

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 2, 2015
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных
уравнений

**Об одном подходе к построению двусторонних оценок множеств
решений нелинейных дифференциальных уравнений с
интервальными параметрами на основе проекционных
методов**

А.А. Рогоза

Московский государственный технический университет им. Н.Э.
Баумана, Калужский филиал. 248000, Россия, г. Калуга, ул.
Баженова, д.2. aemaeth_eternity@mail.ru

Аннотация

В работе рассматриваются вопросы, связанные с построением двусторонних оценок множеств решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с интервальными параметрами. Обоснована сходимость интервальных оценок к множеству точных решений в хаусдорфовой метрике, доказаны теоремы о покоординатной сходимости к множеству точных решений. Тем самым, предлагается подход, позволяющий бороться с эффектом «обертывания» (wrapping effect). Алгоритм строит аппроксимирующие решения указанной задачи по аналитическим формулам, полученным на основе проекционных методов. Существенным является то, что построенное таким образом решение учитывает интервальную оценку глобальной ошибки, что позволяет получать гарантированные оценки.

Ключевые слова: проекционные методы, включение множества решений, интервальный метод последовательных приближений, интервальные расширения.

Abstract

The paper deals with issues related to the construction of two-sided estimates of the solution sets of systems of nonlinear differential equations with interval parameters. The convergence of interval estimates to the set of exact solutions in the Hausdorff metric has been substantiated. Theorems on coordinate wise convergence to the set of exact solutions have been proved. Thus, the proposed approach allows us to deal with wrapping effect. The algorithm constructs the approximate solutions of this problem by using analytical formulas obtained by projection methods. It is essential that the constructed approximation takes into account the global error interval estimate, which results in getting a guaranteed evaluation.

Keywords: projection methods, inclusion of the solution set, interval method of successive approximations, interval extension.

1. Введение

Многие задачи математической теории управления приводят к необходимости изучать математические модели, описываемые в виде систем дифференциальных уравнений. Математические модели часто поддаются исследованию только с применением численных методов, поэтому встают вопросы округления, а так же вопросы гарантированной точности полученного численного решения. Следует отметить задачи, в которых математические модели содержат априори неизвестные параметры, имеющие разброс относительно номинальных значений, поэтому встают вопросы, как описать множество решений таких задач. Широкий круг таких задач вызвал развитие методов построения верхних и нижних оценок или методов включения решений (*enclosure methods*) [1, 4, 12, 22].

Методы включения решения основаны либо на использовании теорем сравнения [1, 4] либо на реализации основных операций с некоторыми множествами, включающими всю совокупность решений исходной задачи, параллелепипедами [7, 8, 17, 18], эллипсоидами [11], шарами в некоторой норме. При этом операции над этими множествами должны строиться так чтобы сохранялся принцип монотонности по включению [1, 4].

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными параметрами вычисление двусторонних оценок представляет значительный интерес в прикладных задачах. Это объясняется возможностью строить на их основе оценки множеств решений.

Задачи оценивания нашли широкое применение в математической теории управления. С развитием понятия робастности [7, 8, 17, 18] в теории управления, все чаще стало уделяться внимание задачам с неопределенностью: параметрической или сигнальной (в данной работе рассматривается неопределенность в задании параметров системы дифференциальных уравнений, в случае, когда эти множества — интервалы, мы будем иметь дело с интервальной неопределенностью). Системы управления работают в сильно неопределенной

среде и должны обеспечивать приемлемое качество управления. В связи с этим встает вопрос, как обеспечить приемлемое качество управления в условиях неопределенности, выбор моделей функционирующих в условиях неопределенности, построение эффективных алгоритмов оценивания учитывающих различного рода неточности в задании параметров системы.

В настоящее время гарантированное оценивание – одна из активно развивающихся ветвей математической теории управления. Ее исследованию посвящено множество работ. Следует отметить, что одним из первых ученых, который отметил необходимость построения двусторонних оценок решений дифференциальных уравнений был русский математик и механик Чаплыгин С.А. в 1919 году в работе посвященной новому методу решения дифференциальных уравнений. Дальнейшее развитие методов построения оценок и их использования для анализа решений дифференциальных уравнений содержится в работах [12]. Применительно к математической теории управления, в качестве основных приведем книги [8, 14], сборники статей и журналов [17, 24].

Основным в задаче гарантированного оценивания множеств решений систем дифференциальных уравнений, является множество достижимости или информационное множество [7, 11]. Оно определяет всевозможный набор фазовых состояний динамической системы в различные моменты времени. Это множество играет существенную роль при решении многих задач теории управления и идентификации [7, 11]. Поэтому необходимо их точное или приближенное знание. Нахождению, исследованию и описанию свойств множеств достижимости посвящено много работ: Куржанский А.Б. [8], Красовский Н.Н. [5, 6], Черноусько Ф.Л. [14, 15].

В настоящей работе рассматривается один из подходов к построению двусторонних оценок множеств решений систем дифференциальных уравнений с интервальными параметрами основанный на методах интервального анализа.

Как известно, использование интервальных методов позволяет получить гарантированные двусторонние оценки решений дифференциальных уравнений, но практическое вычисление этих оценок связано с проблемой экспоненциального взаимного расхождения найденных границ — явлением, которое получило название эффекта обертывания (wrapping effect) или эффект Мура. Это явление проявляется в большинстве интервальных и двусторонних методов оценки решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений [2, 23].

Поэтому получение границ множеств решений, свободных от экспоненциального разбегания, является весьма актуальным. Ниже предлагается один из подходов к нахождению таких границ, основанный на аппроксимации оператора сдвига вдоль траектории с последующим интервальным оцениванием.

2. Постановка задачи, структура работы, применяемый метод

Постановка задачи, структура работы.

Рассмотрим задачу с интервальными начальными данными

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (1)$$

где

$$x(t_0) \in X_0, X_0 = [x_0 \mid \underline{x_0} \leq x_0 \leq \overline{x_0}], x(t_0) \in R^n, t \in [t_0, t_k], \quad (2)$$

$x(t_0)$ – начальные условия, принадлежащие интервалу X_0 .

Требуется вычислить интервальную функцию

$$X(t) = [\underline{X}(t), \overline{X}(t)], \quad (3)$$

для которой

$$x(t) \in X(t), \forall t \in [t_0, t_k]. \quad (4)$$

Перейдем от дифференциального уравнения (1) к соответствующему нелинейному интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_D K(t, \tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad (5)$$

где $K(t, \tau) = 1(t - \tau)$ – линейное ядро, $x(t)$ – неизвестная функция, D – компактное топологическое пространство, t, τ – переменные. Применим подход Каухера [1, 22] к решению задачи (5), основанный на теореме существования и единственности Пикара, использующий сжимающие итерации в интервальных функциональных пространствах.

Пусть $[t_0, t_k]$ – соответствующая окрестность точки t , а $C_{I[t_0, t_k]}$ обозначает множество непрерывных интервальнозначных функций на $[t_0, t_k]$, тогда отображение $F : C_{I[t_0, t_k]} \rightarrow C_{I[t_0, t_k]}$, заданное выражением (5):

$$F(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t_k} K(t, \tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad (6)$$

является α – сжатием, где $X \in C_{I[t_0, t_k]}$. Таким образом, если $F(x)(t)$ находится строго внутри $X(t)$ как множества, то существует единственное решение $x(t)$ задачи (6) и $x(t) \in X(t)$. Поскольку F является сжатием, то можно получить включение решения, достаточно близкое к множеству точных решений с помощью итераций

$$X_{j+1} = F(X_j). \quad (7)$$

Пусть на интервале $[t_0, t_k]$ введена равномерная сетка узлов

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t_k, \tau = \max_t \{t_{i+1} - t_i\}.$$

Через $X(t)$ обозначим совокупность точных решений задачи (1) как

$$X(t) = \{x(t) \mid x(t_0) \in X_0, X_0 = [\underline{x_0}, \overline{x_0}]\}, \quad (8)$$

а через $\tilde{x}(t)$ – приближенное решение задачи (1), тогда на шаге интегрирования i получаем включение

$$x(t_i) \in X(t_i) = \left[\underline{X}(t_i), \overline{X}(t_i) \right], \underline{X}(t_i), \overline{X}(t_i) \in R^n, \quad (9)$$

$\underline{X}(t_i), \overline{X}(t_i)$ – нижние и верхние границы интервалов функции $X(t_i)$.

Задача (1) с числовыми коэффициентами может быть записана в форме

$$x(t_i) = \text{formula} + Cx^p(\xi), \xi \in (t_i, t_{i+1}), \quad (10)$$

где формула (10) может соответствовать явному или неявному одношаговому методу вычисления выражения (10), включая вычисления $f(t, x(t))$. Включение $x^p(\xi) \in x^p([t_i, t_{i+1}])$ вычисляется с использованием арифметики дифференциалов [1]. Тогда вычисление указанной формулы – *formula*, в уравнении (10) обеспечивает включение решения в точках t_i :

$$x(t_i) \in X(t_{i+1}) = \text{formula}(\tilde{x}(t_i)) + Cx^p([t_i, t_{i+1}]). \quad (11)$$

Итак, алгоритм решения задачи (1) с интервальными начальными данными:

1. Выражаются значения $\tilde{x}_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, аппроксимирующее значение $x_k(t)$, в любой точке t интервала $[t_0, t_k]$ как функцию от начальных значений $x_1^0(t_0), \dots, x_n^0(t_0)$.
2. Оценивается разность значений $\tilde{x}_k(t)$ и точного решения $x_k(t)$, как

$$\max_k |x_k(t) - \tilde{x}_k(t)| \leq r(t), \quad (12)$$

где $r(t)$ некоторая функция, не зависящая от шага сетки h .

3. В качестве интервальной оценки множества решений по каждой фазовой координате используется интервальная функция вида

$$X_k(t) = \tilde{X}_k(t) + [r(t), r(t)], \quad (13)$$

где $\tilde{X}_k(t)$ – объединенное расширение всех найденных решений $\tilde{x}_k(t)$ по всем $x_0 \in X_0$, т.е.

$$\tilde{X}_k(t) = \bigcup_{x_0 \in X_0} \tilde{x}_k(t). \quad (14)$$

Общий проекционный метод.

Для приближенного решения уравнения (6) может быть применен метод механических квадратур или метод Галеркина – Петрова [10].

Для решения задачи (6) методом механических квадратур от уравнения (6) переходят к системе нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) путем замены интеграла конечной суммой. Тогда, если решение $\tilde{x}(t)$ уравнения (6) изолировано в банаховом пространстве $C(D)$, то при измельчении шага сетки при квадратурном процессе множество решений СНАУ становится непустым и приближает приближенное решение к истинному в некоторой метрике. Другие методы требуют невырожденности производной Фреше нелинейного оператора соответствующего уравнению (6) в точке $\tilde{x}(t_0)$.

Для решения задачи (1) или, что эквивалентно, задачи (6), применим общий проекционный метод. Изложим кратко суть метода и необходимые теоремы.

Обозначим через H_l множество всех алгебраических многочленов степени не выше l и введем следующую пару конечномерных пространств $X_l \subset X, Y_l \subset Y$: $Y_l = H_{l-1}, X_l = H_l^0 = H_l \cap X$, с той же нормой, что и в пространствах X и Y , а через P_l – аддитивный и однородный оператор, отображающий пространство Y в подпространство $Y_l: Y \rightarrow Y_l$.

Рассмотрим уравнение (6), где D – множество конечной лебеговой меры, тогда положительное симметричное ядро $K(t, \tau) = 1(t - \tau)$, порождает линейное интегральное уравнение

$$Ax(t) + x_0 = x_0 + \int_D K(t, \tau)x(\tau)d\tau. \quad (15)$$

Пусть μ обозначает соответствующий функции $f(t, x(t))$ оператор композиции (оператор Немыцкого). Кроме того, предполагается, что функция $f(t, x(t))$ порождающая оператор Немыцкого $\mu(x) = \mu[t, x(t)]$, определена при $x, t \in [t_0, t_k]$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом фиксированном t и непрерывна по t почти для всех x .

Для применимости к уравнению (15) принципа сжимающих отображений необходимо потребовать, соответственно, чтобы функция $f(t, x(t))$, определяющая нелинейность в уравнениях (1) и (6), обладала свойством монотонности и удовлетворяла условию Липшица, т.е.

$$1). |f(x, t_1) - f(x, t_2)| \leq L|t_1 - t_2|, L > 0; \quad (16)$$

$$2). (f(x, t_1) - f(x, t_2))(t_1 - t_2) \geq l|t_1 - t_2|^2, l > 0. \quad (17)$$

Из условия 1 вытекает, что оператор Немыцкого μ действует непрерывно из L_2 в L_2 и удовлетворяет условию Липшица, а из условия 2 вытекает, что он является сильно монотонным. Тогда уравнение (6) формально может быть записано в операторном виде:

$$x = x_0 + A\mu(x). \quad (18)$$

Теперь уравнение (18) будем решать с помощью общего проекционного метода, согласно которому приближенное решение $x_l(t) \in X_l$:

$$\tilde{x}_l(t) \cong P_l[x(t)] = \sum_{i=0}^{l-1} c_i^x \varphi_i(t) = (C^x)^T \Phi(t), \quad (19)$$

где $\Phi(t) = (\varphi_0(t) \ \varphi_1(t) \ \dots \ \varphi_{l-1}(t))$ – ортонормированный базис пространства X_l и Y_l , $C^x = (c_0^x \ c_1^x \ \dots \ c_{l-1}^x)$ – спектральная характеристика функции $x(t)$, при условии

$$C^x = \left\{ c_i^x \right\}_{i=0}^{l-1} = \left\{ \int_0^T x(t) \varphi_i(t) dt \right\}_{i=0}^{l-1} = \int_0^T x(t) \Phi(t) dt, \quad (20)$$

определяется как точное решение операторного уравнения

$$\tilde{x}_l(t) \cong P_l[\tilde{x}_l(t)] \equiv P_l[x_0(t)] + P_l[A\mu(\tilde{x}_l(t))]. \quad (21)$$

Отметим, что при соответствующем выборе операторов P_l $Y \rightarrow Y_l$ из (21) можно получить системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) многих известных проекционных методов решения задачи (21). Рассмотрим обоснование метода (19) и (21).

Пусть, в качестве базисных функций применяются функции вида:

$$\varphi_i(t) = \cos i \arccos t, \quad -1 < t < 1. \quad (22)$$

Справедлива, следующая теорема:

Теорема 1. Пусть функция $f(t, x(t))$ удовлетворяет условиям (16) и (17), а $\|P_l\|_{Y \rightarrow Y_n} \leq c_1$, где $c_1 \in R^1$; кроме того, существует параметр λ такой, что $|\lambda| < \sqrt{2}/(Mc_1)$. Тогда:

1). При всех натуральных n аппроксимирующее уравнение (21) однозначно разрешимо, причем приближенное решение $\tilde{x}_l(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|\tilde{x}_l(t)\| \leq \frac{c_1 \|x(t)\|}{1 - q_1}, \quad q_1 = |\lambda| \frac{Mc_1}{\sqrt{2}} < 1. \quad (23)$$

2). Приближенные решения $\tilde{x}_l(t)$ сходятся со скоростью, определяемые неравенством

$$\|x(t) - \tilde{x}_l(t)\| \leq \frac{2c_1}{1 - q_1} I(f), \quad q_1 = |\lambda| \frac{Mc_1}{\sqrt{2}} < 1, \quad (24)$$

где $I(f)$ – наилучшее среднеквадратичное приближение функции $f(\cdot)$.

Доказательство основывается на том, что нелинейный оператор $\mu(\tilde{x}_l(t)): X \rightarrow X_l$, определенный в (21), является сжимающим оператором в пространстве X с коэффициентом сжатия q_1 .

Применим метод коллокации для решения операторного уравнения (21), для этого введем равномерную сетку из n узлов t_j на сегменте $t \in [t_0, t_k]$ (отметим, что перейти от интервала $-1 < t < 1$ к произвольному интервалу $t \in [t_0, t_k]$, возможно с помощью линейных преобразований, см. например [10]):

$$t_j = \cos \frac{j\pi}{n+1}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (25)$$

Пусть неизвестные коэффициенты $\{c_i^x\}_{i=0}^{l-1}$ многочлена (19) определяются из условия

$$P_l[x_0(t_j)] + P_l[A\mu(\tilde{x}_l(t_j))] = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (26)$$

Для вычислительной схемы (26) метода коллокации, справедлива теорема.

Теорема 2. Пусть узлы t_j , определены по формуле (25). Кроме того $A_{\mu}(\tilde{x}_l(t)) \in C_{[t_0, t_k]}$, функция $f(t, x(t))$ удовлетворяет условиям (16) и (17), а числовой параметр λ такой, что $|\lambda| < 2/(M\sqrt{\pi})$. Тогда:

1). СНАУ (26) имеет единственное решение $\tilde{x}_l(t) \in X_l$, причем приближенное решение $\tilde{x}_l(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|\tilde{x}_l(t)\| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\|x(t)\|}{1-q}, \quad (27)$$

$$q = |\lambda| \frac{M}{\sqrt{2}} < 1. \quad (28)$$

2). Приближенные решения $\tilde{x}_l(t)$ сходятся со скоростью, определяемые неравенством

$$\|x(t) - \tilde{x}_l(t)\| \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{1-q} I(f). \quad (29)$$

где $I(f)$ – определено в теореме 1, а параметр q в условии 1) теоремы 2.

Доказательство следует из теоремы 1. В качестве оператора ортогонального проектирования берется оператор, который ставит в соответствие некоторой функции из пространства $C_{[t_0, t_k]}$, полином Лагранжа, определяемый выражениями (19) и (22).

3. Описание множества достижимости, решение задачи Коши систем обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с интервальными данными и их эволюции

3.1. Включение решений нелинейных дифференциальных уравнений с интервальными параметрами

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение с интервальными начальными данными

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (30)$$

где

$$x(t_0) \in X_0, \quad X_0 = [\underline{x}_0, \overline{x}_0], \quad (31)$$

$\underline{x}_0, \overline{x}_0$ – левые и правые концы интервала $X_0 \in IR^n$ (n -мерное евклидово пространство векторов),

$$IR^n = \left\{ X_0 = [\underline{x}_0, \overline{x}_0] \mid \underline{x}_0 \leq \overline{x}_0, \underline{x}_0, \overline{x}_0 \in \square^n \right\}. \quad (32)$$

Функция $f(t, x(t))$ непрерывная на некотором открытом интервале D , и удовлетворяет условию Липшица на замкнутом интервале $[t_0, t_k] \subset D$:

$$|f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))| \leq \alpha_k |x_1(t) - x_2(t)|, \quad (33)$$

$\alpha_k > 0$ – константа Липшица.

Пусть X^t – образ множества X_0 в момент времени t , т.е.

$$X^t = \{x(t) \mid x(t_0) \in X_0\}, \quad (34)$$

множество X^t представляет собой сечение совокупности решений системы (30), соответствующих значению X_0 при фиксированном времени t . Предположим, что выполнено условие непрерывной дифференцируемости решения системы (30) по начальным условиям (31), тогда для сечения семейства траекторий длина интервала вычисляется в виде:

$$\varpi(X^t) = \underline{X}^t - \overline{X}^t = \int_{[\underline{x}, \overline{x}]} dx(t) = \int_{[x_0, \overline{x}_0]} \left| \frac{\partial x(t)}{\partial x_0(t)} \right| dx_0(t). \quad (35)$$

Рассмотрим интервальный метод, который позволяет строить сходящиеся интервальные оценки множеств решений систем нелинейных дифференциальных уравнений. Предполагаем, что далее по тексту под встречающимися алгебраическими операциями понимаются интервальные операции в полной арифметике Каухера, в том числе взятие интервального интеграла [1].

Введем на интервальном пространстве IR^n метрику Хаусдорфа. Пусть X, Y два непустых компактных подмножества метрического пространства IR^n . Тогда расстояние по Хаусдорфу, $d_H(X, Y)$, между X и Y есть минимальное число r такое, что замкнутая r -окрестность X содержит Y и также замкнутая r -окрестность Y содержит X . Другими словами, если $|x - y|$ обозначает расстояние между векторами x и y в \mathbb{R}^n то

$$d_H(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} |x - y|, \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} |x - y| \right\}, \quad (36)$$

или

$$d_H(X, Y) = \max \left\{ \left| \overline{\underline{x}} - \underline{\overline{y}} \right|, \left| \underline{\underline{x}} - \overline{\overline{y}} \right| \right\}. \quad (37)$$

Введем следующее обозначение: $C_I([t_0, t_k])$ – пространство непрерывных интервальнозначных функций, определенных на интервале $[t_0, t_k]$ с метрикой

$$d_I(F, G) = \max \left\{ \left| \overline{f}(t) - \overline{g}(t) \right|, \left| \underline{f}(t) - \underline{g}(t) \right| \right\}. \quad (38)$$

Системе уравнений (30) соответствует следующее интегральное уравнение

$$x(t) = x_0 e^{-(t-t_0)} + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) e^{-(t-\tau)} d\tau = x_0 e^{-(t-t_0)} + \int_{t_0}^t g(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad (39)$$

где

$$g(\tau, x(\tau)) = f(\tau, x(\tau)) e^{-(t-\tau)}. \quad (40)$$

Решение задачи (30) эквивалентно отысканию всех непрерывных решений интегрального уравнения (39) таких, что $x(t_0) \in X_0$. Для решения интегрального уравнения (39) применим интервальный метод последовательных приближений (метод Пикара). Имеем

$$X^{n+1}(t) = X_0 e^{-(t-t_0)} + \int_{t_0}^t G(\tau, X^n(\tau)) d\tau, \quad (41)$$

где

$$G(\tau, X^n(\tau)) = \left[g(\tau, \underline{x}^n(\tau)), g(\tau, \bar{x}^n(\tau)) \right], \quad (42)$$

$$X^n(\tau) = \left[\underline{x}^n(\tau), \bar{x}^n(\tau) \right], n = 1, 2, \dots,$$

являются интервальными расширениями функций $g(\tau, x(\tau)), x(\tau)$,

$$X_0(\tau) = \left[\underline{x}_0 e^{-(\tau-t_0)}, \bar{x}_0 e^{-(\tau-t_0)} \right], \quad (43)$$

$X_0(\tau)$ – начальное приближение, содержащее X^t , причем $X^1(\tau)$ должно удовлетворять условию $X^1(\tau) \subseteq X^2(\tau) \subseteq \dots \subseteq X^n(\tau)$. Интервальное расширение (42) удовлетворяет неравенству

$$d_I(G(X^n), G(X^{n+1})) \leq d_I(X^n, X^{n+1}). \quad (44)$$

Покажем, что метод (41) имеет неподвижную точку \hat{X} в пространстве \square^n . Также следует отметить, что оператор Пикара

$$Picar(X) \equiv X_0 + \int_{t_0}^t G(\tau, X(\tau)) d\tau, \quad (45)$$

переводит непрерывную интервальнозначную функцию в непрерывную интервальнозначную функцию и является сжимающим в метрике пространства $d_I(\cdot)$. Введем эквивалентную метрику метрике (36) или (37)

$$\hat{d}_I(F, G) = \max_{t \in [t_0, t_k]} \max \left\{ e^{-(t-t_0)} | \underline{f}(t) - \underline{g}(t) |, e^{-(t-t_0)} | \bar{f}(t) - \bar{g}(t) | \right\}. \quad (46)$$

Обе метрики $d_I(F, G)$ и $\hat{d}_I(F, G)$ являются инвариантами относительно сдвига и

$$\hat{d}_I(X^{n+1}(t), X^n(t)) = \hat{d}_I \left(\int_{t_0}^t G(X^n(\tau)) d\tau, \int_{t_0}^t G(X^{n-1}(\tau)) d\tau \right). \quad (47)$$

Интервальный интеграл в виду непрерывности подинтервальной функции $G(\tau, X(\tau))$ имеет вид

$$\int_{t_0}^t G(\tau, X^n(\tau)) d\tau = \left[\int_{t_0}^t g(\tau, \underline{x}^n(\tau)) d\tau, \int_{t_0}^t g(\tau, \bar{x}^n(\tau)) d\tau \right]. \quad (48)$$

Тогда доказательство существования неподвижной точки \hat{X} , а следовательно решение метода (45), следует из неравенства

$$\begin{aligned} \widehat{d}_I(X^{n+1}(t), X^n(t)) &= \widehat{d}_I\left(\int_{t_0}^t G(\tau, X^n(\tau))d\tau, \int_{t_0}^t G(\tau, X^{n-1}(\tau))d\tau\right) = \\ &= \max_t \left\{ e^{-(t-t_0)} \max\left(\left|\int_{t_0}^t g(\underline{x}^n)d\tau - \int_{t_0}^t g(\underline{x}^{n-1})d\tau\right|, \left|\int_{t_0}^t g(\bar{x}^n)d\tau - \int_{t_0}^t g(\bar{x}^{n-1})d\tau\right|\right)\right\} \leq \\ &\leq \max_t \left\{ e^{-(t-t_0)} \max\left(\left|\int_{t_0}^t \underline{x}^n d\tau - \int_{t_0}^t \underline{x}^{n-1} d\tau\right|, \left|\int_{t_0}^t \bar{x}^n d\tau - \int_{t_0}^t \bar{x}^{n-1} d\tau\right|\right)\right\} \leq \\ &\leq \max_t \left\{ \int_{t_0}^t e^{(\tau-t)} e^{-(\tau-t_0)} \max\left(\left|\underline{x}^n(\tau) - \underline{x}^{n-1}(\tau)\right|, \left|\bar{x}^n(\tau) - \bar{x}^{n-1}(\tau)\right|\right) d\tau\right\} \leq \\ &\leq \max_t \int_{t_0}^t e^{-(t-t_0)} d\tau \widehat{d}_I(X^n, X^{n-1}) \leq (1 - e^{-(t_k-t_0)}) \widehat{d}_I(X^n, X^{n-1}), \end{aligned} \tag{49}$$

при условии

$$\begin{aligned} \widehat{d}_I(g(\underline{x}^k(t)), g(\underline{x}^{k+1}(t))) &\leq \widehat{d}_I(G(X^k(t)), G(X^{k+1}(t))) \leq \\ &\leq \widehat{d}_I(X^k(t), X^{k+1}(t)), \end{aligned} \tag{50}$$

Аналогично для нижних концов интервалов

$$\begin{aligned} \widehat{d}_I(g(\bar{x}^k(t)), g(\bar{x}^{k+1}(t))) &\leq \widehat{d}_I(G(X^k(t)), G(X^{k+1}(t))) \leq \\ &\leq \widehat{d}_I(X^k(t), X^{k+1}(t)). \end{aligned} \tag{51}$$

Из (49) имеем $(1 - e^{-(t_k-t_0)}) < 1$. Следовательно, получили условие сжимаемости.

Таким образом, включение $X^t \subseteq \hat{X}$ следует из монотонности относительно включения функции $g(\cdot)$ и интервальных операций. Правая граница интервала \hat{X} является предельной точкой последовательности

$$\bar{x}^{n+1} = \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t g(\tau, \bar{x}^n) d\tau. \tag{52}$$

Это означает, что $\bar{\hat{X}}$ является максимальным решением задачи (30), подобные рассуждения приводят к тому, что $\underline{\hat{X}}$ является минимальным решение системы дифференциальных уравнений (30), поэтому $X^t = \hat{X}$.

Методы интервального анализа могут быть эффективно использованы для исследования совокупности решений дифференциальных уравнений. Для этого приведем основные определения и утверждения.

Определение 1. Пусть X и X^n – интервалы при $n=1,2,\dots$. Тогда X^n сходится к X при $n \rightarrow \infty$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{X}^n = \underline{X} \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{X}^n = \overline{X}. \quad (53)$$

Пусть P – отображение интервалов, задающее метод последовательных приближений (45). Справедливо утверждение [1, 4].

Утверждение 1. Пусть существует интервальная функция X_0 такая, что $PX_0 \subset X_0$. Тогда последовательные итерации

$$X^{n+1} = PX^n \quad (54)$$

образуют убывающую последовательность интервально-значных функций и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X^n(t) = X(t), \quad (55)$$

где $X(t)$ – интервальная функция на I – интервальное пространство. Кроме того, если $x(t)$ произвольное решение уравнения $Px(t) = 0$, то $x(t) \in X(t)$ на области существования решений.

Итак, пусть рассматривается задача (30). Определим оператор T , отображающий подмножество множества вещественных чисел в себя

$$Tx \equiv x(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad (56)$$

Откуда следует, что решение задачи (30) может быть приближено последовательностью значений итерационного процесса вида:

$$x^{j+1} = Tx^j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (57)$$

где $x(t_0) = x$, $x^1(t) \in X^0$, $x^1(t) \in IR^n$.

Можно получить границы ошибок метода (57), обеспечивающие возможность построения оценок и эволюции этих границ.

3.2. Численно-аналитическое представление приближенных решений систем нелинейных дифференциальных уравнений на основе проекционных методов

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (58)$$

где функция $f(t, x(t))$ удовлетворяет условиям (33), обеспечивающим существование решения достаточной гладкости. Решение $\mathbf{x}(t) = (x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t))$ системы (58) можно трактовать как закон движения точки $\mathbf{x}(t)$ векторного пространства R^n . Будем считать, что начальное условие

$$x(\tau) = x_0, \quad (59)$$

в момент времени τ при движении точки вдоль траектории системы (58), однозначно определяет решение

$$x(t) = y(t, \tau, x_0), \quad (60)$$

которое определено $x(t) \forall t$. Точка x_0 , двигаясь по траектории системы (60), переходит в новую точку $\mathbf{x}(t)$, при этом оператор определяемый равенством

$$y(t, \tau)x_0 = y(t, \tau, x_0), \quad (61)$$

называется оператором сдвига по траектории. Причем однозначная разрешимость при каждом последующем начальном условии относительно предыдущего значения, означает непрерывность оператора сдвига.

Большинство известных методов интервального оценивания совокупности множеств решений систем уравнений (58) сводятся к пошаговому уточнению оценок множеств решений, что приводит к резкому увеличению ширины оцениваемого интервала – широко известный в литературе «эффект обертывания» или эффект Мура.

Один из возможных подходов к оцениванию состоит в нахождении решения аппроксимирующего точное решение задачи (58), на каждом подинтервале $J_i [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, N-1$ интервала $[t_0, t_k]$, где $t_i = t_0 + i\tau$, $h = (t_k - t_0)/N$, $i = 0, N$, причем все интервалы являются замкнутыми и вложенными в интервал $[t_0, t_k]$, т.е. $J_0 \subseteq J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots \subseteq J_{k-1} \subseteq [t_0, t_k]$, с последующим нахождением интервального расширения. На каждом подинтервале J_i происходит аппроксимация оператора сдвига по траекториям системы (58). Вычисление последующего интервального расширения снимает пошаговость оценок, что позволяет бороться с эффектом Мура.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение с интервальными начальными данными

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (62)$$

где

$$x(t_0) \in X_0, X_0 = [\underline{x}_0, \overline{x}_0], \quad (63)$$

где X_0 –прямоугольный параллелепипед в IR^n , Функция $f(t, x(t))$ непрерывная на некотором открытом интервале D , и удовлетворяет условию Липшица на замкнутом интервале $[t_0, t_k] \subset D$.

Пусть на интервале $[t_0, t_k]$ введена равномерная сетка узлов

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t_k, \tau = \max_t \{t_{i+1} - t_i\}.$$

Через $X(t)$ обозначим совокупность точных решений задачи (58) как

$$X(t) = \left\{ x(t) \mid x(t_0) \in X_0, X_0 = [\underline{x}_0, \overline{x}_0] \right\}, \quad (64)$$

а через $\tilde{x}(t)$ –приближенное решение задачи (58).

Основные этапы алгоритма:

1. Выражаются значения $\tilde{x}_k(t)$, аппроксимирующее значение $x_k(t)$, в любой точке t интервала $[t_0, t_k]$ как функцию от начальных значений $x_1^0(t_0), \dots, x_n^0(t_0)$.

2. Оценивается разность значений $\tilde{x}_k(t)$ и точного решения $x_k(t)$, как

$$\max_k |x_k(t) - \tilde{x}_k(t)| \leq r(t), \quad (65)$$

где $r(t)$ некоторая функция, не зависящая от шага сетки h .

3. В качестве интервальной оценки множества решений по каждой фазовой координате используется интервальная функция вида

$$X_k(t) = \tilde{X}_k(t) + [r(t), r(t)], \quad (66)$$

где $\tilde{X}_k(t)$ – объединенное расширение всех найденных решений $\tilde{x}_k(t)$ по всем $x_0 \in X_0$, т.е.

$$\tilde{X}_k(t) = \bigcup_{x_0 \in X_0} \tilde{x}_k(t). \quad (67)$$

Перейдем к описанию первого этапа.

Для целостности изложения материала этого этапа, будем рассматривать систему, звенья которой описываются скалярными дифференциальными уравнениями с неопределенными коэффициентами, полагаем, что начальные условия полностью определены и равны нулю. Рассмотрим структурная схема, которой, представлена на рис. 1. Система, включает в себя нелинейный элемент (НЭ1) и линейные элементы (ЛЭ, ЛЭ1 и ЛЭ2).

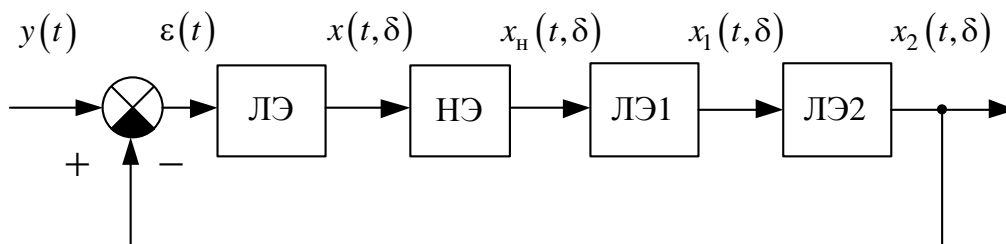


Рис. 1. Структурная схема САУ с нелинейным звеном

Пусть линейный элемент системы ЛЭ с постоянными параметрами описывается скалярным дифференциальным уравнением n -го порядка вида:

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^f x^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j^r \varepsilon^{(j)}(t), \quad (68)$$

где все коэффициенты $a_i^f, i = \overline{0, n-1}; b_j^r, j = \overline{0, m}$ представимы в виде;

$$a_i^f = a_i + \Delta a_i^f, \quad b_j^r = b_j + \Delta b_j^r, \quad f = \overline{1, N}, \quad r = \overline{1, N}, \quad (69)$$

a_i и b_j – номинальные значения коэффициентов, а Δa_i^f и Δb_j^r – возможные отклонения от этих значений, $a_n = 1$; N – размерность выборки, $y(t), x(t, \delta)$ – соответственно входной и выходной сигналы системы, зависящий от параметрической неопределенности δ . В силу условия технической реализуемости системы управления, считаем $n \geq m$.

Рассмотрим вопрос перехода от дифференциального уравнения (68) при нулевых начальных условиях к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода

$$x(t) + \int_0^t K_x^f(t, \tau) x(\tau) d\tau = \int_0^t K_y^r(t, \tau) y(\tau) d\tau.$$

Интегрируя n раз левую и правую части уравнения (68), получим

$$\begin{aligned} \int_0^t \dots \int_0^{\tau_{n-1}} x^{(n)}(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n + \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^t \dots \int_0^{\tau_{n-1}} a_k^f x^{(k)}(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n = \\ = \sum_{k=0}^m \int_0^t \dots \int_0^{\tau_{n-1}} b_k^r y^{(k)}(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n. \end{aligned}$$

В силу нулевых начальных условий

$$\int_0^t \dots \int_0^{\tau_{n-1}} x^{(n)}(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n = x(t).$$

Рассмотрим n -кратный интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^t \dots \int_0^{\tau_{n-1}} a_k^f x^{(k)}(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n = \int_0^t \dots \int_0^{\tau} a_k^f x^{(k)}(\tau_n) (d\tau)^n = \\ = \int_0^t \dots \int_0^{\tau} a_k^f x^{(k)}(\tau_n) (d\tau)^{n-1} d\tau. \end{aligned}$$

Тогда, из последнего следует

$$\begin{aligned} \int_0^t \dots \int_0^{\tau} a_k^f x^{(k)}(\tau_n) (d\tau)^{n-1} d\tau = \int_0^t \dots \int_0^{\tau} a_k^f x^{(k)}(\tau_n) d^{(n-1)} \left[(t - \tau)^{n-1} \right] d\tau = \\ = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t - \tau)^{n-1} a_k^f x^{(k)}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Из последней зависимости можно получить соотношение

$$x(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t - \tau)^{n-1} a_k^f x^{(k)}(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^m \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t - \tau)^{n-1} b_k^r y^{(k)}(\tau) d\tau.$$

Интегралы в левой части последнего соотношения путем интегрирования по частям можно записать так:

$$\begin{aligned} \int_0^t (t - \tau)^{n-1} a_k^f x^{(k)}(\tau) d\tau &= \int_0^t \underbrace{(t - \tau)^{n-1} a_k^f}_u \underbrace{d \left[x^{(k-1)}(\tau) \right]}_{dv} = \\ &= (t - \tau)^{n-1} a_k^f x^{(k-1)}(\tau) \Big|_0^t - \int_0^t x^{(k-1)}(\tau) \left[(t - \tau)^{n-1} a_k^f \right]' d\tau = \\ &= (-1) \int_0^t \underbrace{\left[(t - \tau)^{n-1} a_k^f \right]'}_u \underbrace{d \left[x^{(k-2)}(\tau) \right]}_{dv} = (-1) \underbrace{\left[(t - \tau)^{n-1} a_k^f \right]'}_{=0} x^{(k-2)}(\tau) \Big|_0^t - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -(-1) \int_0^t x^{(k-2)}(\tau) \left[(t-\tau)^{n-1} a_k^f \right]'' d\tau = \\
 & = (-1)^2 \int_0^t \underbrace{\left[(t-\tau)^{n-1} a_k^f \right]''}_u d \underbrace{\left[x^{(k-3)}(\tau) \right]}_{dv} = \dots = (-1)^{k-1} \int_0^t x'(\tau) \left[(t-\tau)^{n-1} a_k^f \right]^{(k-1)} d\tau = \\
 & = (-1)^{k-1} \underbrace{\left[(t-\tau)^{n-1} a_k^f \right]^{(k-1)} x'(\tau)}_{=0} \Big|_0^t - (-1)^{k-1} \int_0^t x(\tau) \left[(t-\tau)^{n-1} a_k^f \right]^{(k)} d\tau.
 \end{aligned}$$

Используя формулу Лейбница

$$\begin{aligned}
 \frac{d^v}{d\tau^v} \left[a_k^f (t-\tau)^n \right] \Big|_{\tau=t} &= \sum_{l=0}^v C_v^l a_k^{f(l)} \left[(t-\tau)^n \right]^{(v-l)} = 0, \quad v \leq n-1; \\
 x^{(v)}(\tau) \Big|_{\tau=0} &= 0, \quad v = \overline{0, n-1},
 \end{aligned}$$

получим

$$\int_0^t (t-\tau)^{n-1} a_k^f x^{(k)}(\tau) d\tau = (-1)^k \int_0^t x(\tau) \frac{d^k}{d\tau^k} \left[a_k^f (t-\tau)^{n-1} \right] d\tau$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} a_k^f x^{(k)}(\tau) d\tau = \int_0^t x(\tau) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(n-1)!} \frac{d^k}{d\tau^k} \left[a_k^f (t-\tau)^{n-1} \right] d\tau.$$

Аналогично можно показать, что

$$\sum_{k=0}^m \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} b_k^r y^{(k)}(\tau) d\tau = \int_0^t y(\tau) \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(n-1)!} \frac{d^k}{d\tau^k} \left[b_k^r (t-\tau)^{n-1} \right] d\tau.$$

В последнем выражении переходя к пределу интегрирования $[0, T]$, получим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода, эквивалентное ДУ (68) которое имеет вид:

$$\begin{aligned}
 x(t) + \int_0^T \underbrace{\left\{ \sum_{v=0}^{n-1} \frac{(-1)^v}{(n-1)!} (a_v + \Delta a_v^f) \frac{d^v}{d\tau^v} (T-\tau)^{n-1} \right\}}_{K_x^f(T, \tau)} x(\tau) d\tau = \\
 = \int_0^T \underbrace{\left\{ \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(n-1)!} (b_k + \Delta b_k^r) \frac{d^k}{d\tau^k} (T-\tau)^{n-1} \right\}}_{K_y^r(T, \tau)} \varepsilon(\tau) d\tau, \quad f, r = \overline{1, N},
 \end{aligned} \tag{70}$$

Получим аппроксимированную модель уравнения (70), для этого разложим коэффициенты исходного интегрального уравнения (70), сигналы $y(t), x(t)$ по ортогональному базису $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = [\varphi_0(t) \quad \varphi_1(t) \quad \dots \quad \varphi_{l-1}(t)]^T; \quad (71)$$

$$x(t) = \Phi^T(t) C^x; \quad \varepsilon(t) = \Phi^T(t) C^\varepsilon; \quad (72)$$

$$K_x^f(t, \tau) = \Phi^T(t) A_x^f \Phi^T(\tau); \quad (73)$$

$$K_y^r(t, \tau) = \Phi^T(t) B_y^r \Phi^T(\tau); \quad f, r = \overline{1, N}, \quad (74)$$

где A_x^f и B_y^r , с учетом (70), представимы в виде

$$A_x^f = A_x + \Delta A_x^f; \quad B_\varepsilon^r = B_\varepsilon + \Delta B_\varepsilon^r; \quad f, r = \overline{1, N};$$

$$A_x^f = \underbrace{\left[\int_0^T \int_0^t \bar{K}_x(T, \tau) \varphi_i(t) \varphi_j(\tau) dt d\tau \right]_{i,j=0}^{l-1}}_{A_x} + \underbrace{\left[\int_0^T \int_0^t \Delta K_x^f(T, \tau) \varphi_i(t) \varphi_j(\tau) dt d\tau \right]_{i,j=0}^{l-1}}_{\Delta A_x^f}; \quad (75)$$

$$B_y^r = \underbrace{\left[\int_0^T \int_0^t \bar{K}_y(T, \tau) \varphi_i(t) \varphi_j(\tau) dt d\tau \right]_{i,j=0}^{l-1}}_{B_y} + \underbrace{\left[\int_0^T \int_0^t \Delta K_y^r(T, \tau) \varphi_i(t) \varphi_j(\tau) dt d\tau \right]_{i,j=0}^{l-1}}_{\Delta B_y^r}. \quad (76)$$

$$\bar{K}_x(T, \tau) = \sum_{v=0}^{n-1} \frac{(-1)^v}{(n-1)!} \bar{a}_v \frac{d^v}{d\tau^v} (T-\tau)^{n-1}; \quad (77)$$

$$\Delta K_x^f(T, \tau) = \sum_{v=0}^{n-1} \frac{(-1)^v}{(n-1)!} \Delta a_v^f \frac{d^v}{d\tau^v} (T-\tau)^{n-1};$$

$$\bar{K}_y(T, \tau) = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^v}{(n-1)!} \bar{b}_k \frac{d^v}{d\tau^v} (T-\tau)^{n-1}; \quad (78)$$

$$\Delta K_y^r(T, \tau) = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^v}{(n-1)!} \Delta b_k^r \frac{d^v}{d\tau^v} (T-\tau)^{n-1};$$

В соответствии с представлением (71) – (78), уравнение (70) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi^T(t) C^x + \Phi^T(t) A_x^f \int_0^T \Phi(\tau) \Phi^T(\tau) d\tau C^x = \\ = \Phi^T(t) B_\varepsilon^r \int_0^T \Phi(\tau) \Phi^T(\tau) d\tau C^\varepsilon, \quad f, r = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Тогда, в силу линейной независимости базисных функций, последнее уравнение равносильно матричному уравнению относительно спектральных характеристик входа и выхода системы (70)

$$C^x + (A_x + \Delta A_x^f) C^x = (B_\varepsilon + \Delta B_\varepsilon^r) C^\varepsilon, \quad (79)$$

где

$$\mathbf{C}^x = [c^{x_0} \quad c^{x_1} \quad \dots \quad c^{x_{l-1}}]^T, \quad \mathbf{C}^\varepsilon = [c^{\varepsilon_0} \quad c^{\varepsilon_1} \quad \dots \quad c^{\varepsilon_{l-1}}]^T,$$

$$\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0,l-1} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1,l-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l-1,0} & a_{l-1,1} & \dots & a_{l-1,l-1} \end{bmatrix},$$

$$\Delta \mathbf{A}_x \Big|_{f=1}^N = \begin{bmatrix} \Delta a_{00}^f & \Delta a_{01}^f & \dots & \Delta a_{0,l-1}^f \\ \Delta a_{10}^f & \Delta a_{11}^f & \dots & \Delta a_{1,l-1}^f \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta a_{l-1,0}^f & \Delta a_{l-1,1}^f & \dots & \Delta a_{l-1,l-1}^f \end{bmatrix},$$

или, с учетом границ интервалов (69)

$$\Delta \mathbf{A}_x =$$

$$= \begin{bmatrix} \left[\underline{a_{00}}, \overline{a_{00}} \right] & \left[\underline{a_{01}}, \overline{a_{01}} \right] & \dots & \left[\underline{a_{0,l-1}}, \overline{a_{0,l-1}} \right] \\ \left[\underline{a_{10}}, \overline{a_{10}} \right] & \left[\underline{a_{11}}, \overline{a_{11}} \right] & \dots & \left[\underline{a_{1,l-1}}, \overline{a_{1,l-1}} \right] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[\underline{a_{l-1,0}}, \overline{a_{l-1,0}} \right] & \left[\underline{a_{l-1,1}}, \overline{a_{l-1,1}} \right] & \dots & \left[\underline{a_{l-1,l-1}}, \overline{a_{l-1,l-1}} \right] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_y = \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & \dots & b_{0,l-1} \\ b_{10} & b_{11} & \dots & b_{1,l-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l-1,0} & b_{l-1,1} & \dots & b_{l-1,l-1} \end{bmatrix},$$

$$\Delta \mathbf{B}_y =$$

$$= \begin{bmatrix} \left[\underline{b_{00}}, \overline{b_{00}} \right] & \left[\underline{b_{01}}, \overline{b_{01}} \right] & \dots & \left[\underline{b_{0,l-1}}, \overline{b_{0,l-1}} \right] \\ \left[\underline{b_{10}}, \overline{b_{10}} \right] & \left[\underline{b_{11}}, \overline{b_{11}} \right] & \dots & \left[\underline{b_{1,l-1}}, \overline{b_{1,l-1}} \right] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[\underline{b_{l-1,0}}, \overline{b_{l-1,0}} \right] & \left[\underline{b_{l-1,1}}, \overline{b_{l-1,1}} \right] & \dots & \left[\underline{b_{l-1,l-1}}, \overline{b_{l-1,l-1}} \right] \end{bmatrix}.$$

Перепишем (79), в виде

$$\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}_x + \Delta \mathbf{A}_x^f \right) \mathbf{C}^x = \left(\mathbf{B}_\varepsilon + \Delta \mathbf{B}_\varepsilon^r \right) \mathbf{C}^\varepsilon, \quad (80)$$

или, учитывая обратимость матрицы $\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}_x + \Delta \mathbf{A}_x^f \right)$,

$$\mathbf{C}^x = \Delta \mathbf{A} \mathbf{C}^\varepsilon, \quad (81)$$

где

$$\Delta \mathbf{A} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}_x + \Delta \mathbf{A}_x)^{-1} (\mathbf{B}_\varepsilon + \Delta \mathbf{B}_\varepsilon). \quad (82)$$

Уравнение (82) можно трактовать как линейное операторное уравнение 2-го рода в пространстве последовательностей размерности l , в частности в конечномерном подпространстве гильбертова пространства l^2 . Эта трактовка важна в вопросах обоснования метода, а также в исследовании проекционного метода на сходимость и устойчивость.

Рассмотрим вопрос, связанный с вычислением матричного оператора нелинейного звена. Для этого представим структурную схему на рис. 1 в упрощенном виде – последовательного соединения нелинейного и линейного звеньев, математическая модель которого описывается уравнением (83) в отсутствие интервальной неопределенности (рис. 2).

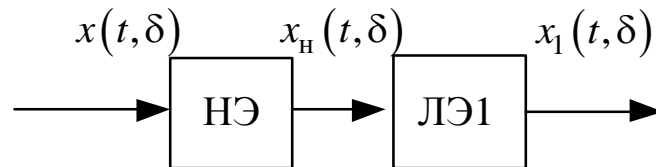


Рис. 2. Структурная схема САУ с нелинейным звеном

Дифференциальное уравнение соответствующее структурной схеме на рис. 2 имеет вид

$$x_1^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_1^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j x_n^{(j)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j f^{(j)}(x(t)), \quad (83)$$

Полагаем, что функция $f(x(t))$ удовлетворяет условиям, обеспечивающим существование решения достаточной гладкости.

Применим метод сжимающих отображений для вычисления решения $x_1(t, \delta), \delta = 0$ системы представленной на рис. 2. Интегральное уравнение соответствующее ЛЭ1 имеет вид

$$x_1(t, 0) = \lambda \int_0^T K_x(T, \tau) x(\tau) d\tau + \psi(t), \quad (84)$$

где

$$\psi(t, 0) = \int_0^T K_{x_n}(T, \tau) x_n(\tau) d\tau, \quad \lambda = -1. \quad (85)$$

Соответствующее матричное уравнение:

$$\mathbf{C}^x + \mathbf{A}_x \mathbf{C}^x = \mathbf{B}_{x_n} \mathbf{C}^{x_n}, \quad (86)$$

где $\mathbf{A}_x, \mathbf{B}_{x_n}$, определяются из выражений (75)-(76). Тогда, согласно принципу сжимающих отображений

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}^{x^1} &= \lambda \mathbf{A}_x \mathbf{C}^{x^0} + \mathbf{B}_{x_H} \mathbf{C}^{x_H}, \\
 \mathbf{C}^{x^2} &= \lambda \mathbf{A}_x \mathbf{C}^{x^1} + \mathbf{B}_{x_H} \mathbf{C}^{x_H}, \\
 &\vdots \\
 \mathbf{C}^{x^k} &= \lambda \mathbf{A}_x \mathbf{C}^{x^{k-1}} + \mathbf{B}_{x_H} \mathbf{C}^{x_H}.
 \end{aligned}
 \tag{87}$$

Для уравнения (84), имеем

$$\begin{aligned}
 x_1^1(t, 0) &= \lambda \int_0^T K_x(T, \tau) x_1^0(\tau) d\tau + \psi(t, 0); \\
 x_1^2(t, 0) &= \lambda \int_0^T K_x(T, \tau) x_1^1(\tau) d\tau + \psi(t, 0); \\
 &\vdots \\
 x_1^k(t, 0) &= \lambda \int_0^T K_x(T, \tau) x_1^{k-1}(\tau) d\tau + \psi(t, 0),
 \end{aligned}
 \tag{88}$$

учитывая, что $x_1(t, \delta)$, $y(t)$, $K_x(t, \tau)$ и $K_y(t, \tau)$ непрерывны на интервале $[0, T]$ и, следовательно, $|K_x(t, \tau)| \leq M$, $|K_y(t, \tau)| \leq N$. Имеем

$$\begin{aligned}
 \rho(x_1^1(t, 0), x_1^2(t, 0)) &= \max |x_1^1(t, 0) - x_1^2(t, 0)| = \\
 &= \max \left| \lambda \int_0^T K_x(T, \tau) x_1^0(\tau, 0) d\tau + \psi(t, 0) - \lambda \int_0^T K_x(T, \tau) x_1^1(\tau, 0) d\tau - \psi(t, 0) \right| = \\
 &= \max \left| \lambda \int_0^T K_x(T, \tau) (x_1^0(\tau, 0) - x_1^1(\tau, 0)) d\tau \right| \leq \lambda M (T - 0) \max |x_1^0(\tau, 0) - x_1^1(\tau, 0)|.
 \end{aligned}
 \tag{89}$$

Аналогично и для матричного уравнения (87) с учетом (89)

$$\begin{aligned}
 \rho(\mathbf{C}^{x_1^1}, \mathbf{C}^{x_1^2}) &= \max |\mathbf{C}^{x_1^1} - \mathbf{C}^{x_1^2}| = \\
 &= \max \left| \lambda \mathbf{A}_x \mathbf{C}^{x_1^0} + \mathbf{B}_{x_H} \mathbf{A}_H^0 \mathbf{C}^x - \lambda \mathbf{A}_x \mathbf{C}^{x_1^1} - \mathbf{B}_{x_H} \mathbf{A}_H^1 \mathbf{C}^x \right| = \\
 &= \max \left| \lambda \mathbf{A}_x (\mathbf{C}^{x_1^0} - \mathbf{C}^{x_1^1}) + \mathbf{B}_{x_H} (\mathbf{A}_H^0 - \mathbf{A}_H^1) \mathbf{C}^x \right| \leq \\
 &\leq \max \left| \lambda \mathbf{A}_x (\mathbf{C}^{x_1^0} - \mathbf{C}^{x_1^1}) \right| + \max \left| \mathbf{B}_{x_H} (\mathbf{A}_H^0 - \mathbf{A}_H^1) \mathbf{C}^x \right| \leq \\
 &\leq \lambda M \max \left| (\mathbf{C}^{x_1^0} - \mathbf{C}^{x_1^1}) \right| + N \max \left| (\mathbf{A}_H^0 - \mathbf{A}_H^1) \mathbf{C}^x \right|.
 \end{aligned}
 \tag{90}$$

Таким образом, матричное уравнение (86) имеет единственное непрерывное решение. Последовательное приближение к этому решению $\mathbf{C}^{x_1^1}, \mathbf{C}^{x_1^2}, \dots, \mathbf{C}^{x_1^k}, \dots$ имеют вид

$$\mathbf{C}^{x_1^k} = \lambda \mathbf{A}_x \mathbf{C}^{x_1^{k-1}} + \mathbf{B}_{x_H} \mathbf{A}_H^{k-1} \mathbf{C}^x, \quad (91)$$

где

$$\mathbf{A}_H^{k-1} = \mathbf{A}_y \left(x_{H(k-1)}(t) / x_{k-1}(t) \right), \quad x_{H(k-1)}(t) = f(x_{k-1}(t)), \quad (92)$$

в качестве $\mathbf{C}^{x_1^0}$ можно взять спектральную характеристику любой непрерывной функции.

Для системы, представленной на рис. 1, справедливы структурные преобразования на основе алгебры интервальных матриц. Итак, для каждого звена, согласно (91), имеем:

$$\mathbf{C}^{x_1^k} = \lambda \mathbf{A}_x \mathbf{C}^{x_1^{k-1}} + \mathbf{B}_{x_H} \mathbf{A}_H^{k-1} \mathbf{C}^x = (\mathbf{I} + \mathbf{A}_x)^{-1} \mathbf{B}_{x_H} \mathbf{A}_H^{k-1} \mathbf{C}^x, \quad \lambda = -1, \quad (93)$$

$$\mathbf{C}^x = (\mathbf{I} + \mathbf{A}_x + \Delta \mathbf{A}_x)^{-1} (\mathbf{B}_\varepsilon + \Delta \mathbf{B}_\varepsilon) \mathbf{C}^\varepsilon, \quad (94)$$

$$\mathbf{C}^{x_2} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}_{x_2} + \Delta \mathbf{A}_{x_2})^{-1} (\mathbf{B}_{x_1} + \Delta \mathbf{B}_{x_1}) \mathbf{C}^{x_1}, \quad (95)$$

$$\mathbf{C}^\varepsilon = \mathbf{C}^y - \mathbf{C}^{x_2}, \quad (96)$$

где \mathbf{A}_{x_2} , $\Delta \mathbf{A}_{x_2}$, \mathbf{B}_{x_1} , $\Delta \mathbf{B}_{x_1}$ определяются аналогично (82). После алгебраических преобразований над уравнениями (93) – (96), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^x &= (\mathbf{I} + \mathbf{A}_x + \Delta \mathbf{A}_x)^{-1} (\mathbf{B}_\varepsilon + \Delta \mathbf{B}_\varepsilon) (\mathbf{C}^y - \mathbf{C}^{x_2}) = \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{A}_x + \Delta \mathbf{A}_x)^{-1} (\mathbf{B}_\varepsilon + \Delta \mathbf{B}_\varepsilon) (\mathbf{C}^y - \\ &- (\mathbf{I} + \mathbf{A}_{x_2} + \Delta \mathbf{A}_{x_2})^{-1} (\mathbf{B}_{x_1} + \Delta \mathbf{B}_{x_1}) (\mathbf{I} + \mathbf{A}_x)^{-1} \mathbf{B}_{x_H} \mathbf{A}_H^{k-1} \mathbf{C}^x) = \\ &= \left(\mathbf{I} + (\mathbf{I} + \mathbf{A}_{x_2} + \Delta \mathbf{A}_{x_2})^{-1} (\mathbf{B}_{x_1} + \Delta \mathbf{B}_{x_1}) \times \right. \\ &\left. (\mathbf{I} + \mathbf{A}_x)^{-1} \mathbf{B}_{x_H} \mathbf{A}_H^{k-1} \right)^{-1} \times (\mathbf{I} + \mathbf{A}_x + \Delta \mathbf{A}_x)^{-1} (\mathbf{B}_\varepsilon + \Delta \mathbf{B}_\varepsilon) \mathbf{C}^y. \end{aligned} \quad (97)$$

Выражение (97) содержит обратные матрицы вида: $(\mathbf{I} + \mathbf{A}_x + \Delta \mathbf{A}_x)^{-1}$. Рассмотрим вопросы обращения интервальных матриц.

Выберем матрицу $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$, \mathbf{S} некоторая интервальная матрица, для которой справедливо: $\{\mathbf{s}^{-1} | \mathbf{s} \in \mathbf{S}\}$, и вычислим матрицу \mathbf{T} – приближение к обратной матрице \mathbf{s}^{-1} . Определим \mathbf{P} равенством: $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{S}\mathbf{T}$; \mathbf{I} – единичная матрица соответствующей размерности. Предположим, что $\|\mathbf{P}\| = \|\mathbf{I} - \mathbf{S}\mathbf{T}\| < 1$. Тогда для любой вещественной матрицы $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$ справедливо следующее представление [13]:

$$(\mathbf{I} - \delta \mathbf{p})^{-1} = \mathbf{I} + \delta_1 \mathbf{p} + \delta_2 \mathbf{p}^2 + \dots + \delta_v \mathbf{p}^v + \dots = \sum_{v=0}^{\infty} \delta_v \mathbf{p}^v \quad (98)$$

и пусть радиус сходимости этого ряда равен $m\rho$, где m – порядок матриц и ρ – некоторое положительное число $\rho > 0$, $\delta_v = 1$. Как известно, для коэффициентов ряда (98) имеем следующую оценку [13]:

$$|\delta_v| \leq \frac{M}{(v\rho - \varepsilon)^v}, \quad (99)$$

где ε – любое малое положительное фиксированное число $\varepsilon > 0$ и M – некоторое положительное число, зависящее от выбора ε . В силу оценки (99)

$$|\delta_v| |\mathbf{p}|^v < \frac{M}{n} \left\| \left(\frac{n\rho_1}{(n\rho - \varepsilon)^v} \right)^m \right\|. \quad (100)$$

Если $\rho_1 < \rho$, то взяв, ε достаточно малым, будем иметь

$$0 < \frac{n\rho_1}{(n\rho - \varepsilon)^v} < 1, \quad (101)$$

и при этом ряд (98) будет сходящимся [13].

Рассмотрим вопросы перемножения матричных рядов (98). Для этого введем следующие определения и теоремы.

Теорема 3. [13] Если радиус сходимости ряда (98) равен $v\rho$, то ряд сходится для всех матриц, находящихся в окрестности начала

$$|\mathbf{p}| < \|\rho\|. \quad (102)$$

Пусть имеется два степенных ряда

$$f_1(\mathbf{p}_1) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j \mathbf{p}_1^j, \quad f_2(\mathbf{p}_2) = \sum_{l=0}^{\infty} K_l \mathbf{p}_2^l, \quad (103)$$

абсолютно сходящиеся в области (102). Составим новую матрицу, которая получается от перемножения их сумм

$$f(\mathbf{p}) = f_1(\mathbf{p}_1) \times f_2(\mathbf{p}_2). \quad (104)$$

Элементы этой матрицы будут определяться в виде

$$\{f(\mathbf{p})\}_{i,k} = \sum_{s=1}^n \{f_1(\mathbf{p}_1)\}_{i,s} \times \{f_2(\mathbf{p}_2)\}_{s,k}, \quad (105)$$

где

$$\{f_1(\mathbf{p}_1)\}_{s,k} = \delta_{sk} + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m \times \left(\sum_{j_1, \dots, j_{m-1}} \{\mathbf{p}_1\}_{sj_1} \times \{\mathbf{p}_1\}_{j_1 j_2} \times \dots \times \{\mathbf{p}_1\}_{j_{m-1} k} \right), \quad (106)$$

$$\{f_2(\mathbf{p}_2)\}_{i,k} = \delta_{i,k} + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m \times \left(\sum_{j_1, \dots, j_{m-1}} \{\mathbf{p}_1\}_{ij_1} \times \{\mathbf{p}_1\}_{j_1 j_2} \times \dots \times \{\mathbf{p}_1\}_{j_{m-1} k} \right), \quad (107)$$

где $\delta_m = 1$. Ввиду абсолютной сходимости этих последних рядов можно перемножать их почленно так, что для элементов матрицы \mathbf{p} будем иметь согласно (105)

$$\begin{aligned} \{f(\mathbf{p})\}_{i,k} &= \delta_{ik} + \sum_{m=1}^{\infty} (\delta_0 \cdot \delta_m + \delta_1 \cdot \delta_{m-1} + \dots + \delta_m \cdot \delta_0) \times \\ &\times \sum_{j_1, \dots, j_{m-1}} \{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2\}_{ij_1} \times \{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2\}_{j_1 j_2} \times \dots \times \{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2\}_{j_{m-1} k}, \end{aligned} \quad (108)$$

саму матрицу можно представить в виде

$$\{f(\mathbf{p})\}_{i,k} = \mathbf{I} + \sum_{m=1}^{\infty} (\delta_0 \cdot \delta_m + \delta_1 \cdot \delta_{m-1} + \dots + \delta_m \cdot \delta_0) \times (\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2)^m. \quad (109)$$

Отсюда следует следующее определение.

Определение 2. Последовательность матричных рядов $K_1(\delta_1)$, $K_2(\delta_1, \delta_2), \dots$, с коэффициентами $\delta_1, \delta_2, \dots$ и матрицами $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots$ в $R^{n \times n}$, называется мультипликативным, если выполнено следующее условие:

$$\begin{aligned} & \mathbf{I} + \delta_1 \mathbf{p} + \delta_2 \mathbf{p}^2 + \dots + \delta_v \mathbf{p}^v + \dots = \\ & \left(\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{p}_1 + \alpha_2 \mathbf{p}_1^2 + \dots + \alpha_v \mathbf{p}_1^v + \dots \right) \times \\ & \times \left(\mathbf{I} + \sigma_1 \mathbf{p}_2 + \sigma_2 \mathbf{p}_2^2 + \dots + \sigma_v \mathbf{p}_2^v + \dots \right) \end{aligned} \quad (110)$$

или

$$\sum_{i=0}^{\infty} K_i(\delta_1, \dots, \delta_i) \mathbf{p}^i = \left(\sum_{j=0}^{\infty} K_j(\alpha_1, \dots, \alpha_j) \mathbf{p}_1^j \right) \times \left(\sum_{l=0}^{\infty} K_l(\sigma_1, \dots, \sigma_l) \mathbf{p}_2^l \right). \quad (111)$$

Согласно (110), для выражения (97) имеем

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}_{x_2} + \Delta \mathbf{A}_{x_2} \right)^{-1} = \left(\mathbf{I} - \left(-\mathbf{I} - \left[\mathbf{A}_{x_2} + \Delta \mathbf{A}_{x_2} \right] + \mathbf{I} \right) \right)^{-1} = \\ & = \sum_{v=0}^m \left(-\mathbf{I} - \left[\mathbf{A}_{x_2} + \Delta \mathbf{A}_{x_2} \right] + \mathbf{I} \right)^v = \sum_{v=0}^m \left(-\left[\mathbf{A}_{x_2} + \Delta \mathbf{A}_{x_2} \right] \right)^v, \end{aligned} \quad (112)$$

$$\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}_x + \Delta \mathbf{A}_x \right)^{-1} = \left(\mathbf{I} - \left(-\left[\mathbf{A}_x + \Delta \mathbf{A}_x \right] \right) \right)^{-1} = \sum_{v=0}^m \left(-\left[\mathbf{A}_x + \Delta \mathbf{A}_x \right] \right)^v, \quad (113)$$

$$\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}_x \right)^{-1} = \left(\mathbf{I} - \left(-\left[\mathbf{A}_x \right] \right) \right)^{-1} = \sum_{v=0}^m \left(-\left[\mathbf{A}_x \right] \right)^v, \quad (114)$$

где m – некоторое положительное число, тогда (97) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^x &= \left(\mathbf{I} + \left\{ \sum_{v=0}^m \left(-\left[\mathbf{A}_{x_2} + \Delta \mathbf{A}_{x_2} \right] \right)^v \right\} \times \left(\mathbf{B}_{x_1} + \Delta \mathbf{B}_{x_1} \right) \times \right. \\ & \times \left. \left\{ \sum_{v=0}^m \left(-\left[\mathbf{A}_x \right] \right)^v \right\} \times \mathbf{B}_{x_H} \mathbf{A}_H^{k-1} \right)^{-1} \times \left\{ \sum_{v=0}^m \left(-\left[\mathbf{A}_x + \Delta \mathbf{A}_x \right] \right)^v \right\} \times \\ & \times \left(\mathbf{B}_\varepsilon + \Delta \mathbf{B}_\varepsilon \right) \mathbf{C}^y. \end{aligned} \quad (115)$$

После выполнения действий связанных с перемножением, матричных рядов по формуле (110), получаем систему нелинейных алгебраических уравнений с интервальными параметрами

$$\mathbf{C}^x = \widehat{\mathbf{A}}_H^k \mathbf{C}^y, \quad (116)$$

где $\widehat{\mathbf{A}}_H^k$ – матрица размерности $\dim \left\{ \widehat{\mathbf{A}}_H^k \right\} = l \times l$, определяемая как результат преобразования выражения (115).

Итак, решение задачи (58), представимо в виде

$$\tilde{x}_l(t) = \sum_{i=0}^{l-1} c_i^x \varphi_i(t) = (\mathbf{C}^x)^T \Phi(t). \quad (117)$$

Переход к задаче (68), был необходим для изложения целостности картины получения аппроксимирующего решения $\tilde{x}_l(t)$ на основе проекционных методов. Для простоты выводов было введено, что начальные условия полностью определены и равны нулю.

Второй этап. Вернемся к исходной постановке задачи, для этого рассмотрим уравнение (58).

Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (58), аппроксимирующее решение $x(t)$ будем искать согласно следующей схеме. На интервале $[t_0, t_k]$ введем равномерную сетку $t_i = t_0 + i\tau$, $h = (t_k - t_0)/N$, $i = \overline{0, N}$. На каждом подинтервале $J_i = [t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$, проинтегрируем уравнение (58) при заданных начальных условиях (59):

$$x_k(t_{i+1}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_k(\tau, x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)) d\tau + x_j(t_0^i) \quad (118)$$

Если функция $x(t) \in B$ — некоторое банахово пространство функций с базисом, заданных на отрезке $[0, T]$, а

$$\Phi(t) = [\varphi_0(t) \quad \varphi_1(t) \quad \dots \quad \varphi_{p-1}(t)]^T \quad (119)$$

— столбец из p базисных функций в пространстве B , то ее можно аппроксимировать с помощью разложения

$$x(t) \cong \tilde{x}(t) = \sum_{l=0}^{p-1} c_l^x \varphi_l(t) = \Phi^T(t) \mathbf{C}^x, \quad (120)$$

где $\mathbf{C}^x = [c_0^x \quad c_1^x \quad \dots \quad c_{p-1}^x]^T$ — столбец из коэффициентов разложения. Для интегрирования функций по разложению (118) требуется находить разложения функций (120). Поскольку

$$x_k(t_{i+1}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_k(\tau, x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)) d\tau + x_j(t_0^i) = \quad (121)$$

$$= \int_0^T 1(t_{i+1} - \tau) f_k(\tau, x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)) d\tau + x_j(t_0^i),$$

где $T = t_{i+1} - t_i$, а $1(t_{i+1} - \tau)$ — функция Хэвисайда:

$$1(t_{i+1} - \tau) = \begin{cases} 1, & t_{i+1} \geq \tau; \\ 0, & t_{i+1} < \tau. \end{cases} \quad (122)$$

В этом случае справедливы равенства

$$\begin{aligned}\tilde{x}_k(t_{i+1}) &\cong P_l[x_k(t_{i+1})] = \sum_{l=0}^{p-1} c_l^{kx} \varphi_l(t_{i+1}) = \Phi^T(t_{i+1}) C^{kx}; \\ \tilde{x}_j(t_0^i) &\cong P_l[x_j(t_0^i)] = \sum_{l=0}^{p-1} c_l^{xj} \varphi_l(t_{i+1}) = (C^{xj^0})^T \Phi(t_{i+1}),\end{aligned}\tag{123}$$

$$1(t_{i+1} - \tau) \cong \Phi^T(t_{i+1}) A_v \Phi(\tau), v = \overline{0, N},$$

где $A_v = [a_{ij}^v]_{i,j=0}^{p-1}$ — матрица размера $\dim\{A_v\} = p \times p$, элементы которой

$$a_{ij}^v = \int_0^T \int_0^{t_{i+1}} 1(t_{i+1} - \tau) \varphi_i(t_{i+1}) \varphi_j(\tau) dt_{i+1} d\tau,\tag{124}$$

P_l — оператор ортогонального проектирования (ортопроектор). Тогда уравнение (118) можно переписать в форме

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p-1} c_i^{kx} \varphi_i(t_{i+1}) &= \\ &= P_l \left[\int_0^T 1(t_{i+1} - \tau) f_k(\tau, x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)) d\tau \right] + \sum_{l=0}^{p-1} c_l^{xj} \varphi_l(t_{i+1}).\end{aligned}\tag{125}$$

Действие на интеграл в правой части уравнения (125) оператора P_l эквивалентно разложению по ортонормированному базису (71), при котором удерживается первые p членов ряда. Тогда (125) можно записать в матричной форме

$$\Phi^T(t_{i+1}) C^{kx} = \Phi^T(t_{i+1}) A_v \underbrace{\left[\int_0^T \Phi(\tau) \Phi^T(\tau) d\tau \right]}_{\mathbf{I}} C^{kx_f} + (C^{xj^0})^T \Phi(t_{i+1}),\tag{126}$$

где

$$\mathbf{I} = \int_0^T \Phi(\tau) \Phi^T(\tau) d\tau;$$

— единичная матрица, в силу ортонормированности базиса (71),

$$\int_0^T \varphi_i(\tau) \varphi_j(\tau) d\tau = \begin{cases} 1 & \text{если } i = j; \\ 0 & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

то из (126) находим

$$C^{kx} = A_v C^{kx_f} + C^{xj^0}\tag{127}$$

— система нелинейных алгебраических уравнений. Найдем связь между C^{kx} и C^{kx_f} . Имеем

$$x_k^f(\tau) = f_k(\tau, x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)) \cong f_k \left(\sum_{l=0}^{p-1} c_l^{x_1} \varphi_l(\tau), \sum_{l=0}^{p-1} c_l^{x_2} \varphi_l(\tau), \dots, \sum_{l=0}^{p-1} c_l^{x_n} \varphi_l(\tau) \right) = \quad (128)$$

$$= f_k(\Phi^T(\tau)C^{x_1}, \Phi^T(\tau)C^{x_2}, \dots, \Phi^T(\tau)C^{x_n}).$$

Применим оператор ортогонального проектирования P_l к выражению (128), для чего умножим левую и правую части (128) на $\varphi_l(\tau)$ и проинтегрируем на интервале $[0, T] = [0, t_{i+1} - t_i]$:

$$\int_0^T x_k^f(\tau) \varphi_l(\tau) d\tau = \int_0^T f_k(\tau, x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)) \varphi_l(\tau) d\tau \cong$$

$$\cong \int_0^T f_k(\Phi^T(\tau)C^{x_1}, \Phi^T(\tau)C^{x_2}, \dots, \Phi^T(\tau)C^{x_n}) \varphi_l(\tau) d\tau, \quad (129)$$

$$l = \overline{0, p-1}.$$

Коэффициенты функции $x_k^f(\tau)$ определяются соотношением

$$C^{kx_f} = \left[c^{kx_f} \right]_{l=0}^{p-1} = \left[\int_0^T f_k(\Phi^T(\tau)C^{x_1}, \Phi^T(\tau)C^{x_2}, \dots, \Phi^T(\tau)C^{x_n}) \varphi_l(\tau) d\tau \right]_{l=0}^{p-1}. \quad (130)$$

Аппроксимирующее решение $\tilde{x}_k(t)$ задачи (58), будет иметь вид

$$\tilde{x}_k(t) = \tilde{x}_k(t_{i-1}) + \Phi^T(t_{i-1}) \left(\mathbf{A} C^{kx_f} + C^{x_j^0} \right) =$$

$$= \sum_{s=0}^{l-1} c_s^{kx} \varphi_s(t_{i-1}) + \Phi^T(t_{i-1}) \times \quad (131)$$

$$\times \left(\mathbf{A} \times \left\{ \int_0^T f_k(\Phi^T(\tau)C^{x_1}, \dots, \Phi^T(\tau)C^{x_n}) \Phi^T(\tau) d\tau \right\} + \sum_{s=0}^{l-1} c_s^{x_j} \varphi_s(t_{i-1}) \right),$$

$$x_k(t_0) = x_k^0, k = \overline{1, n}, \quad (132)$$

где $\mathbf{A} = \int_0^T \int_0^{t_i} 1(t_i - \tau) \Phi(t_{i-1}) \Phi^T(\tau) dt_i d\tau$.

Введем обозначение

$$e_k(t_i) = |x_k(t_i) - \tilde{x}_k(t_i)|. \quad (133)$$

Тогда, в соответствии с (131)

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_k(t_{i+1}) &= e_k(t_i) + x_k(t_i) + \\
 &+ \Phi^T(t_i) \left(\mathbf{A} \times \right. \\
 &\times \left. \left\{ \int_0^T f_k \left(\Phi^T(\tau) \mathbf{C}^{x_1}, \Phi^T(\tau) \mathbf{C}^{x_2}, \dots, \Phi^T(\tau) \mathbf{C}^{x_n} \right) \Phi^T(\tau) d\tau \right\} + \right. \\
 &+ \left. \sum_{s=0}^{l-1} c_s^{x_j} \varphi_s(t_i) \right) + \Phi^T(t_i) \times \\
 &\times \left(\mathbf{A} \left\{ \int_0^T f_k \left(\Phi^T(\tau) \mathbf{C}^{e_1}, \Phi^T(\tau) \mathbf{C}^{e_2}, \dots, \Phi^T(\tau) \mathbf{C}^{e_n} \right) \Phi^T(\tau) d\tau \right\} \right),
 \end{aligned} \tag{134}$$

$\mathbf{C}^{e_k} = \mathbf{C}^{\tilde{x}_k} - \mathbf{C}^{x_k}$, при этом, вычитая $x_k(t_{i+1})$ из обеих частей (134), получим

$$\begin{aligned}
 e_k(t_{i+1}) &= e_k(t_i) + x_k(t_i) - x_k(t_{i+1}) + \\
 &+ \Phi^T(t_{i-1}) \left(\mathbf{A} \times \right. \\
 &\times \left. \left\{ \int_0^T f_k \left(\Phi^T(\tau) \mathbf{C}^{x_1}, \Phi^T(\tau) \mathbf{C}^{x_2}, \dots, \Phi^T(\tau) \mathbf{C}^{x_n} \right) \Phi^T(\tau) d\tau \right\} + \right. \\
 &+ \left. \sum_{s=0}^{l-1} c_s^{x_j} \varphi_s(t_i) \right) + \Phi^T(t_i) \times \\
 &\times \left(\mathbf{A} \left\{ \int_0^T f_k \left(\Phi^T(\tau) \mathbf{C}^{e_1}, \Phi^T(\tau) \mathbf{C}^{e_2}, \dots, \Phi^T(\tau) \mathbf{C}^{e_n} \right) \Phi^T(\tau) d\tau \right\} \right).
 \end{aligned} \tag{135}$$

Оценим $e_k(t_{i+1})$ из (135):

$$\begin{aligned}
 |e_k(t_{i+1})| &\leq |e_k(t_i)| + \max_{\eta \in J_i} |x_k(\eta)| + \\
 &+ \Phi^T(t_{i-1}) \times \\
 &\times \left(\mathbf{A} \left\{ \int_0^T f_k \left(\Phi^T(\tau) \mathbf{C}^{e_1}, \Phi^T(\tau) \mathbf{C}^{e_2}, \dots, \Phi^T(\tau) \mathbf{C}^{e_n} \right) \Phi^T(\tau) d\tau \right\} + \right. \\
 &+ \left. \sum_{s=0}^{l-1} c_s^{x_j} \varphi_s(t_i) \right).
 \end{aligned} \tag{136}$$

В силу достаточной гладкости решения $x(t)$ и аппроксимирующего решения $\tilde{x}(t)$, из соотношения (136), следует

$$|e_k(t_{i+1})| \leq \alpha |e_k(t_i)| + \gamma, \tag{137}$$

где

$$\alpha = \left(1 + \Phi^T(t_{i-1}) \times \mathbf{A} \left\{ \int_0^T f_k \left(\Phi^T(\tau) C^{e_1}, \Phi^T(\tau) C^{e_2}, \dots, \Phi^T(\tau) C^{e_n} \right) \Phi^T(\tau) d\tau \right\}^{-1} \right), \quad (138)$$

$$\gamma = \max_{\eta \in J_i} |x_k(\eta)| + \left\{ \sum_{s=0}^{l-1} c_s^{x_j} \varphi_s(t_i) \right\} \left(1 + \Phi^T(t_{i-1}) \times \mathbf{A} \left\{ \int_0^T f_k \left(\Phi^T(\tau) C^{e_1}, \Phi^T(\tau) C^{e_2}, \dots, \Phi^T(\tau) C^{e_n} \right) \Phi^T(\tau) d\tau \right\}^{-1} \right). \quad (139)$$

Последовательное применение описанного выше метода нахождения аппроксимирующего решения $\tilde{x}(t)$ в любой точке t_i , позволяет показать, что это приближение является линейной функцией относительно значений $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$.

В итоге компоненты аппроксимирующего решения $\tilde{x}(t)$ могут быть записаны в виде

$$\tilde{x}_k(t) = P_{1k}(t, h)x_1(t_0) + \dots + P_{nk}(t, h)x_n(t_0). \quad (140)$$

Объединенное интервальное расширение этой функции совпадает с естественным интервальным расширением [1, 22], т.е. объединенное расширение всех найденных решений $\tilde{x}_k(t)$ по всем $x_0 \in X_0$,

$$\tilde{X}_k(t) = \bigcup_{x_0 \in X_0} \tilde{x}_k(t_0, x_0, t) = P_{1k}(t, h)X_{0,1}(t_0) + \dots + P_{nk}(t, h)X_{0,n}(t_0). \quad (141)$$

Последнее означает, что метод позволяет получить по координатную сходимость интервальной оценки к множеству точных решений.

4. Метод построения двусторонних оценок множеств решений систем нелинейных дифференциальных уравнений, основанный на численно-аналитическом представлении приближенных решений с учетом интервальных оценок

Нахождение аппроксимирующих решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет организовать процесс вычисления интервальных оценок множеств решений системы, в котором определение интервальных расширений производится в конечной точке области аргумента решений, что позволяет бороться с «эффектом обертывания». При этом ширина интервальных решений будет зависеть лишь от реализации формул, по которым вычисляются интервальные выражения, состоящих из нескольких интервальных операций, что не вызовет экспоненциальный рост ширины интервалов, вызванный «эффектом обертывания» или эффектом Мура. Как было указано в пункте 3.2 алгоритм построения интервальных оценок совокупности решений интервальной задачи (системы дифференциальных уравнений), состоит из двух этапов:

1. Аналитическое нахождение решения аппроксимирующее совокупность решений системы дифференциальных уравнений, их полные погрешности.
2. Интервальное оценивание множеств решений.

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = f_k(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), k = \overline{1, n_r}, \\ x_j(t_0) = x_j^0, j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (142)$$

где $f_k : R \times R^n \rightarrow R^n$ – непрерывные, по совокупности переменных $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$, в прямоугольной области D функции, удовлетворяющие условию Липшица:

$$|f_k(t, x_1(t)) - f_k(t, x_2(t))| \leq \alpha_k |x_1(t) - x_2(t)|, \quad (143)$$

(здесь и ниже через $|\cdot|$ обозначается евклидова норма R^n).

Введем обозначения

$$\begin{aligned} f_k^q(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) &= \frac{\partial}{\partial t} f_k^{q-1}(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) + \\ &+ \sum_{l=1}^n f_l(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \frac{\partial}{\partial x_l(t)} f_k^{q-1}(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ f_k^0(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) &= x_k^0, q = \overline{1, r}, k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (144)$$

Аппроксимирующее решение $\tilde{x}_k(t)$ задачи (142) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k(t) &= \tilde{x}_k(t_{i-1}) + \Phi^T(t_{i-1}) \left(\mathbf{A} \mathbf{C}^{kx_f} + \mathbf{C}^{x_j^0} \right) = \\ &= \sum_{l=0}^{p-1} c_l^{kx} \varphi_l(t_{i-1}) + \Phi^T(t_{i-1}) \left\{ \int_0^T \int_0^{t_{i-1}} \mathbf{1}(t_{i-1} - \tau) \Phi(t_{i-1}) \Phi^T(\tau) dt_{i-1} d\tau \right\} \times \\ &\times \left\{ \int_0^T f_k(\Phi^T(\tau) \mathbf{C}^{x_1}, \Phi^T(\tau) \mathbf{C}^{x_2}, \dots, \Phi^T(\tau) \mathbf{C}^{x_n}) \Phi^T(\tau) d\tau \right\} + \sum_{l=0}^{p-1} c_l^{x_j} \varphi_l(t_{i-1}), \\ x_k(t_0) &= x_k^0, k = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (145)$$

Разложим компоненты точного решения $x(t)$ по формуле Тейлора на интервале $[t_{i-1}, t_i]$:

$$x_k(t) = \sum_{j=0}^r \frac{x_k^j}{j!} (t - t_i)^j + \frac{x_k^{r+1}(\xi_{k,i})}{(r+1)!} (t - t_i)^{r+1}, \quad (147)$$

$$\xi_{k,i} \in (t_i, t_{i+1}), k = \overline{1, n_r}. \quad (148)$$

Введем следующее обозначение

$$e_k(t) = |x_k(t) - \tilde{x}_k(t)|, k = \overline{1, n_r}. \quad (149)$$

Тогда, в соответствии с (147)

$$\begin{aligned}
 e_k(t) &= |x_k(t) - \tilde{x}_k(t)| = \left| \sum_{j=0}^r \frac{x_k^j}{j!} (t-t_{i-1})^j + \frac{x_k^{r+1}(\xi_{k,i})}{(r+1)!} (t-t_{i-1})^{r+1} - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{l=0}^{p-1} c_l^{kx} \varphi_l(t_i) \right| = \left| \sum_{j=0}^r \frac{x_k^j}{j!} (t-t_{i-1})^j + \frac{x_k^{r+1}(\xi_{k,i})}{(r+1)!} (t-t_{i-1})^{r+1} - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{l=0}^{p-1} c_l^{kx} \varphi_l(t_{i-1}) - \Phi^T(t_{i-1}) \left(\mathbf{A} \mathbf{C}^{kx_f} + \mathbf{C}^{x_j^0} \right) \right| \leq |x_k(t_{i-1}) - \tilde{x}_k(t_{i-1})| + \\
 &\quad + \sum_{j=0}^{r-1} \left| x_k^{j+1}(t_{i-1}) - \left(\Phi^T(t_{i-1}) \left(\mathbf{A}_v \mathbf{C}^{kx_f} + \mathbf{C}^{x_j^0} \right) \right)^j \right| + \\
 &\quad + \left| x_k^{r+1}(\xi_{k,i}) - \left(\Phi^T(t_{i-1}) \left(\mathbf{A}_v \mathbf{C}^{kx_f} + \mathbf{C}^{x_j^0} \right) \right)^r \right|.
 \end{aligned}$$

где, с учетом (144), производная j -го порядка $\left(\Phi^T(t_{i-1}) \left(\mathbf{A}_v \mathbf{C}^{kx_f} + \mathbf{C}^{x_j^0} \right) \right)^j$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 f_k^j(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) &\cong P_l \left[f_k^j(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \right] = \\
 &= \left(\Phi^T(t) \left(\mathbf{A}_v \mathbf{C}^{kx_f} \right) \right)^j = \frac{\partial}{\partial t} \left(\Phi^T(t) \left(\mathbf{A}_v \mathbf{C}^{kx_f} \right) \right)^{j-1} + \\
 &+ \sum_{l=1}^n \Phi^T(t) \left(\mathbf{A}_v \mathbf{C}^{lx_f} \right) \frac{\partial}{\partial x_l(t)} \left(\Phi^T(t) \left(\mathbf{A}_v \mathbf{C}^{kx_f} \right) \right)^{j-1}, \quad (150) \\
 f_k^0(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) &\cong P_l \left[f_k^0(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \right] = \\
 &= \left(\mathbf{C}^{x_k^0} \right)^T \Phi(t) \cong x_k^0, \quad j = \overline{1, r}, \quad k = \overline{1, n}.
 \end{aligned}$$

Учитывая непрерывность нелинейной функции в уравнении (142) и условие Липшица, которое выполняется для производных правой части (142), получим

$$\begin{aligned}
 &\left| x_k^{j+1}(t_{i-1}) - \Phi^T(t_{i-1}) \left(\mathbf{A}_v \mathbf{C}^{kx_f} + \mathbf{C}^{x_j^0} \right)^j \right| \leq \\
 &\leq L_k \sum_{d=1}^n |x_d(t_{i-1}) - \tilde{x}_d(t_{i-1})| \leq L_k \sum_{d=1}^n e_d(t_i), \quad k = \overline{1, n}. \quad (151)
 \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
 &\left| x_k^{r+1}(\xi_{k,i}) - \left(\Phi^T(t_{i-1}) \left(\mathbf{A}_v \mathbf{C}^{kx_f} + \mathbf{C}^{x_j^0} \right) \right)^r \right| \leq \\
 &\leq |x_k^{r+1}(\xi_{k,i}) - \tilde{x}_k^{r+1}(t_{i-1})| + \quad (152)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left| f_k^r(t_{i-1}, x_1(t_{i-1}), \dots, x_n(t_{i-1})) - \left(\Phi^T(t_{i-1}) \left(\mathbf{A}_v \mathbf{C}^{kx_f} + \mathbf{C}^{x_j^0} \right) \right)^r \right| \leq \\
 & \leq \omega(x_k^{r+1}, h) + L_k \sum_{d=1}^n e_d(t_{i-1}).
 \end{aligned}$$

В неравенстве (152) использованы модули непрерывности $\omega(\cdot, \cdot)$ производной $r+1$ -го порядка решения, которые в общем случае определяются как функция

$$\omega(f, h) = \sup \{ |f(t') - f(t'')| : |t' - t''| \leq h \}, \quad t', t'' \in [a, b]. \quad (153)$$

Подставим (152), (151) в (149), получим

$$\begin{aligned}
 e_k(t) & = |x_k(t) - \tilde{x}_k(t)| \leq e_k(t_i) + L_k \sum_{d=1}^n e_d(t_i) + \\
 & + \omega(x_k^{r+1}, h) + L_k \sum_{d=1}^n e_d(t_{i-1}) = e_k(t_i)(1 + 2L_k) + 2L_k \sum_{\substack{d=1, \\ d \neq k}}^n e_d(t_i) + \\
 & + \omega(x_k^{r+1}, h).
 \end{aligned} \quad (153)$$

Введем вектор $\mathbf{E}(t)$, составленный из величин $e_k(t)$:

$$\mathbf{E}(t) = (e_1(t) \quad \dots \quad e_n(t))^T, \quad (154)$$

Тогда (153) можно переписать в матричном виде

$$\mathbf{E}(t) \leq (\mathbf{I} + \mathbf{L})\mathbf{E}(t_i) + \omega(h)\mathbf{V}, \quad (155)$$

где \mathbf{V} – единичный вектор размерности $\dim\{\mathbf{V}\} = 1 \times n$:

$$\mathbf{V} = (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1), \quad (156)$$

\mathbf{L} – матрица размерности $\dim\{\mathbf{L}\} = n \times n$:

$$\mathbf{L} = 2 \begin{pmatrix} L_1 & L_1 & \dots & L_1 \\ L_2 & L_2 & \dots & L_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_n & L_n & \dots & L_n \end{pmatrix}, \quad (157)$$

$\omega(h)$ имеет вид

$$\omega(h) = \max_k \{ \omega(x_k^{r+1}, h) \}. \quad (158)$$

Запишем последовательность неравенств

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}(t)\| &\leq (1 + \|\mathbf{L}\|)\|\mathbf{E}(t_i)\| + \omega(h); \\ (1 + \|\mathbf{L}\|)\|\mathbf{E}(t_i)\| &\leq (1 + \|\mathbf{L}\|)^2 \|\mathbf{E}(t_{i-1})\| + \omega(h)(1 + \|\mathbf{L}\|); \\ (1 + \|\mathbf{L}\|)^2 \|\mathbf{E}(t_{i-1})\| &\leq (1 + \|\mathbf{L}\|)^3 \|\mathbf{E}(t_{i-2})\| + \omega(h)(1 + \|\mathbf{L}\|)^2; \\ &\dots\dots\dots \\ (1 + \|\mathbf{L}\|)^i \|\mathbf{E}(t_1)\| &\leq (1 + \|\mathbf{L}\|)^{i+1} \|\mathbf{E}(t_0)\| + \omega(h)(1 + \|\mathbf{L}\|)^i, \end{aligned} \quad (159)$$

где

$$\begin{aligned} \|\mathbf{L}\| &= \max_i \sum_{j=1}^n |l_{ij}|, \quad \mathbf{L} = [l_{ij}]_{i,j=1}^n, \quad l_{ij} = L_i, \\ \|\mathbf{E}(t_i)\| &= \max_k e_k(t), \end{aligned} \quad (160)$$

— матричная и векторная нормы соответственно. Складывая неравенства (159) и учитывая, что $e_k(t_0) = 0$, получим

$$\|\mathbf{E}(t)\| \leq \frac{\exp\|\mathbf{L}\| - 1}{\|\mathbf{L}\|} \omega(h); \quad (161)$$

Аналогично оценивается отклонение производных точного решения и приближенного для каждой компоненты фазового вектора:

$$\left| x_k^q(t) - \tilde{x}_k^q(t) \right|, \quad q = \overline{1, r} \quad (162)$$

получаем

$$\left\| x_k^q(t) - \tilde{x}_k^q(t) \right\| \leq \frac{\exp\|\mathbf{L}\| - 1}{\|\mathbf{L}\|} \max_k \left\{ \omega(x_k^{r-q}, h) \right\}. \quad (163)$$

Оценка (163) обосновывает сходимость метода построения приближенных решений $\tilde{x}_k(t)$ аппроксимирующих решение исходной задачи (142) на интервале $[t_0, t_k]$ при шаге сетки $h \rightarrow 0$.

Итак, рассмотрен алгоритм по которому можно строить интервальные оценки множеств точных решений системы нелинейных дифференциальных уравнений (142) на основе сочетания двух этапов:

1. Последовательного нахождения аналитических формул (145) по которым можно вычислять приближенные решения задачи (142) на каждом подинтервале $J_i = [t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$ интервала $[t_0, t_k]$.
2. Определение по этим формулам интервальных расширений, включающих решение.

Поскольку в алгоритме нет необходимости в пошаговом применении интервальных операций, то обходим влияние «эффекта обертывания». При выполнении второго этапа алгоритма, связанного с вычислением интервальных расширений, возможно дополнительно, на каждом шаге, производить линеаризацию формул этих решений по начальным значениям. Остановимся на этом подходе более подробно.

Решение $\tilde{x}_k(t)$, аппроксимирующее компоненты фазового вектора системы нелинейных уравнений (142) – это суперпозиция функций, зависящих от начальных значений $x_j^0, j = \overline{1, n}$ для любого k . Введем следующее обозначение $\Theta_{ij}^k(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ для производных $f_k^j(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$, входящих в процесс вычислений.

Произведем линеаризацию этих функций на интервале X^0 , являющимся произведением интервалов $X_1^0 \times X_2^0 \times \dots \times X_n^0$. Применим формулу Тейлора к функции $\Theta_{ij}^k(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$:

$$\begin{aligned} \Theta_{ij}^k(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) &= \Theta_{ij}^k(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) + \\ &+ \frac{\partial \Theta_{ij}^k(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_1^0} \Big|_{z_1} (x_1^0 - x_{10}) + \dots + \frac{\partial \Theta_{ij}^k(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_n^0} \Big|_{z_1} \times \\ &\times (x_n^0 - x_{n0}) + \frac{1}{2} \sum_{l,s=1}^n \frac{\partial^2 \Theta_{ij}^k(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_l^0 \partial x_s^0} \Big|_{z_2} (x_{l0} + \theta_l(x_l^0 - x_{l0})) \times \\ &\times (x_{s0} + \theta_s(x_s^0 - x_{s0})), \theta_l, \theta_s \in [0, 1], z_1, z_2 \in X_1^0 \times X_2^0 \times \dots \times X_n^0. \end{aligned} \quad (164)$$

Пусть $\mathbf{M}_{ij}^k(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ линейная часть разложения (164)

$$\mathbf{M}_{ij}^k(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \Theta_{ij}^k(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \Theta_{ij}^k(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_l^0} \Big|_{z_1} (x_l^0 - x_{l0}). \quad (165)$$

Рассмотрим неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \Theta_{ij}^k(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) - \mathbf{M}_{ij}^k(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{l,s=1}^n \left| \frac{\partial^2 \Theta_{ij}^k(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_l^0 \partial x_s^0} \Big|_{z_2} \varpi(X_l^0) \varpi(X_s^0) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \max_{l,s, X_l^0, X_s^0} \left\{ \frac{\partial^2 \Theta_{ij}^k(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_l^0 \partial x_s^0} \Big|_{z_2} \right\} \sum_{l,s=1}^n \varpi(X_l^0) \varpi(X_s^0) \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \max_{l,s, X_l^0, X_s^0} \left\{ \frac{\partial^2 \Theta_{ij}^k(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_l^0 \partial x_s^0} \Big|_{z_2} \right\} \varpi^2(X_{\max}^0) \frac{n(n-1)}{2} = \end{aligned} \quad (166)$$

$$= \frac{n(n-1)}{4} \max_{l,s,X_l^0,X_s^0} \underbrace{\left\{ \frac{\partial^2 \Theta_{ij}^k(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_l^0 \partial x_s^0} \right\}_{z_2}}_{\Theta} \varpi^2(X_{\max}^0) =$$

$$= \frac{n(n-1)}{4} \Theta \varpi^2(X_{\max}^0),$$

где

$$\Theta = \max_{l,s,X^0} \left\{ \frac{\partial^2 \Theta_{ij}^k(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_l^0 \partial x_s^0} \right\}_{z_2}, l, s = \overline{1, n},$$

$$\varpi(X_l^0) = \overline{X_l^0} - \underline{X_l^0}, \varpi(X^0) = \max_l \varpi(X_l^0).$$

Алгоритм состоит из следующих шагов:

1. На интервале $[t_0, t_k]$ вводится равномерная сетка $t_i = t_0 + i\tau$, $h = (t_k - t_0)/N$, $i = \overline{0, N}$. На каждом подинтервале $J_{i-1} = [t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{0, N-1}$, представляем выражения $f_k^j(\cdot, x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot))$ как функции, зависящие только от начальных условий.
2. Определяются их линейные части $\mathbf{M}_{ij}^k(\cdot)$ согласно формуле (165).
3. Подставляем их в выражения, по которым вычисляется аппроксимирующее решение (145) системы нелинейных дифференциальных уравнений (142)

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k(t) &= \tilde{x}_k(t_{i-1}) + \Phi^T(t_{i-1}) \left(\mathbf{A}_v \mathbf{C}^{kx_\Theta} + \mathbf{C}^{x_j^0} \right) = \\ &= \sum_{l=0}^{p-1} c_l^{kx} \varphi_l(t_{i-1}) - \\ &- \Phi^T(t_{i-1}) \left\{ \int_0^T \int_0^{t_{i-1}} 1(t_{i-1} - \tau) \Phi(t_{i-1}) \Phi^T(\tau) dt_{i-1} d\tau \right\} \times \\ &\times \left\{ \int_0^T \mathbf{M}_{ij}^k \left(\Phi^T(\tau) \mathbf{C}^{x_1^0}, \Phi^T(\tau) \mathbf{C}^{x_2^0}, \dots, \Phi^T(\tau) \mathbf{C}^{x_n^0} \right) \Phi^T(\tau) d\tau \right\} + \\ &+ \sum_{l=0}^{p-1} c_l^{x_j} \varphi_l(t_{i-1}) \Big), \end{aligned} \tag{167}$$

$$\tilde{x}_k(t_0) = x_k^0; k = \overline{1, n_r}; i, j = \overline{1, n}. \tag{168}$$

Оценим погрешность метода (167). С учетом (149), получим

$$\begin{aligned}
 e_k(t) &= |x_k(t) - \tilde{x}_k(t)| = \left| \sum_{j=0}^r \frac{x_k^j}{j!} (t-t_{i-1})^j + \frac{x_k^{r+1}(\xi_{k,i-1})}{(r+1)!} (t-t_{i-1})^{r+1} - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{l=0}^{p-1} c_l^{kx} \varphi_l(t_i) \right| = \left| \sum_{j=0}^r \frac{x_k^j}{j!} (t-t_{i-1})^j + \frac{x_k^{r+1}(\xi_{k,i-1})}{(r+1)!} (t-t_{i-1})^{r+1} - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{l=0}^{p-1} c_l^{kx} \varphi_l(t_{i-1}) - \Phi^T(t_{i-1}) \left(\mathbf{A}_v \mathbf{C}^{kx_\Theta} + \mathbf{C}^{x_j^0} \right) \right| \leq |x_k(t_{i-1}) - \tilde{x}_k(t_{i-1})| + \\
 &\quad + \left| x_k^{r+1}(\xi_{k,i-1}) - \left(\Phi^T(t_{i-1}) \left(\mathbf{A}_v \mathbf{C}^{kx_\Theta} + \mathbf{C}^{x_j^0} \right) \right)^r \right|.
 \end{aligned}$$

На основании неравенства (166), получим оценки для производных

$$\begin{aligned}
 &\left| x_k^{j+1}(t_i) - \mathbf{M}_{ij}^k(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \right| \leq |x_k^{j+1}(t_i) - f_k^j(x_{i-1})| + \\
 &\quad + \frac{n(n-1)}{4} \Theta \omega^2(X^0); \quad k = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, r-1},
 \end{aligned} \tag{169}$$

по аналогии с (169), оцениваем

$$\begin{aligned}
 &\left| x_k^{r+1}(\xi_{k,i}) - \mathbf{M}_{ir}^k(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \right| \leq |x_k^{r+1}(\xi_{k,i}) - f_k^r(x_{i-1})| + \\
 &\quad + \frac{n(n-1)}{4} \Theta \omega^2(X^0).
 \end{aligned} \tag{170}$$

Подставляя оценки (169) и (170) в (166), имеем

$$\begin{aligned}
 e_k(t) &= |x_k(t) - \tilde{x}_k(t)| \leq e_k(t_i) + 2L_k \sum_{l=1}^n e_l(t_i) + \\
 &\quad + 2 \frac{n(n-1)}{4} \Theta \omega^2(X^0) + \omega(x_k^{r+1}, h) \leq \\
 &\leq e_k(t_i) (1 + 2L_k) \left(\sum_{l=1}^{n-1} e_l(t_i) \right) + \frac{n(n-1)}{2} \Theta \omega^2(X^0) + \\
 &\quad + \omega(x_k^{r+1}, h) \leq e_k(t_i) (1 + 2L_k) + \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq k}}^n e_l(t_i) + \\
 &\quad + \frac{n(n-1)}{2} \Theta \omega^2(X^0), \quad k = \overline{1, n}.
 \end{aligned} \tag{171}$$

По аналогии с (154), для вектора ошибок $\mathbf{E}(t)$ можно записать неравенство

$$\mathbf{E}(t) \leq (\mathbf{I} + \mathbf{L}) \mathbf{E}(t_i) + B_1 \omega^2(X^0) \mathbf{B}, \tag{172}$$

где матрица и вектор введены ранее,

$$B_1 = \frac{n(n-1)}{2} \Theta. \tag{173}$$

Запишем последовательность неравенств

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}(t)\| &\leq (1 + \|\mathbf{L}\|)\|\mathbf{E}(t_i)\| + B_1\varpi^2(X^0), \\ (1 + \|\mathbf{L}\|)\|\mathbf{E}(t_i)\| &\leq (1 + \|\mathbf{L}\|)^2\|\mathbf{E}(t_{i-1})\| + (1 + \|\mathbf{L}\|)B_1\varpi^2(X^0), \\ (1 + \|\mathbf{L}\|)^2\|\mathbf{E}(t_{i-1})\| &\leq (1 + \|\mathbf{L}\|)^3\|\mathbf{E}(t_{i-2})\| + (1 + \|\mathbf{L}\|)^2B_1\varpi^2(X^0), \\ &\dots\dots\dots \\ (1 + \|\mathbf{L}\|)^i\|\mathbf{E}(t_1)\| &\leq (1 + \|\mathbf{L}\|)^{i+1}\|\mathbf{E}(t_0)\| + (1 + \|\mathbf{L}\|)^iB_1\varpi^2(X^0), \end{aligned} \tag{174}$$

и учитывая, что $e_k(t_0) = 0$ для всех k получим

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}(t)\| &\leq \sum_{l=0}^i (1 + \|\mathbf{L}\|)^l + B_1\varpi^2(X^0) \leq \\ &\leq \frac{\exp\|\mathbf{L}\| - 1}{\|\mathbf{L}\|} B_1\varpi^2(X^0) = \frac{n(n-1)}{2} \frac{\exp\|\mathbf{L}\| - 1}{\|\mathbf{L}\|} \Theta\varpi^2(X^0). \end{aligned} \tag{175}$$

Неравенство (175) определяет сходимость предложенного метода при $h \rightarrow 0, \varpi^2(X^0) \rightarrow 0$. Для практической реализации алгоритма необходимо разбивать интервал начальных значений на малые подинтервалы и последовательно решать задачи получения верхних и нижних оценок для каждого подинтервала. При фиксированных значениях $h, \varpi^2(X^0)$ верхние и нижние оценки будут включать множество точных решений, отклонение этого включения можно оценить как величину, зависящую от шага и начальных значений.

Пример: приведем пример Р.Е. Мура [1, 2], иллюстрирующий так называемый эффект обертывания (wrapping effect). В литературе он также часто упоминается как эффект раскрутки или эффект Мура. Этот эффект проявляется в чрезмерном увеличении ширины интервального решения системы дифференциальных уравнений по сравнению с истинным. Этот эффект связан только с внутренними свойствами интервальных методов безотносительно к ошибкам численных решений.

Приведем систему дифференциальных уравнений [1, 2]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t), t \geq 0, \end{cases} \tag{176}$$

с интервальными начальными условиями

$$x_1^0 \in [-0,1,0,1], x_2^0 \in [-0,9,1,1]. \tag{177}$$

На $[0, T]$ вводится сетка $t_i = ih, i = 0, 1, \dots, l, h = 1/l$, и функции вида [10]:

$$\varphi_i(t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \begin{cases} \frac{t - t_{i-1}}{h}, t \in (t_{i-1}, t_i), i = 1, \dots, l-1, \\ \frac{t_{i+1} - t}{h}, t \in (t_i, t_{i+1}), 0, t \notin (t_{i-1}, t_{i+1}), \end{cases} \tag{178}$$

которые применяются в качестве базисных.

Решение системы (176) представляет собой движущийся по концентрическим окружностям и поворачивающийся относительно координатных осей квадрат. В [3] приведено решение системы (176), которое представлено на рис. 3, в явной форме проявляется возрастание ширины интервального решения.

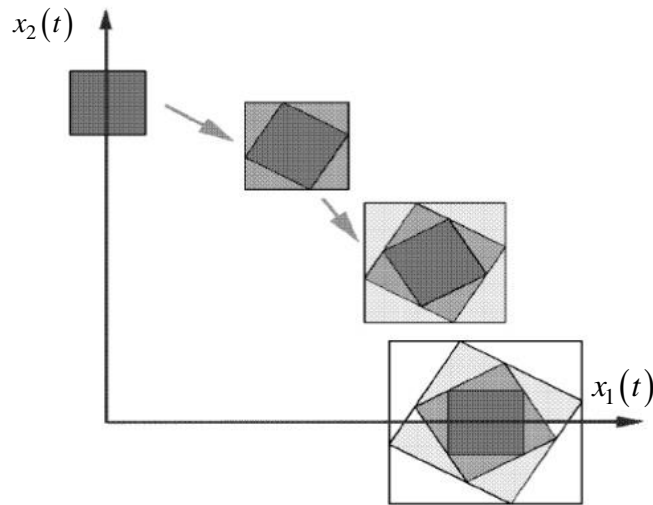


Рис. 3. Решение системы Мура, явно проявляется эффект обертывания (wrapping effect)

Для большинства методов, гарантирующих точное включение множества решений, сторона этого квадрата увеличивается после k оборотов в $e^{2\pi k}$ раз, то есть после первого оборота почти в 600 раз. В нашем случае получаем практически точное включение поворачивающегося квадрата после одного оборота, что изображено на рис. 4.

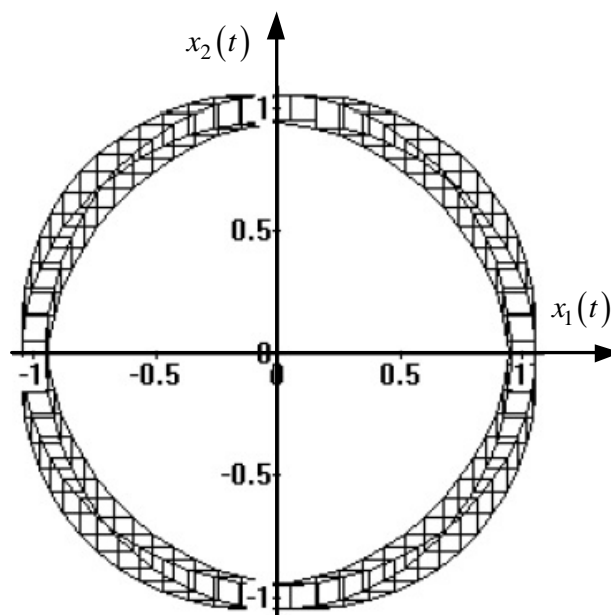


Рис. 4. Решение системы Мура

На рис. 5 представлено поведение решений системы Мура после 60 оборотов, движения квадрата изображены на последовательности плоскостей, расположенных параллельно друг другу в направлении оси t .

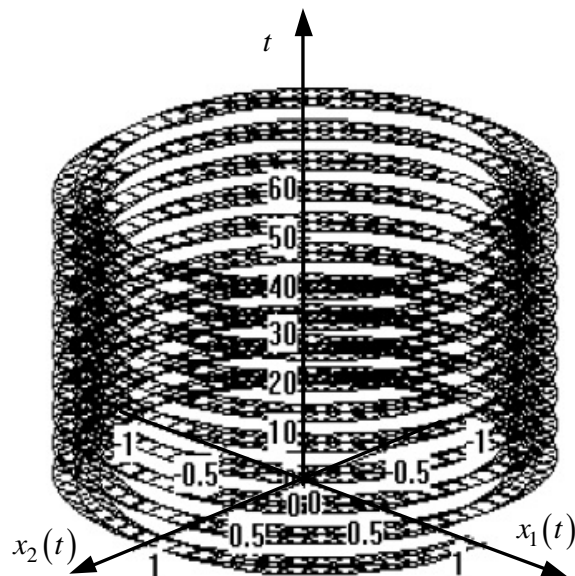


Рис. 5. Решение системы Мура

5. Выводы

В работе рассмотрены вопросы построения двусторонних оценок множеств решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с интервальными параметрами и отклонение этих решений от границ совокупности всех точных решений указанной задачи. При этом вводятся понятия сходимости в Хаусдорфовой метрике объединенного интервального расширения, соответствующего построенной интервальной оценке, к совокупности точных решений. В работе описан метод построения двусторонних интервальных оценок на основе двухэтапной процедуры:

1. Последовательного нахождения аналитических формул (145) по которым можно вычислять приближенные решения задачи (1) на каждом подинтервале $J_i = [t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$ интервала $[t_0, t_k]$.
2. Определение по этим формулам интервальных расширений, включающих решение.

Требование строить приближенное решение (145) в любой точке t области D позволяет бороться с «эффектом обёртывания» или эффектом Мура, поскольку определение интервальных оценок переносится на последний этап алгоритма, т.е. снимается «пошаговость» оценок множеств решений. Приближенное решение строится на основе проекционных методов и основано на спектральном представлении непрерывных функций измеримых по Лебегу и ограниченных непрерывных операторов в конечномерном пространстве.

Литература

1. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987. – 356 с.
2. Вербицкий В.И., Горбань А.Н., Утюбаев Г.Ш., Шокин Ю.И. Эффект Мура в интервальных пространствах. Докл. АН СССР, 304, №1, 1989, 17–22.
3. Добронев Б.С., Шайдуров В.В. Двусторонние численные методы. – Новосибирск: Наука, 1990. – 208 с.
4. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986. – 221 с.
5. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
6. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
7. Костоусова Е.К. Полиэдральные аппроксимации в задачах гарантированного управления и оценивания: дис. д. физ.-мат. наук. – Екатеринбург, 2005. – 238 с.
8. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
9. Мартынюк А.А., Гутовски Р. Интегральные неравенства и устойчивость движения. – Киев: Наукова Думка, 1979. – 272 с.
10. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. – Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 416 с.
11. Назин С.А. Эллипсоидальное и интервальное оценивание состояний и параметров дискретных динамических систем с неопределенным описанием модели: дис. канд. физ.-мат. наук. – Москва, 2004. – 118 с.
12. Роголев А.Н. Ансамбли систем дифференциальных уравнений с интервальными данными // Интервальная математика и распространение ограничений. – 2004. – С. 240-254.
13. Смирнов В.И. Курс высшей математики, Том 3, Часть 2, Издательство: Наука. – 9-е изд., 1974. – 671 с.
14. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
15. Chernousko F.L. State estimation for dynamic systems. Boca Raton, Florida: CRC Press, 1994.
16. Jaulin L., Kieffer M., Didrit O., Walter E. Applied interval analysis. London: Springer-Verlag, 2001.
17. Kurzhanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhauser, 1997.
18. Kurzhanski A.B., Valiov V.M. (Eds). Modeling techniques for uncertain system. Boston: Birkhauser, 1994.
19. Matasov A.I. Estimators for uncertain dynamic systems. Boston: Kluwer, 1999.
20. Milanese M., Belforte G. Estimation theory and uncertainty intervals evaluation in presence of unknown but bounded errors: Linear families of models and estimators. IEEE Trans. Autom. Contr., 1982, 27, No. 2, pp. 408-414.

21. Milanese M., Norton J., Piet-lahanier H., Walter E. (Eds). Bounding approaches to system identification. N.Y.: Plenum Press, 1996.
22. Moore R.E. Interval analysis. – Prentice Hall: Englewood Cliffs, N.-J., 1966. – 145 p.
23. Stewart N.F. A heuristic to reduce the wrapping effect in the numerical solution of $\dot{x} = f(x, t)$. BIT, No. 11, 1971, 328–337.
24. Walter W. Differential and integral inequalities. – Berlin, Springer, 1970. – 195 p.