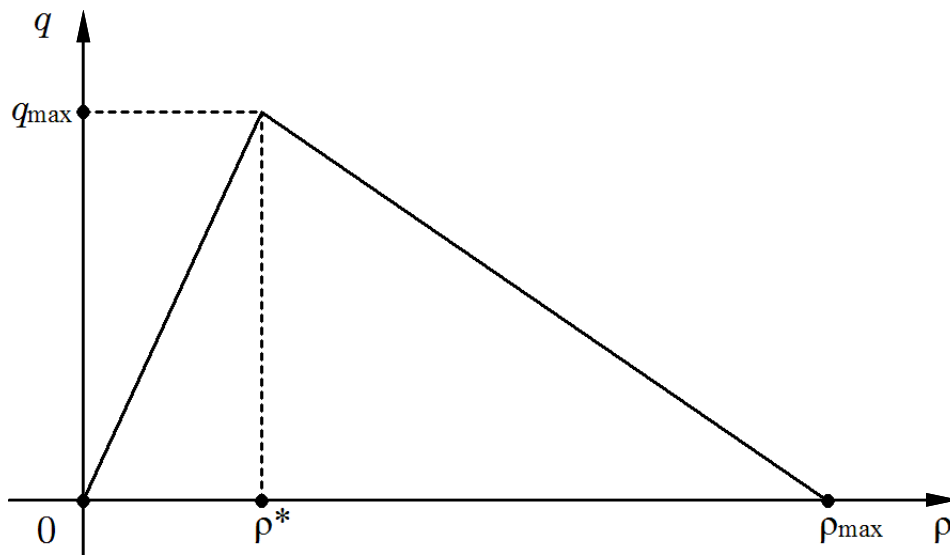


Рис. 2: Фундаментальная диаграмма в модели Нагеля–Шрекенберга. Максимальное значение интенсивности q_{\max} достигается на переходной плотности ρ^* .

Помимо модели Гринберга часто используют более практичную *фундаментальную диаграмму Нагеля–Шрекенберга* [9], определяемую формулой

$$Q(\rho) = \begin{cases} k_1 \rho, & 0 \leq \rho \leq \rho^*, \\ k_2(\rho_{\max} - \rho), & \rho^* \leq \rho \leq \rho_{\max}, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$k_1 = v_{\max}, \quad k_2 = \frac{\rho^* v_{\max}}{\rho_{\max} - \rho^*}. \quad (13)$$

Наш первоначальный интерес к этой фундаментальной диаграмме связан с ее естественным появлением при имитационном моделировании транспортных потоков (см. [10], [11]). Но есть и чисто математические достоинства: кусочно линейная диаграмма (12) состоит из двух линейных кусков (см. рис. 2), что является удобным для явного описания решений.

Точнее, основные «стандартные» решения задачи Коши (5), (6) в модели (12), (13) допускают простую классификацию. В работе [10] выделено четыре базовых случая в зависимости от типа начального состояния $\varphi(x) \equiv \rho(x, 0)$.

Случай 1. Если $0 \leq \varphi(x) \leq \rho^*$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то

$$\rho(x, t) = \varphi(x - k_1 t), \quad (14)$$

т. е. при «малых» значениях $\varphi(x)$ возникает *прямая волна* плотности,двигающаяся «вперед» со скоростью $k_1 > 0$.

Случай 2. Если $\rho^* \leq \varphi(x) \leq \rho_{\max}$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то

$$\rho(x, t) = \varphi(x + k_2 t), \quad (15)$$

т. е. при «больших» значениях $\varphi(x)$ возникает *обратная волна* плотности,двигающаяся «назад» со скоростью $k_2 > 0$.

Случай 3. Если $\rho^* < \varphi(x) \leq \rho_{\max}$ при $x < a$ и $0 \leq \varphi(x) < \rho^*$ при $x > a$, то

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \varphi(x + k_2 t), & x \leq a - k_2 t, \\ \rho^*, & a - k_2 t \leq x \leq a + k_1 t, \\ \varphi(x - k_1 t), & x \geq a + k_1 t. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь возникают две расходящиеся волны плотности, промежуток между которыми заполняется переходной плотностью ρ^* .

Случай 4. Если $0 \leq \varphi(x) < \rho^*$ при $x < a$ и $\rho^* < \varphi(x) \leq \rho_{\max}$ при $x > a$, то

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \varphi(x + k_2 t), & x > \xi(t), \\ \varphi(x - k_1 t), & x < \xi(t), \end{cases} \quad (17)$$

где движение границы разрыва $\xi(t)$ определяется по правилу

$$\xi'(t) = \frac{Q(\varphi(\xi(t) + k_2 t)) - Q(\varphi(\xi(t) - k_1 t))}{\varphi(\xi(t) + k_2 t) - \varphi(\xi(t) - k_1 t)} \quad (18)$$

в соответствии с условием Гюгонио (7), (8). Здесь встречные плотности «сталкиваются», образуя ударную волну с уравнением $x = \xi(t)$ и начальным условием $\xi(0) = a$.

В более сложных случаях используют комбинации перечисленных правил. Поскольку результаты могут оказаться весьма нетривиальными, то приходится привлекать компьютерную технику. Соотношения (14)–(18) служат важным ориентиром при проверке численных расчетов, связанных с задачей Коши (5), (6) в модели Нагеля–Шрекенберга (12), (13).

Вообще, компьютерное моделирование разрывных обобщенных решений представляет серьезные трудности. Для сопоставления разных подходов нами выполнен ряд численных экспериментов, основанных как на известных методах, так и на некоторых новых соображениях. Эксперименты проводились для периодических решений

$$\rho(x + L, t) = \rho(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (19)$$

с фиксированным значением $L > 0$. Предположение (19) соответствует движению замкнутого транспортного потока по кольцевому шоссе длины L . Данная гипотеза удобна с технической точки зрения, поскольку становится возможным следить за решением неограниченное время, не заботясь о задании каких-либо краевых условий (см. также [9], [11], [12]).

Приведем краткий обзор рассмотренных способов численного решения задачи Коши (5), (6) вместе с сопутствующими комментариями.

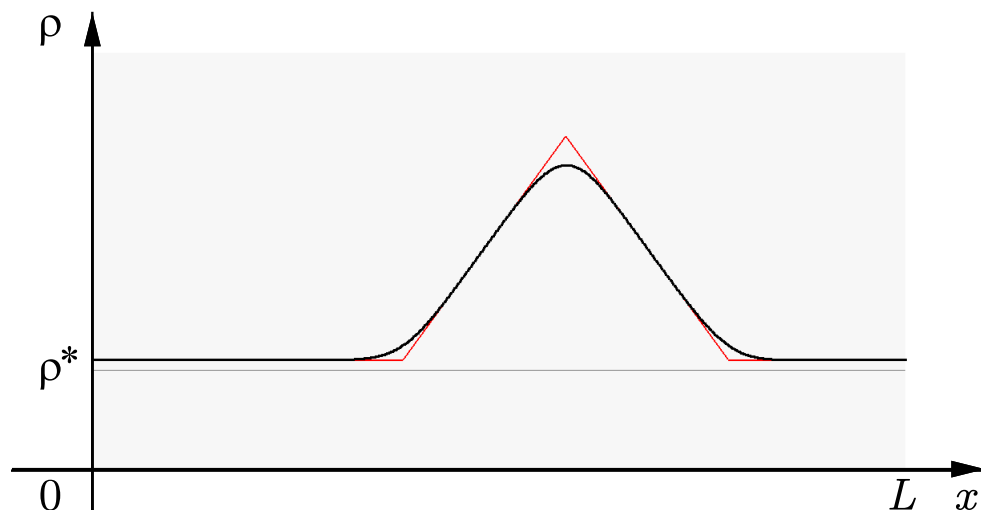


Рис. 3: Метод разностных схем в модели Нагеля–Шрекенберга. Для построения приближенного решения использованы формулы (20), (21). К моменту времени $t = T$, за которое профиль волны прошел четыре полных оборота по периоду L , решение заметно сгладилось. Точное аналитическое решение вида (15) обозначено красной (тонкой) линией.

Использование традиционных **разностных схем** для квазилинейных уравнений вида (5) приводит, как правило, к характерным искажениям формы истинного решения: непрерывные, но негладкие решения со временем неоправданно сглаживаются (см. рис. 3); если же имеются разрывы, то в их окрестностях возникают ложные «пульсации», неизбежно нарастающие с течением времени (см. рис. 4). Подобные эффекты наблюдаются, например, при реализации модифицированной разностной схемы «с полушагом», пред-

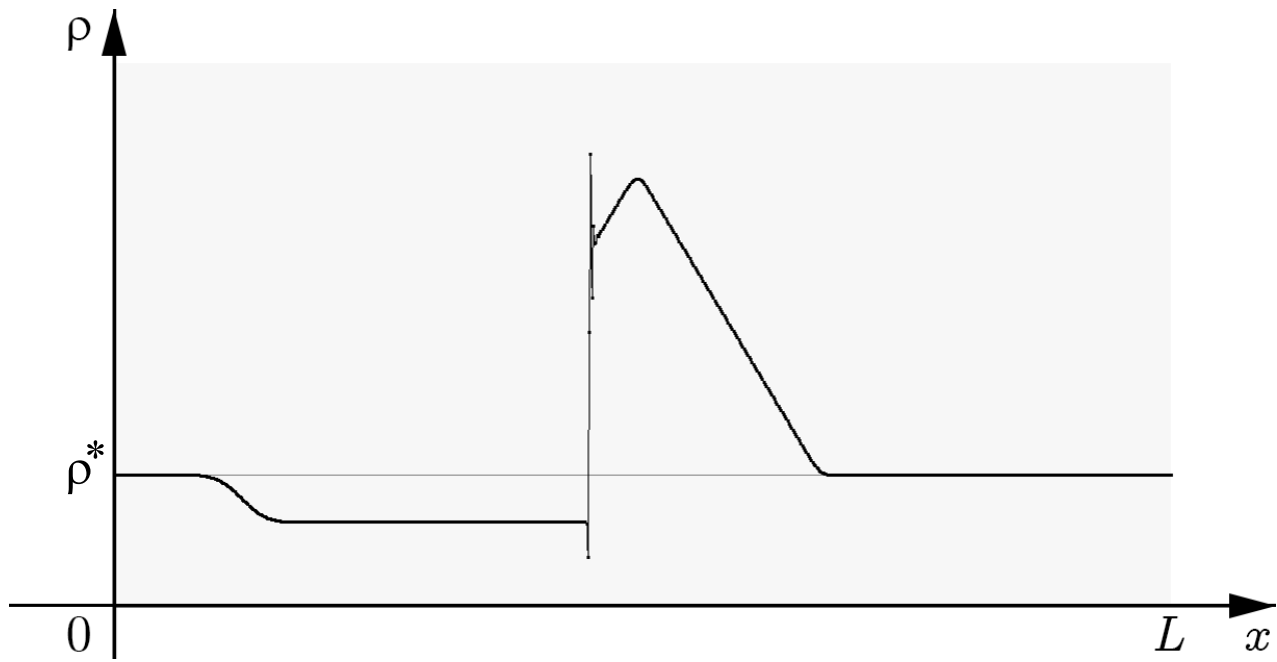


Рис. 4: Метод разностных схем в модели Нагеля–Шрекенберга. Для построения решения использованы формулы (20), (21). На разрыве видны характерные «пульсации».

ложенной в [13, с. 530]. Сначала делается полушаг по формуле

$$\frac{\rho_{m+1/2}^{n+1/2} - \frac{\rho_{m+1}^n + \rho_m^n}{2}}{\tau} + Q' \left(\frac{\rho_{m+1}^n + \rho_m^n}{2} \right) \frac{\rho_{m+1}^n - \rho_m^n}{h} = 0, \quad (20)$$

а затем полный шаг по формуле

$$\frac{\rho_m^{n+1} - \rho_m^n}{\tau} + \frac{Q \left(\rho_{m+1/2}^{n+1/2} \right) - Q \left(\rho_{m-1/2}^{n+1/2} \right)}{h} = 0. \quad (21)$$

Здесь $h > 0$ и $\tau > 0$ — выбранные шаги сеток по координатам x и t соответственно, а ρ_i^j — приближенное значение решения в точке $(ih, j\tau)$ с целыми или полуцелыми параметрами i, j . Величина $Q'(\rho)$ для фундаментальной диаграммы (12) вычисляется по правилу

$$Q'(\rho) = \begin{cases} k_1, & 0 \leq \rho \leq \rho^*, \\ -k_2, & \rho^* < \rho \leq \rho_{\max}. \end{cases}$$

Типичные примеры, воспроизведенные на рис. 3 и рис. 4, показывают, что схемы, подобные (20), (21), применительно к квазилинейным уравнениям вида (5) можно использовать лишь с оговорками.

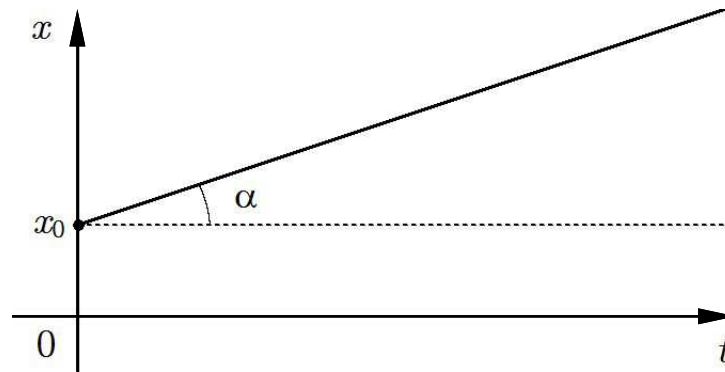


Рис. 5: Характеристика вида (22). При таком расположении осей значение $k = Q'(\varphi(x_0))$ совпадает с угловым коэффициентом луча, т. е. с тангенсом отмеченного угла α .

Намного более точным является другой подход, основанный на классическом аналитическом **методе характеристик** (см. [5]–[7]). Рассматриваем задачу Коши (5), (6) с произвольной фундаментальной диаграммой (3). На фазовой плоскости (x, t) через каждую точку x_0 оси Ox проводим луч

$$x(t) = x_0 + Q'(\varphi(x_0))t, \quad t \geq 0, \quad (22)$$

называемый *характеристикой* уравнения (5). Число $\varphi(x_0)$ определяется начальным условием (6). Вдоль линии (22) классическое решение уравнения (5) должно сохранять постоянное значение, совпадающее с $\varphi(x_0)$ (ср. [5, с. 219]).

Работая с методом характеристик, удобно принять следующее соглашение (ср. с [1, с. 75]): на плоскости (x, t) первую координату x будем откладывать по оси ординат, а вторую координату t — по оси абсцисс. Тогда угловым коэффициентом линии (22) есть в точности число $k = Q'(\varphi(x_0))$ (см. рис. 5). С другой стороны, это же число $k = Q'(\varphi(x_0))$ совпадает с угловым коэффициентом к графику фундаментальной диаграммы (3) в точке $\rho_0 = \varphi(x_0)$. Отмеченную связь полезно иметь в виду при геометрическом анализе действующих закономерностей. Во избежание недоразумений сделаем еще одну оговорку: в методе характеристик вместо традиционных отношений «правее» или «левее» по оси Ox лучше говорить про «выше» или «ниже», апеллируя к наглядным представлениям, ясным из рис. 5.

При пересечении двух характеристик классическое решение перестает существовать, и возникает сильный разрыв решения типа ударной волны с уравнением $x = \xi(t)$, где скорость движения $\xi'(t)$ определяется условием Гюгонио (7), (8). При практической реализации формул (7), (8) значения ρ^+ вычисляются по данным с верхней характеристики, пришедшей на разрыв, а значение ρ^- — по данным с аналогичной нижней характеристики.

При пересечении двух или нескольких разрывов они объединяются в один результирующий разрыв, причем в момент пересечения значение ρ^+ берется с верхнего «берега» самого верхнего разрыва, а значение ρ^- — с нижнего «берега» самого нижнего разрыва.

Если на плоскости (x, t) из-за расхождения характеристик возникают «пустые» (незаполненные) области, то их заполняют дополнительным *веером характеристик*, соответствующим *волне разрежения* (ср. с [5, с. 239]). Для вычисления значений решения $\rho = \rho(x, t)$ на характеристиках веера используют (в согласии с общей теорией) функцию $\rho = R(k)$, обратную к производной

$$k = Q'(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq \rho_{\max}. \quad (23)$$

Здесь переменная k соответствует угловому коэффициенту той или иной характеристики из веера. Построение обратной функции $\rho = R(k)$ к зависимости (23) для гладкой, строго выпуклой вверх фундаментальной диаграммы $Q(\rho)$ не составляет труда. Если же функция $Q(\rho)$ в некоторых точках теряет гладкость, либо имеет в своем составе внутренние линейные куски, то в предложенный алгоритм требуется вносить специальные поправки.

[Допустим, например, что функция $Q(\rho)$ является кусочно гладкой, и ее производная $Q'(\rho)$ терпит скачок в точке $\rho^* \in (0, \rho_{\max})$. Тогда обратная функция $R(k)$ оказывается неопределенной на промежутке

$$Q'(\rho^* + 0) \leq k \leq Q'(\rho^* - 0).$$

Для всех характеристик веера с такими значениями k плотность задается просто как ρ^* .

Допустим теперь, что фундаментальная диаграмма имеет внутренний линейный кусок $[\rho_1^*, \rho_2^*] \subset (0, \rho_{\max})$. На таком участке производная $Q'(\rho)$ будет постоянной:

$$Q'(\rho) \equiv k_0 = \text{const}, \quad \rho \in [\rho_1^*, \rho_2^*],$$

и, значит, обратная функция $R(k)$ при $k = k_0$ будет неоднозначной. Если угловой коэффициент k для некоторой характеристики из веера совпадает со значением k_0 , то данная характеристика объявляется *характеристикой разрыва* решения с предельными значениями ρ_2^* снизу и ρ_1^* сверху от нее.

Дадим в скобках еще одно пояснение: случай, когда линейный кусок диаграммы оказывается граничным, т. е. примыкает к одной из границ отрезка $[0, \rho_{\max}]$, не требует поправок в алгоритм, поскольку соответствующий угловой коэффициент k_0 не сможет реализоваться на характеристиках веера внутри волны разрежения. Тем самым, в моделях Гринберга (10), (11) и Нагеля–Шрекенберга (12), (13) никаких характеристик разрыва не возникает. Характеристики разрыва возможны в более сложных, многофазных кусочно линейных моделях, обсуждаемых далее.]

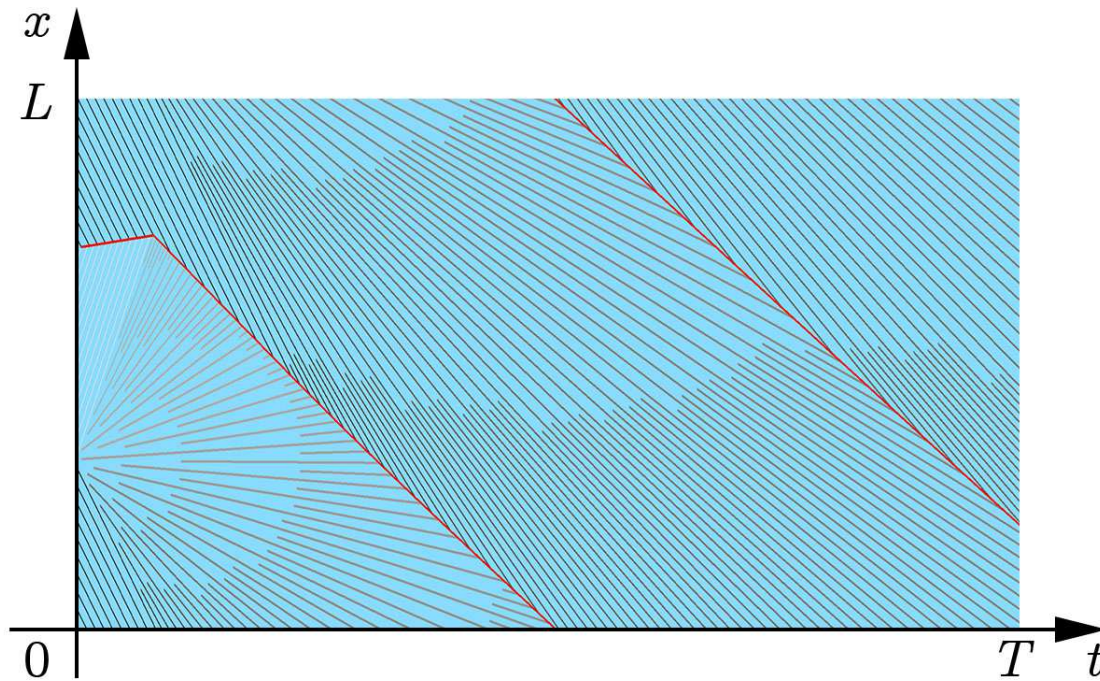


Рис. 6: Построенное поле характеристик для модели Гринберга (10), (11). Интенсивность оттенка отражает значения плотности на характеристиках. Красной (утолщенной) линией отмечен сильный разрыв решения $\rho(x, t)$. Это именно один разрыв, совершающий круговое вращение по кольцу длины L . В данном эксперименте $L = 20$, $T = 35.5$. Решение, отвечающее данному полю характеристик, представлено на следующем рис. 7.

Любопытную описательную модель, основанную на схожих принципах, использовали Лайтхилл и Уизем [14] в своем теоретическом исследовании по теории транспортных потоков (в книге Уизема [1] изложены лишь некоторые фрагменты [14], да и то в крайне сжатой, «компрессивной» форме). Отталкиваясь от идей Лайтхилла и Уизема, нам удалось создать компьютерную программу, реализующую все главные закономерности метода характеристик. Сначала на плоскости (x, t) (где t откладывается вдоль оси абсцисс, а x — вдоль оси ординат) по заданному начальному условию (6) происходит построение самого поля характеристик с выбранной дискретизацией по переменной x (см. пример на рис. 6). Текущий шаг по t на каждой итерации определяется через минимальное время до очередного пересечения соседних характеристик. При этом сразу учитываются возникающие сильные разрывы и необходимость построения дополнительных вѳеров. Каждой линии образовавшегося поля приписано соответствующее значение плотности ρ . Затем, по полученному массиву данных происходит восстановление решения $\rho(x, t)$ в любой фиксированный момент $t \geq 0$ (см. рис. 7). Точность результата зависит от шага дискретизации по x .

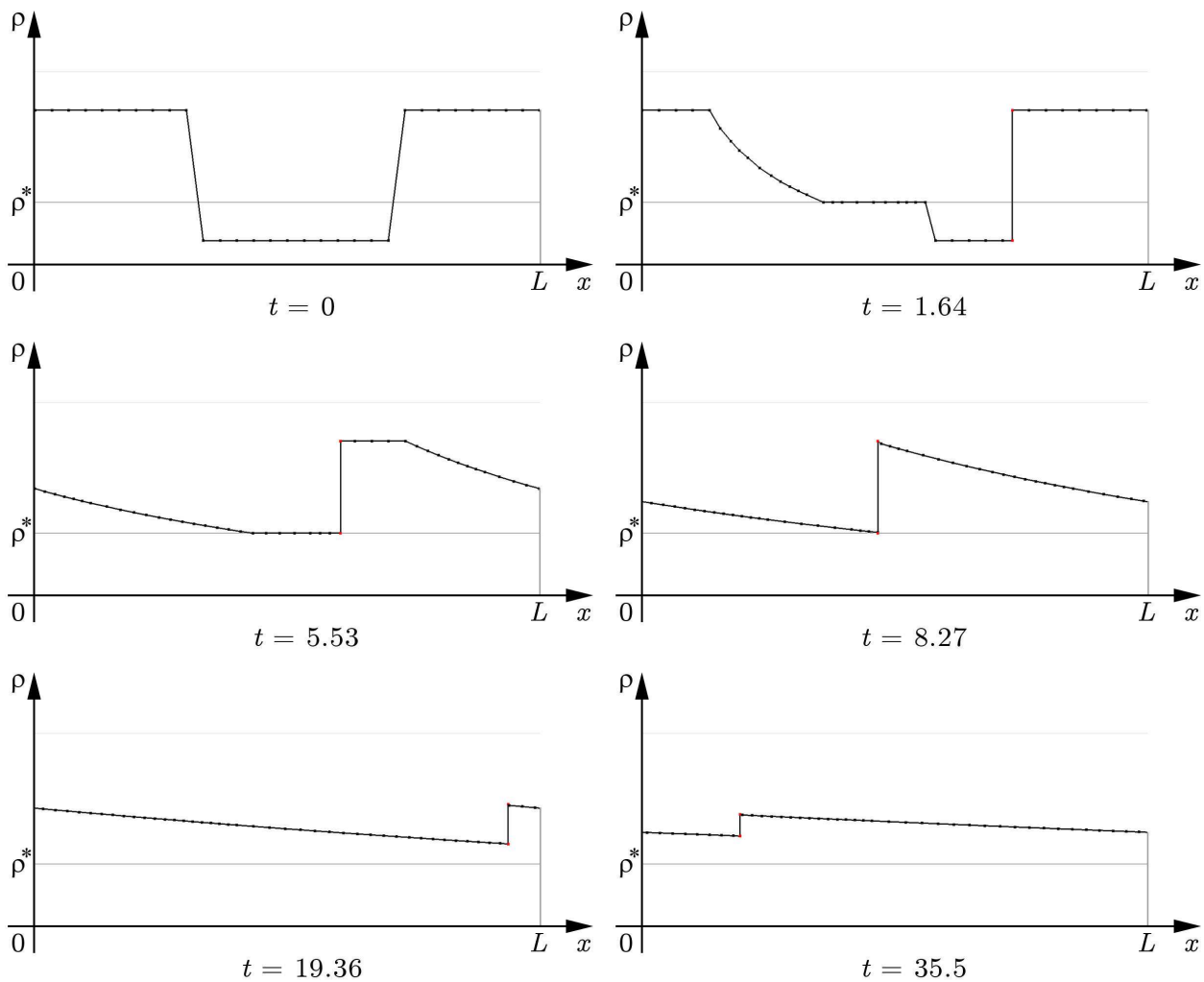


Рис. 7: Решение в модели Гринберга, построенное по полю характеристик с рис. 6.

При таком подходе возникают естественные проблемы. Необходимая точность вычислений чаще всего требует значительного числа характеристик, причем их количество существенно зависит от выбора начального условия (6). Это приводит к вычислительным сложностям с расчетами, использующими достаточно большие объемы памяти. Кроме того, при реализации метода для каждой конкретной фундаментальной диаграммы (3) приходится проводить свою теоретическую подготовку по установлению зависимости (23) и ее обращению в виде $\rho = R(k)$ с особыми поправками в случаях негладких и кусочно линейных фундаментальных диаграмм.

Несмотря на отмеченные сложности, метод характеристик позволяет достаточно точно восстанавливать решение задачи Коши (5), (6) на основе понятного аналитического алгоритма. Отлаженная программа хорошо справляется с проблемой сильных разрывов и не размывает негладкие решения.

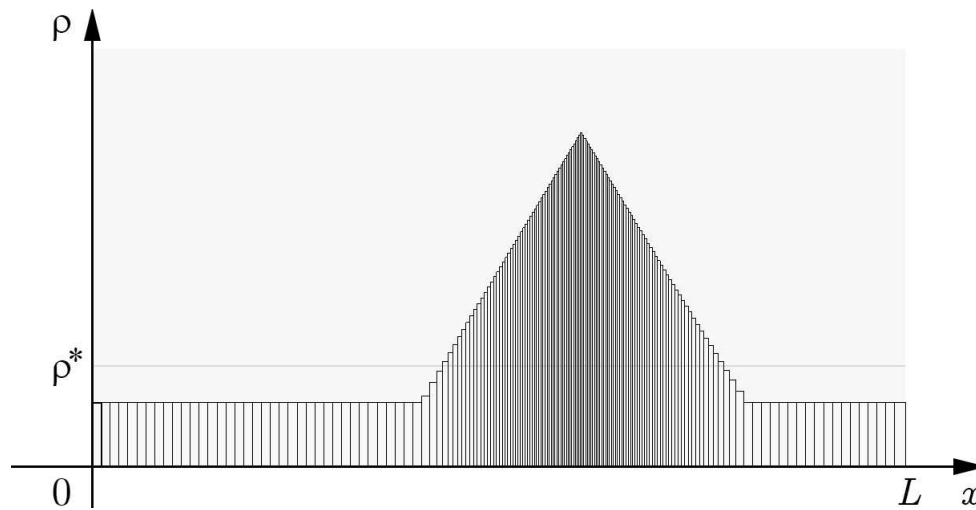


Рис. 8: Пример начального условия в методе частиц. Последующую эволюцию решения см. на рис. 10.

Еще один специальный способ для численного решения квазилинейных дифференциальных уравнений дает **метод частиц** (см., например, [15]–[17]). Применительно к нашему случаю идея метода частиц состоит в том, чтобы представить эволюцию плотности $\rho(x, t)$ как движение набора условных частиц — прямоугольников

$$\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_N, \quad (24)$$

упорядоченно расположенных на оси Ox (см. рис. 8).

Каждая частица Π_i представляет собой элемент, наделенный переменными параметрами: координатой x_i , высотой ρ_i и протяженностью Δ_i . Высота частицы соответствует значению плотности ρ , существующей вблизи точки x_i в текущий момент времени t . Формула площади $m_i = \rho_i \Delta_i$ выражает величину, называемую *массой* частицы (см. рис. 9).

Движение частиц происходит в положительном направлении оси Ox (с учетом L -периодичности) и подчинено определенным правилам. Так, масса m_i каждой частицы Π_i не изменяется с течением времени (*закон сохранения массы*). Скорость движения определяется соотношением $v_i = V(\rho_i)$, обусловленным исходным законом (2). Упорядоченность набора (24) не должна нарушаться: при сближении или разъезжании частиц они соответственно изменяют свои протяженности, и, как следствие, происходит изменение плотности. В итоге в каждый момент времени t в соответствующей точке x_i получаем некоторое значение плотности ρ_i . Само решение $\rho(x, t)$ восстанавливается как интерполяция полученной сеточной функции $\rho_i = \rho_i(x_i, t)$.

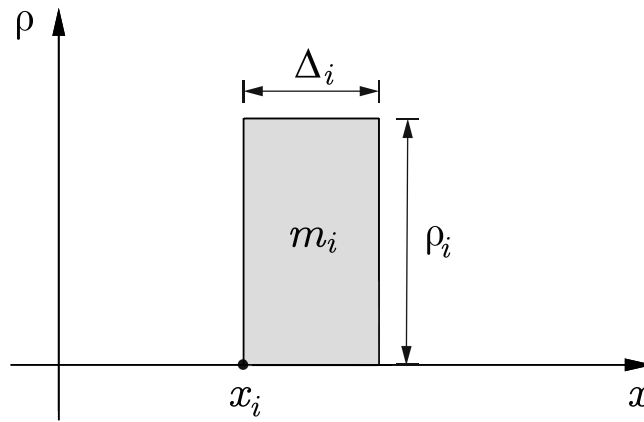


Рис. 9: Условный вид частицы с высотой ρ_i и протяженностью Δ_i . Масса $m_i = \rho_i \Delta_i$ совпадает с площадью частицы. Координата x_i отождествляется с левым краем частицы. Последующее движение частицы происходит в положительном направлении оси Ox .

Опишем формальный алгоритм программы, работающей на основе метода частиц. Пусть состояние i -й частицы на j -й итерации характеризуется параметрами

$$x_i^j, \quad \rho_i^j, \quad \Delta_i^j, \quad m_i. \quad (25)$$

Масса m_i никогда не изменяется. Действуют связи

$$\Delta_i^j = x_{i+1}^j - x_i^j, \quad m_i = \rho_i^j \Delta_i^j.$$

Дальнейшая эволюция происходит так.

Шаг 1. В зависимости от состояния набора $\Pi_1^j, \Pi_2^j, \dots, \Pi_N^j$ на текущей итерации выбирают шаг по времени τ^j . Он должен быть таким, чтобы не возникало слишком сильных «разъездов» и «наездов» частиц.

Шаг 2. Осуществляют сдвиг частиц по формуле

$$x_i^{j+1} = x_i^j + \tau^j V(\rho_i^j). \quad (26)$$

Образуются массив новых координат для всех частиц.

Шаг 3. Вычисляют новые протяженности частиц

$$\Delta_i^{j+1} = x_{i+1}^{j+1} - x_i^{j+1}. \quad (27)$$

Особо отслеживают положительность получаемых значений.

Шаг 4. Вычисляют соответствующие плотности

$$\rho_i^{j+1} = \frac{m_i}{\Delta_i^{j+1}}, \quad (28)$$

получая новый набор высот для всех частиц.

Шаг 5. После того, как все параметры набора $\Pi_1^{j+1}, \Pi_2^{j+1}, \dots, \Pi_N^{j+1}$ найдены, увеличивают номер временного слоя на единицу, прибавляют величину τ^j к значению текущего времени и возвращаются к шагу 1.

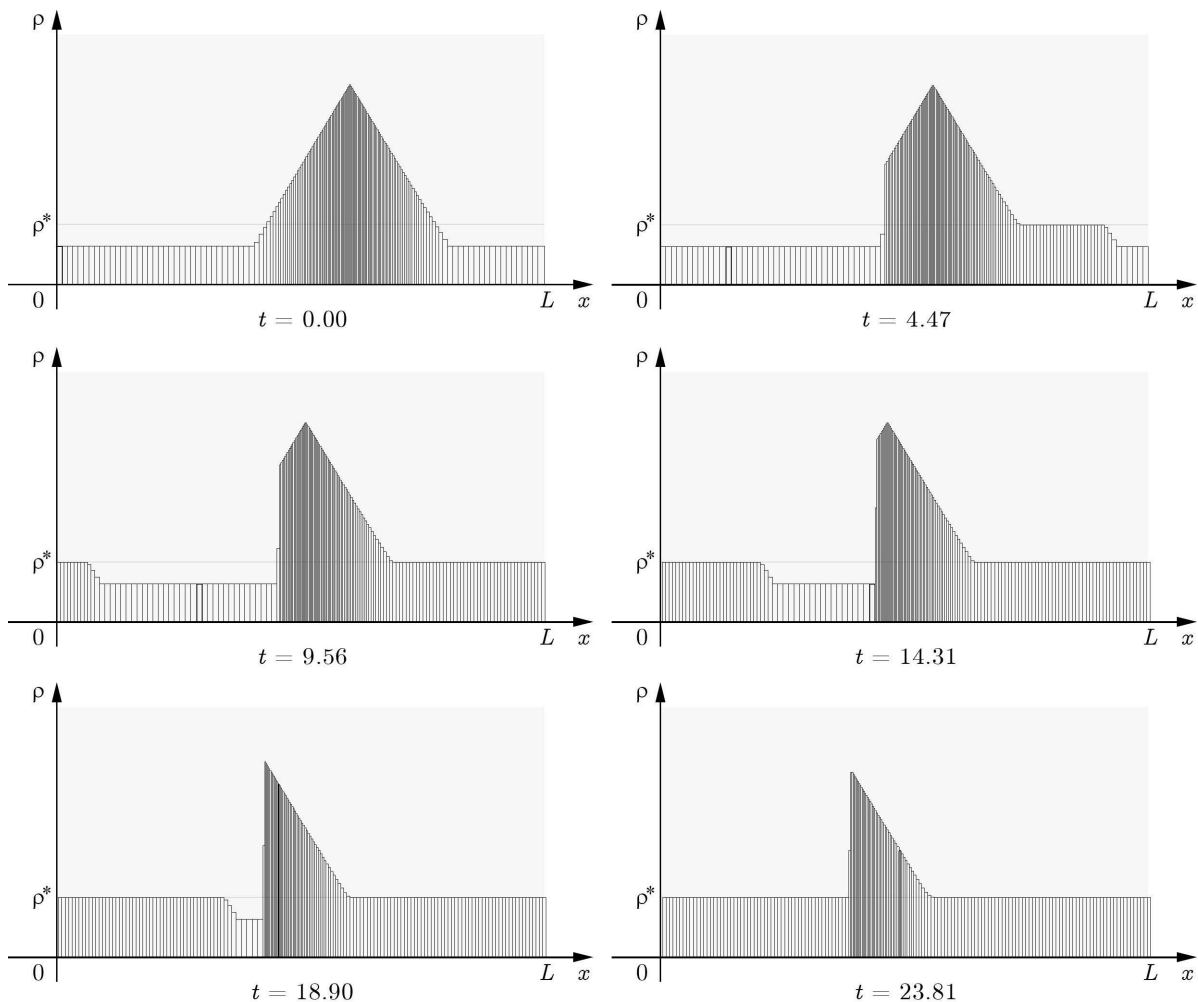


Рис. 10: Эволюция решения в методе частиц для начального условия с рис. 8. Использована модель Нагеля–Шрекенберга. Хотя движение самих частиц всегда происходит «вперед», дальнейшая эволюция плотности при $t \geq 23.81$ примет вид устойчивой обратной волны вида (15). Такая стабилизация решений отдельно обсуждается в конце работы.

Для того чтобы обеспечить точное построение решения, требуется выбирать значение τ^j весьма определенным образом. Если брать τ^j слишком малым, то решение может неоправданно сглаживаться, а если брать τ^j слишком большим, то возможно появление отдельных «перехлестов» частиц с нарушением условия $x_i^{j+1} < x_{i+1}^{j+1}$ при том или ином значении i . Идеальным правилом для выбора значения τ^j мы пока не располагаем, но определенных улучшений в работе программы удастся добиться, используя следующий подход (А. В. Подорога).

На каждой итерации предлагается выбирать τ^j , добиваясь условий

$$\begin{cases} \text{если } \rho_i^j < \rho_{i+1}^j, & \text{то } \rho_i^{j+1} \leq \rho_{i+1}^{j+1}, \\ \text{если } \rho_i^j > \rho_{i+1}^j, & \text{то } \rho_i^{j+1} \geq \rho_{i+1}^{j+1}, \end{cases} \quad (29)$$

выполненных при всех номерах i . Имеющиеся расчетные формулы (26)–(28) дают значение

$$\tau^j = \frac{1}{\max(1, \eta^j \tau_{\max})} \tau_{\max} \quad (30)$$

с коэффициентом

$$\eta^j = \max_{i: \rho_i^j \neq \rho_{i+1}^j} \frac{m_i(V(\rho_{i+2}^j) - V(\rho_{i+1}^j)) - m_{i+1}(V(\rho_{i+1}^j) - V(\rho_i^j))}{m_{i+1} \Delta_i^j - m_i \Delta_{i+1}^j}. \quad (31)$$

Здесь $\tau_{\max} > 0$ — некий стандартный максимальный шаг по времени t , превышать который нецелесообразно, исходя из общего требования «плавности хода» решения. На практике массы всех частиц рекомендуется брать примерно равными, с точностью до малых погрешностей считая, что

$$m_i = m, \quad i = 1, \dots, N. \quad (32)$$

При выборе (32) выражение (31) сильно упрощается. В любом случае формулы (30), (31) гарантируют выполнение ключевых условий (29). Экспериментально установлено, что данный подход обеспечивает приемлемое качество решений достаточно простой структуры при их построении методом частиц. Пример работы программы на основе описанной схемы см. на рис. 10.

Понятно, что идея метода связана с природой задачи — каждая частица представляет собой условную «группу автомобилей», расположенную с нужной плотностью на соответствующем участке дороги. Достоинство метода проявляется в строгом выполнении закона сохранения «автомобилей», а также в том, что для реализации алгоритма достаточно знать лишь основную зависимость $V(\rho)$ из формулы (2). Сложность состоит в том, что для корректной работы программы требуется специальное согласование шага по временной переменной t с изменяющимися параметрами (25) набора частиц (24). Как уже отмечалось, без такого согласования трансформация частиц на некоторых режимах будет противоречить естественным законам эволюции плотности: например, могут возникать «перехлесты» частиц или некорректные сильные уплотнения частиц (с большими значениями ρ) позади частиц с меньшей плотностью. Кроме того, при длительной работе программы не исключено постепенное «размытие» негладких решений.

В заключение обсудим новый **метод движения разрывов**, который совмещает некоторые идеи метода характеристик и метода частиц.

Введем специальный класс кусочно линейных фундаментальных диаграмм, считая, что

$$Q(\rho) = k_j \rho + b_j, \quad \rho_{j-1}^* \leq \rho \leq \rho_j^*, \quad j = 1, \dots, n. \quad (33)$$

Здесь $n \geq 2$ — фиксированное число линейных кусков (*транспортных фаз*) с границами

$$0 = \rho_0^* < \rho_1^* < \dots < \rho_n^* = \rho_{\max}, \quad Q(0) = Q(\rho_{\max}) = 0. \quad (34)$$

Постоянные вещественные коэффициенты $k_1, b_1, \dots, k_n, b_n$ выбраны так, чтобы функция $Q(\rho)$, заданная в (33), была непрерывной и выпуклой вверх на отрезке $[0, \rho_{\max}]$. Подобные фундаментальные диаграммы весьма типичны для теории дорожного движения, например, простейшая диаграмма вида (33) со значением $n = 2$ используется в двухфазной модели Нагеля–Шрекенберга (12), (13). (Система обозначений в модели Нагеля–Шрекенберга несколько отличается от записи (33).)

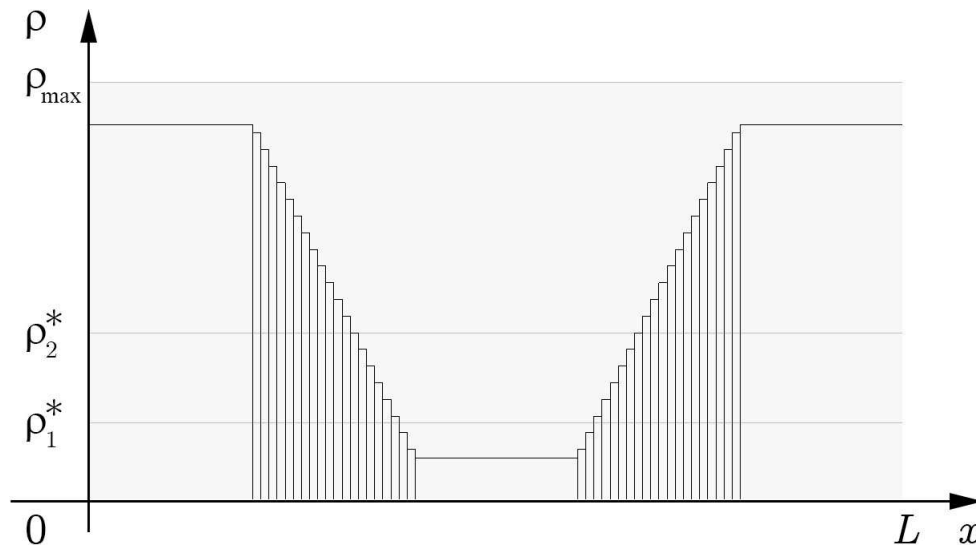


Рис. 11: Пример кусочно постоянного начального условия для метода движения разрывов. Последующая эволюция решения представлена на рис. 13, а карта разрывов на рис. 12.

Ограничимся также удобным классом кусочно постоянных начальных условий (6) (см. рис. 11). Выберем подобную функцию $\varphi(x) \neq \text{const}$. Тогда структура обобщенного решения задачи Коши (5), (6) оказывается достаточно простой: функция $\rho(x, t)$ будет иметь разрывы, между которыми сохраняются постоянные значения плотности. Эти разрывы эволюционируют с течением времени и являются основными объектами следующего алгоритма.

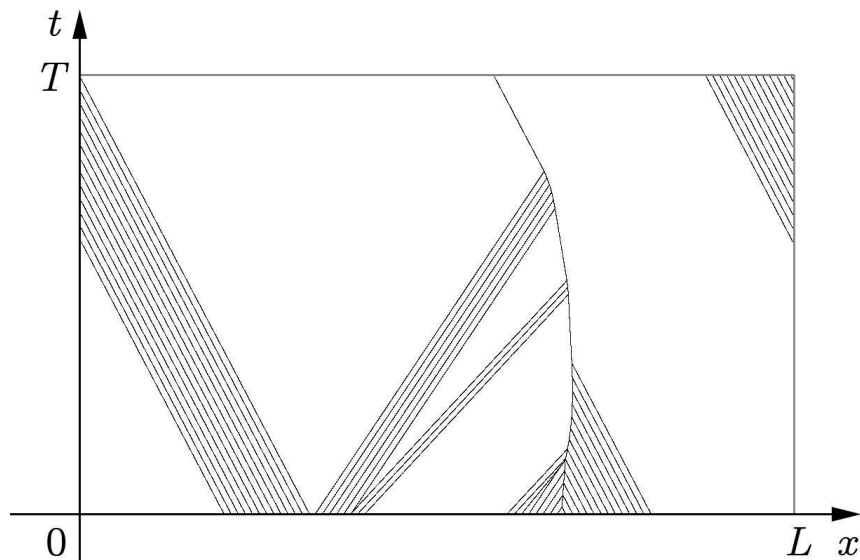


Рис. 12: Карта разрывов на плоскости (x, t) , построенная для начального условия с рис. 11. Использована типичная трехфазная диаграмма. Ориентация осей стандартная. Взяты значения $L = 10$, $T = 20.17$. Общую эволюцию решения см. на рис. 13.

Пусть $x = \xi_i(t)$ — текущая координата i -го разрыва функции $\rho(x, t)$. Постоянные значения плотности справа и слева от разрыва обозначим соответственно через ρ_i^+ и ρ_i^- . При этом

$$\begin{cases} \rho_i^+ \equiv \rho(x, t), & \xi_i(t) < x < \xi_{i+1}(t), \\ \rho_i^- \equiv \rho(x, t), & \xi_{i-1}(t) < x < \xi_i(t) \end{cases}$$

из-за постоянства решения между разрывами. Пользуясь обязательным условием Гюгонио (7), (8), запишем формулу для скорости движения разрыва

$$\xi_i'(t) = \frac{Q(\rho_i^+) - Q(\rho_i^-)}{\rho_i^+ - \rho_i^-}. \quad (35)$$

Скорость (35) остается постоянной, пока данный разрыв сохраняется.

При пересечении двух или нескольких разрывов происходит их объединение в один результирующий разрыв, у которого значение плотности слева соответствует значению плотности слева для самого левого из пересекающихся разрывов, а значение плотности справа — значению плотности справа для самого правого из пересекающихся разрывов. Каждая итерация по времени t происходит от одного момента пересечения разрывов до другого, следующего момента пересечения разрывов. В результате работы компьютерной программы получается *карта разрывов* на плоскости (x, t) (см. рис. 12).

По координатам разрывов и постоянным значениям плотности между ними происходит однозначное восстановление решения $\rho(x, t)$ в любые выбранные моменты времени (см. рис. 13).

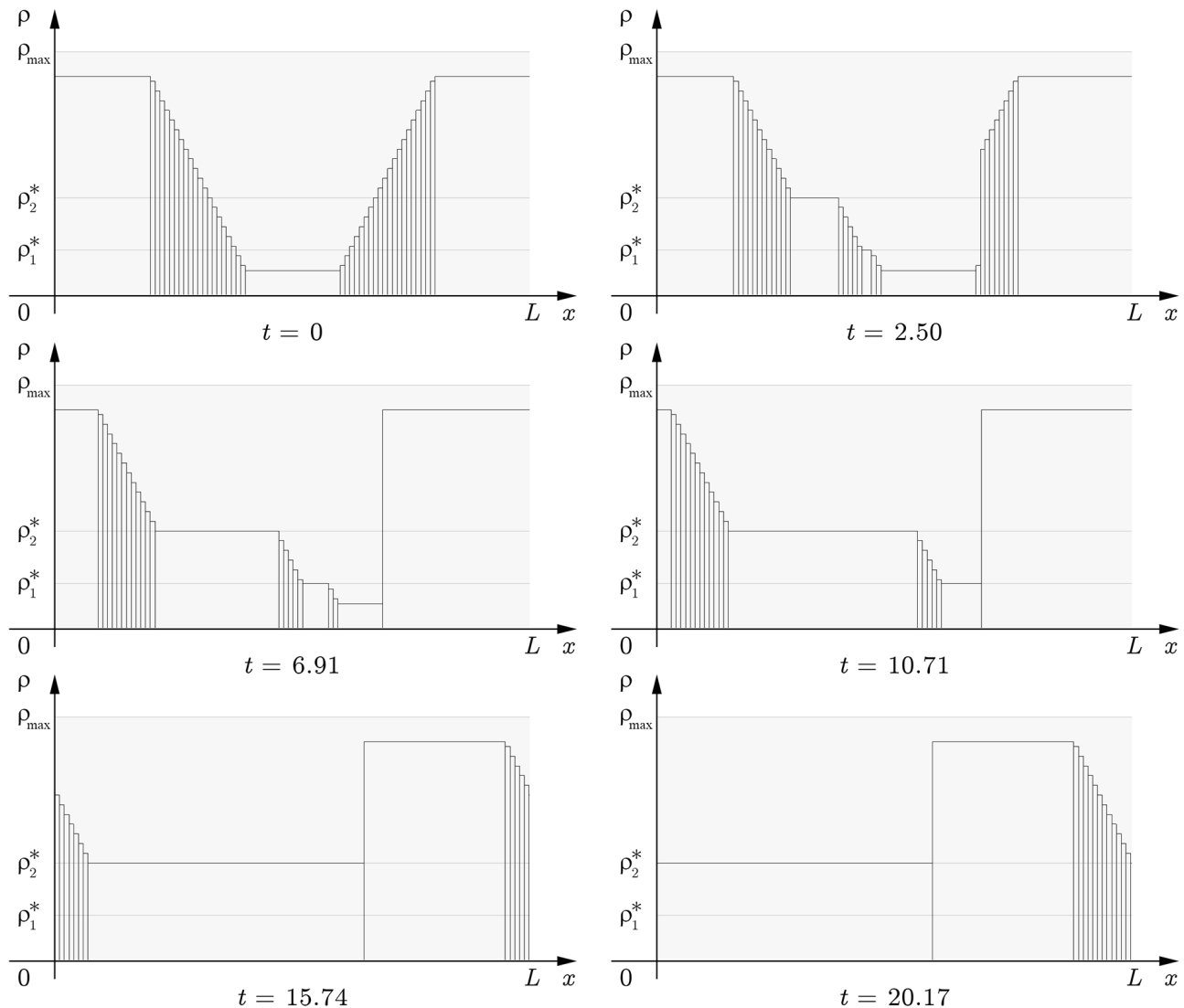


Рис. 13: Эволюция решения в методе разрывов. Использована типичная трехфазная диаграмма. Переходные плотности отмечены по оси ординат. При достаточно больших временах решение стабилизируется к бегущей волне типа (40) (см. пояснения ниже в конце работы).

В намеченный план приходится вносить лишь одну поправку, связанную с проблемой *единственности решения* и известным *условием Олейник* [18] (см. также [19] и [5, с. 223]). Это существенное, но не вполне очевидное условие производит отбор «правильных» разрывов с учетом структуры фундаментальной диаграммы (33). В нашем случае правило отбора проще всего объяснить следующим образом.

Рассматриваем некий разрыв решения с плотностями ρ^+ справа и ρ^- слева от него. На плоскости (ρ, q) к графику $q = Q(\rho)$ вида (33) проведем секущую $q = l(\rho)$ с уравнением

$$l(\rho) \equiv \frac{Q(\rho^+) - Q(\rho^-)}{\rho^+ - \rho^-} (\rho - \rho^-) + Q(\rho^-),$$

соединяющую точки

$$(\rho^-, Q(\rho^-)), \quad (\rho^+, Q(\rho^+)). \quad (36)$$

Условие Олейник допускает при $t > 0$ лишь те разрывы, для которых выполнено соотношение

$$(Q(\rho) - l(\rho)) (\rho^+ - \rho^-) \geq 0 \quad (37)$$

при всех ρ , находящихся между значениями ρ^- и ρ^+ .

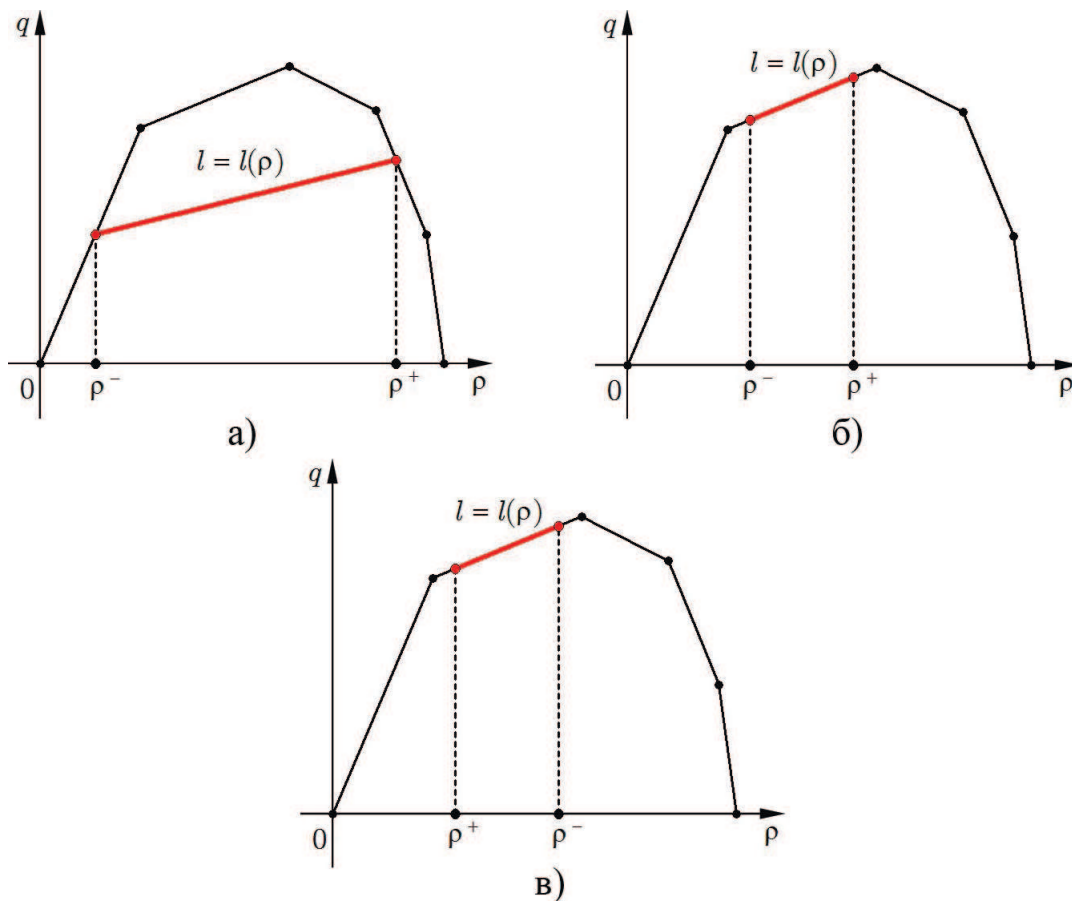


Рис. 14: Примеры выполнения условия Олейник (37) для кусочно линейной, выпуклой вверх пятифазной диаграммы $q = Q(\rho)$. На графиках а) и б) представлен случай $\rho^- < \rho^+$, а на графике в) — случай $\rho^+ < \rho^-$. Ясно, что если $\rho^- < \rho^+$, то никаких принципиальных ограничений на выбор значений ρ^-, ρ^+ нет, а если $\rho^+ < \rho^-$, то такие значения должны попадать на один линейный кусок фундаментальной диаграммы $q = Q(\rho)$.

Формальный смысл условия (37) прост: если $\rho^- < \rho^+$, то для всех ρ между ρ^- и ρ^+ график функции $Q(\rho)$ должен располагаться не ниже отрезка секущей, соединяющей точки (36) на диаграмме (33), а если $\rho^+ < \rho^-$, то график $Q(\rho)$ должен располагаться не выше отрезка секущей. Подобное требование называют еще *условием E* или *условием энтропии* (см. [5]–[7], [18], [19]). Так как диаграмма $Q(\rho)$ предполагается выпуклой вверх, то случай $\rho^- < \rho^+$ не влечет никаких дополнительных ограничений, а случай $\rho^+ < \rho^-$ возможен лишь, если значения ρ^- , ρ^+ попадут на один линейный кусок фундаментальной диаграммы $Q(\rho)$ (см. рис. 14).

Кусочно постоянное решение $\rho(x, t)$ поставленной задачи Коши (5), (6) будет единственным, если при $t > 0$ все его разрывы удовлетворяют условию Олейник (37). При этом, разумеется, на разрывах должно выполняться условие Гюгонио (35). Таким образом, требуется строить решение $\rho(x, t)$ добиваясь выполнения этих двух условий.

Отбор «правильных» разрывов, согласованных с условием Олейник, производится при $t = 0$. Для заданной кусочно постоянной функции $\varphi(x)$ осуществляется перебор всех разрывов с учетом выпуклости вверх кусочно линейной диаграммы (33). Если на i -м разрыве действует соотношение $\rho_i^- < \rho_i^+$, то условие (37) выполнено автоматически, и такой разрыв начинает двигаться в соответствии с условием Гюгонио.

Трудность представляет тот случай, когда $\rho_i^+ < \rho_i^-$. При этом условие Олейник будет выполнено, лишь если пара точек $(\rho_i^-, Q(\rho_i^-))$, $(\rho_i^+, Q(\rho_i^+))$ попадет на один и тот же линейный кусок фундаментальной диаграммы (33), подобно примеру в) на рис. 14. Возможно, что в выбранном начальном условии для какого-то разрыва данное требование не выполняется. Тогда для однозначного построения энтропийного решения вводится специальное понятие *веера разрывов*. Разъясним этот момент чуть подробнее.

Допустим, например, что в начальный момент времени $t = 0$ значение постоянной плотности ρ_i^+ справа от i -го разрыва с координатой $x = \xi_i(0)$ оказалось меньше значения постоянной плотности ρ_i^- слева от того же разрыва, причем

$$\rho_{m-1}^* \leq \rho_i^+ < \rho_m^* < \rho_i^- \leq \rho_{m+1}^*$$

со значениями $\rho_{m-1}^* < \rho_m^* < \rho_{m+1}^*$ из набора (34). В таком случае надо заменить исходный разрыв на два новых разрыва с последовательно убывающими постоянными плотностями ρ_i^- , ρ_m^* , ρ_i^+ . Оба разрыва эволюционируют из точки $(\xi_i(0), 0)$ в согласии с условием Гюгонио.

В более сложном варианте может оказаться, что

$$\rho_{m-1}^* \leq \rho_i^+ < \rho_m^* < \rho_{m+p}^* < \rho_i^- \leq \rho_{m+p+1}^*$$

со значениями $\rho_{m-1}^* < \rho_m^* < \rho_{m+p}^* < \rho_{m+p+1}^*$ из набора (34). Тогда надо заменить исходный разрыв на $p + 2$ разрыва с последовательно убывающими плотностями

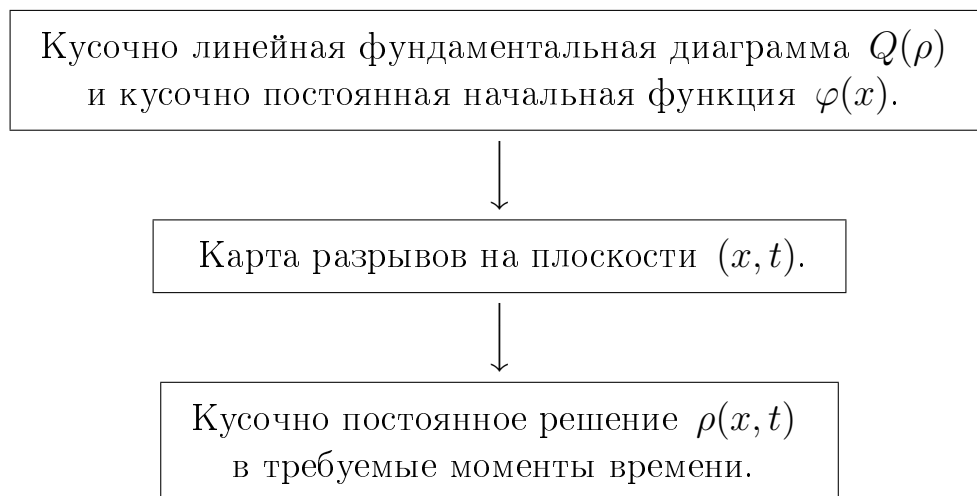
$$\rho_i^-, \rho_{m+p}^*, \dots, \rho_m^*, \rho_i^+,$$

где «многоточие» между ρ_{m+p}^* и ρ_m^* означает перечисление всех промежуточных переходных плотностей из набора (34) (если такие есть).

В результате на плоскости (x, t) возникает веер разрывов, исходящий из точки $(\xi_i(0), 0)$ и сохраняющий кусочно постоянную структуру функции $\rho(x, t)$. Именно здесь, при построении веера (для сохранения кусочно постоянной структуры решения) понадобилось требование (33) о кусочно линейной природе фундаментальной диаграммы $Q(\rho)$.

В предлагаемом методе вееры разрывов приходится генерировать исключительно на «нулевой» итерации, после чего разрывы лишь объединяются. Нужное число «правильных» разрывов, необходимых для построения энтропийного решения, элементарно вычисляется, исходя из заданного начального условия (6) и структуры (33) фундаментальной диаграммы $Q(\rho)$. После учета всех обстоятельств карта разрывов строится компьютерными средствами.

Итак, метод движения разрывов решает задачу Коши (5), (6) по схеме, которая формально представима так.



Алгоритм работает быстро и точно, практически не искажая форму истинного решения. Единственный недостаток связан с ограниченной областью применимости: метод движения разрывов в своем каноническом варианте подходит лишь для кусочно линейных фундаментальных диаграмм $Q(\rho)$ и кусочно постоянных начальных функций $\varphi(x)$.

Впрочем, при наличии не кусочно линейной, а кусочно гладкой диаграммы $Q(\rho)$ и кусочно непрерывной начальной функции $\varphi(x)$ можно использовать соображения аппроксимации с заменой: «кусочно гладкая диаграмма $Q(\rho)$ » \longrightarrow «кусочно линейная диаграмма $\tilde{Q}(\rho)$ » и «кусочно непрерывная функция $\varphi(x)$ » \longrightarrow «кусочно постоянная функция $\tilde{\varphi}(x)$ ». Данный переход производится естественным путем — через достаточно частые измельчения. Опыты показывают, что точность решения при такой аппроксимации хорошо сохраняется значительное время $0 \leq t \leq T$.

Помимо прочего, кусочно линейные фундаментальные диаграммы обладают важной особенностью: они обеспечивают полную стабилизацию всех периодических решений за некоторое **конечное время** (см. примеры с эволюцией решений на рис. 10 и рис. 13). Компьютерные эксперименты и нарабатанный опыт позволяют нам сформулировать следующий универсальный **принцип стабилизации решений**.

Рассматриваем квазилинейное уравнение (5) с выпуклой вверх, кусочно линейной фундаментальной диаграммой вида (33). Пусть $\varphi(x)$ — произвольная кусочно непрерывная (не обязательно кусочно постоянная) L -периодическая функция на \mathbb{R} , удовлетворяющая условию $0 \leq \varphi(x) \leq \rho_{\max}$ при $x \in \mathbb{R}$. Пусть

$$M \equiv \int_0^L \varphi(x) dx, \quad (38)$$

причем

$$\rho_{j-1}^* L \leq M \leq \rho_j^* L \quad (39)$$

с некоторыми значениями ρ_{j-1}^* , ρ_j^* из набора (34). Предположим также, что $\rho(x, t)$ — обобщенное L -периодическое решение задачи Коши (5), (6), построенное для указанной начальной функции $\varphi(x)$. Точнее, пусть $\rho(x, t)$ — энтропийное решение, для разрывов которого при всех $t > 0$ выполнено условие единственности Олейник. Тогда существует момент времени $t^* > 0$, зависящий лишь от величины $L > 0$ и параметров диаграммы (33), начиная с которого решение $\rho(x, t)$ принимает вид *бегущей волны*

$$\rho(x, t) = f(x - k_j t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq t^*. \quad (40)$$

Здесь $f = f(s)$ — некоторая кусочно непрерывная L -периодическая функция на \mathbb{R} , ограниченная величинами

$$\rho_{j-1}^* \leq f(s) \leq \rho_j^*, \quad s \in \mathbb{R},$$

а коэффициент k_j взят из формулы (33) с тем же значением j , что и в (39).

Отмеченный принцип требует, разумеется, строгого обоснования средствами теории квазилинейных дифференциальных уравнений, но его практический смысл полностью ясен. В случае кусочно линейной фундаментальной диаграммы $Q(\rho)$ для любого замкнутого транспортного потока на кольцевой автодороге через некоторое время происходит стабилизация характера движения с последующим изменением плотности в виде простой бегущей волны типа (40). Скорость перемещения волны определяется соотношением (39) между числом M из формулы (38) и параметрами фундаментальной диаграммы (33). Понятно, что M выражает общее число «автомобилей», расположенных на выбранном кольце. Частный случай указанного принципа для двухфазной модели Нагеля–Шрекенберга обсуждался ранее в сообщении [11] (см. также [9], [12]).

Мы признательны С. В. Богомолу за указание на метод частиц и стимулирующие обсуждения. Авторы отмечают также вклад Г. А. Парафейникова, выполнившего ряд первичных расчетов на основе разностных схем и метода частиц.

Список литературы

- [1] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: «Мир», 1977. – 624 с. (Whitham G.V. Linear and nonlinear waves.)
- [2] Иносэ Х., Хамада Т. Управление дорожным движением. – М.: «Транспорт», 1983. – 248 с. (Hiroshi Inose, Takashi Hamada. Road traffic control.)
- [3] Treiber M., Kesting A. Traffic flow dynamics. Data, models and simulation. – Berlin: Springer-Verlag, 2013. – 506 p.
- [4] Гасников А. В. и др. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: Учебное пособие / Под ред. А. В. Гасникова. Издание 2-е, испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2013. – 427 с.
- [5] Лакс П. Д. Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. – 296 с. (Lax P.D. Hyperbolic partial differential equations.)
- [6] Эванс Л. К. Уравнения с частными производными. – Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. – 576 с. (Evans L. C. Partial differential equations.)

- [7] Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А. Уравнения с частными производными первого порядка. (Учебное пособие). – М.: Мех-мат МГУ, 1999. – 96 с.
- [8] Greenberg H. An analysis of traffic flow // *Operations Research*. 1959. Vol. 7. No. 1. – P. 79–85.
- [9] Nagel K., Schreckenberg M. A cellular automaton model for freeway traffic // *Journal de Physique I France*. 1992. Vol. 2. No 12. – P. 2221–2229.
- [10] Подорога А. В., Тихонов И. В. Квазилинейное уравнение дорожного движения и компьютерное моделирование // *Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2015.* – СПб.: изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. – С. 209–213.
- [11] Подорога А. В., Тихонов И. В. О предельных состояниях замкнутых транспортных потоков на кольцевой автодороге // *Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2016.* – СПб.: изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2016. – С. 222–228. (См. также: *Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2016. № 2. Материалы конференций.* – С. 271–279.)
- [12] Смирнов Н. Н., Киселев А. Б., Никитин В. Ф., Юмашев М. В. Математическое моделирование автотранспортных потоков. – М.: Мех-мат МГУ, 1999. – 31 с.
- [13] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы / 7-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. – 636 с.
- [14] Lighthill M. J., Whitham G. B. On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads // *Proceedings of the Royal Society of London. Ser. A, Math. and Physical Sciences*. 1955. Vol. 229. No. 1178. – P. 317–345.
- [15] Богомолов С. В., Замараева А. А., Карабелли Х., Кузнецов К. В. Консервативный метод частиц для квазилинейного уравнения переноса // *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*. 1998. Т. 38. № 9. – С. 1602–1610.
- [16] Баев А. Ж., Богомолов С. В. Об устойчивости разрывного метода частиц для уравнения переноса // *Математическое моделирование*. 2017. Т. 29. № 9. – С. 3–18.

- [17] Подорога А. В. Модифицированный метод частиц для квазилинейного уравнения дорожного движения // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVIII Международной научной конференции, посвященной 70-летию В. И. Мунермана. Вып. 18. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2017. – С. 30–33.
- [18] Олейник О. А. О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения // Успехи матем. наук. 1959. Т. 14. № 2 (86). – С. 165–170.
- [19] Keyfitz (Quinn) В. Solutions with shocks: an example of an L_1 -contractive semigroup // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1971. Vol. 24. – P. 125–132.