ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 4, 2017
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Численные методы

РЕШЕНИЕ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА С ВОЗМУЩЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ НА ОСНОВЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ МЕТОДОВ[1]

А.А. Рогоза

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Калужский филиал. 248000, Россия, г. Калуга, ул. Баженова, д. 2. e - mail: Aemaeth_eternity@mail.ru

Аннотация

В настоящей статье рассмотрены некоторые проекционные методы решения одного класса сингулярных интегральных уравнений Фредгольма второго рода, (в том числе в условиях возмущенного интегрального оператора), возникающих в задачах робастного управления. Проведено исследование свойств этих методов и разработаны алгоритмы их численной реализации. Для случаев различных классов гладкостей функции в правой части сингулярного интегрального уравнения получены оценки погрешности рассмотренных методов в нормах пространств Лебега и непрерывных функций. Оценки получены как для произвольной неравномерной сетки, так и для уравнений, в том числе с недифференцируемыми ядрами. Приближенная модель исходной задачи представляет собой систему интервальных алгебраических уравнений. Доказаны существование и единственность решения этой системы в рамках стандартных допущений интервального анализа. Разработан эффективный алгоритм численной реализации рассматриваемых проекционных методов, ориентированный в первую очередь на применение ЭВМ. Предложенный метод допускает распараллеливание и достаточно просто реализуется на сетевых платформах системы Grid.

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Калужской области (грант № 14-41-03071).*

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение второго рода с возмущенным оператором, итерированный метод Галеркина, метод Канторовича, итерированный метод Канторовича, финитные функции, интервальные алгебраические системы уравнений.

Abstract

In this paper we consider some projection methods for solving a certain class of singular Fredholm integral equations of the second kind (including a perturbed integral operator), which are relevant for robust control problems. An investigation the properties of these methods and implementation of algorithms for their solution were performed. Estimates of the method error are obtained in the norms of Lebesgue and continuous functions spaces for various smoothness classes of right-hand side functions of the singular integral equation. Estimates are obtained both for an arbitrary nonuniform grid and for equations, including equations with nondifferentiable kernel. The approximate model of the initial problem is a system of interval algebraic equations. The existence and uniqueness of this system solution is proved within the framework of standard assumptions of interval analysis. An effective computer-aided algorithm for numerical realization of the projection methods under consideration was developed. The proposed method allows parallelization and may be rather simply implemented on network platforms of the Grid system.

Keywords: singular integral equation of the second kind with perturbed operator, iterated Galerkin method, Kantorovich method, Iterated Kantorovich method, finite functions, interval algebraic systems of equations.

1. Введение

Многочисленные теоретические и прикладные задачи науки, техники и производства приводят к необходимости решения различных классов операторных уравнений в функциональных пространствах; частными случаями таких уравнений являются хорошо известные интегральные, дифференциальные (как обыкновенные, так и в частных производных) и интегродифференциальные уравнения (одномерные и многомерные; линейные и нелинейные; регулярные и сингулярные; корректные и некорректные).

Указанные уравнения, как правило, точно не решаются. Поэтому для их решения разработаны и применяются различные приближенные методы (прямые, проекционные, итеративные, смешанные и др.). Однако, несмотря на полученные в этой области многочисленные результаты, она все еще далека от своего завершения.

Ниже излагается теория приближенных методов решения линейных операторных уравнений в банаховых и гильбертовых пространствах. Она трактуется как продолжение и дальнейшее развитие хорошо известной общей теории приближенных методов, предложенной академиком Л.В. Канторовичем для операторных уравнений второго рода и приводящихся к ним в определенном смысле; с другой стороны, она (предлагаемая теория) обусловлена приложениями к широким классам уравнений (первую очередь, к сингулярным интегральным уравнениям), задача решения которых может быть поставлена как корректно, так и некорректно.

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение с возмущенным оператором

$$x(t) = \varpi\int_0^T \left[K(t-\tau) + \Delta K(t-\tau)\right] x(\tau)\, d\tau + f(\tau),\ \tau \in J = [0, T].$$

Несмотря на кажущуюся простоту при численном решении данного уравнения возникают существенные трудности [16] (в статье рассмотрено слабо сингулярное интегральное уравнение в отсутствие возмущения в ядре – $\Delta K(t-\tau) \equiv 0$, тем не менее, отражены основные трудности решения рассматриваемого уравнения на примере интегрального уравнения переноса излучения, особенно в случае $T \gg 1$ и $\varpi \approx 1$. В последнее десятилетие различным численным и асимптотическим методам решения рассматриваемого уравнения при $\Delta K(t-\tau) \equiv 0$ было посвящено значительное число работ [17] – [31]. Однако в случае возмущенного интегрального оператора, работ на порядок меньше. Следует отметить, что уравнение рассматриваемого класса особенно актуально в математической теории управления, в задачах управления в условиях параметрических неопределенностей [1].

В настоящей работе рассматривается один из подходов к построению оптимальных оценок множеств решений сингулярного интегрального уравнения с возмущенным оператором основанный на методах интервального анализа.

2. Постановка задачи, применяемый метод.

Постановка задачи.

Рассмотрим слабо сингулярное интегральное уравнение Фредгольма второго рода с возмущенным интегральным оператором

$$x(t) = \varpi\int_0^T \left[K(t-\tau) + \Delta K(t-\tau)\right] x(\tau)\, d\tau + f(\tau),\ \tau \in J = [0, T]. \tag{1}$$

Предполагается, что ядро $K(t-\tau)$, а так же возмущение ядра $\Delta K(t-\tau)$ является функцией заданной на $R^+ = (0, +\infty)$, причем $K(0^+), \Delta K(0^+) = +\infty$ (уравнение сингулярно) и $K, \Delta K \in L_r(R^+)$ для всех $r \in [1, +\infty)$ (последнее означает слабую сингулярность); кроме того, $\|K(t-\tau)\|_{L_1(R^+)} < \delta$. Параметр $\varpi \in (0, 1)$ фиксирован. Так же наложим требование, что функция $f(\tau)$ не обязательно должна быть гладкой. Предполагается, что $f \in L_p(J)$, $1 \le p \le \infty$ либо $f \in C(\overline{J})$ или $f \in W_p^1(J)$, $1 \le p \le \infty$.

Применяемый метод.

Введем некоторые обозначения и приведем ряд свойств уравнения (1). Через $\overline{p}$, при $p \in [1, +\infty]$, обозначим сопряженный по Гёльдеру показатель, такой, что выполняется условие

$$1/p + 1/\overline{p} = 1. \tag{2}$$

Обозначим:

$$(f, g) = \int_0^T f(\tau) g(\tau) d\tau, \tag{3}$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{1-\varpi},\ \gamma_1 = \frac{\varpi}{1-\varpi},\ \gamma_2 = \frac{\varpi^2}{1-\varpi}, \tag{4}$$

$$E_r = \left\| K(\cdot) + \Delta K(\cdot) \right\|_{L_r(R)} = 2^{1/r} \left\| K(\cdot) + \Delta K(\cdot) \right\|_{L_r(R^+)},\ 1 \le r < \infty. \tag{5}$$

Введем интегральные операторы:

$$(\mathbf{T}x)(t) = \int_0^T K(t-\tau) x(\tau) d\tau,\ \tau \in J, \tag{6}$$

$$(\Delta\mathbf{T}x)(t) = \int_0^T \Delta K(t-\tau) x(\tau) d\tau,\ \tau \in J, \tag{7}$$

тогда уравнение (1) можно переписать в операторной форме с учетом введённых обозначений:

$$x = \varpi(\mathbf{T}x + \Delta\mathbf{T}x) + f. \tag{8}$$

Известно, что $\mathbf{T}, \Delta\mathbf{T}: L_p(J) \to L_q(J)$ для всех $1 \le p \le q \le +\infty$ таких, что $1/s = 1 - 1/p + 1/q > 0$, причем

$$\|\mathbf{T}\|_{L_p(J) \to L_q(J)}, \|\Delta\mathbf{T}\|_{L_p(J) \to L_q(J)} \le E_s. \tag{9}$$

Кроме того, $\mathbf{T}, \Delta\mathbf{T}: L_p(J) \to C(\overline{J})$ для всех $1 \le p \le +\infty$, причем

$$\|\mathbf{T}\|_{L_p(J) \to C(\overline{J})}, \|\Delta\mathbf{T}\|_{L_p(J) \to C(\overline{J})} \le E_{\overline{p}}. \tag{10}$$

Учитывая введенное предположение – $\|K(t-\tau)\|_{L_1(R^+)}, \|\Delta K(t-\tau)\|_{L_1(R^+)} < \delta$ следует, что $\|\mathbf{T}\|_{L_p(J) \to L_p(J)}, \|\Delta\mathbf{T}\|_{L_p(J) \to L_p(J)} \le E_1,\ 1 \le p \le +\infty.$ Из последнего следует, что в силу принципа сжимающих отображений для всех $f \in L_p(J)$, $p \in [1, +\infty]$ уравнение (8) имеет единственное решение $x \in L_p(J)$, которое удовлетворяет оценке $\|x\|_{L_p(J)} \le \gamma_0 \|f\|_{L_p(J)}$. В противном случае, если $f \in C(\overline{J})$, то $x \in C(\overline{J})$ и справедлива оценка $\|x\|_{C(\overline{J})} \le \gamma_0 \|f\|_{C(\overline{J})}$.

Если $\mathbf{T}, \Delta\mathbf{T}: W_p^1(J) \to W_p^1(J)$ для всех $1 \le p \le q \le +\infty$, причем

$$\frac{d}{d\tau}\left(\mathbf{T}x(\tau)+\Delta\mathbf{T}x(\tau)\right)=\mathbf{T}\frac{d}{d\tau}x(\tau)+K(\tau)x(0)-K^*(\tau)x(T)+ \\ +\Delta\mathbf{T}\frac{d}{d\tau}x(\tau)+\Delta K(\tau)x(0)-\Delta K^*(\tau)x(T), \tag{11}$$

где $K^*(\tau)=K(T-\tau)$, $\Delta K^*(\tau)=\Delta K(T-\tau)$, из последнего

$$\left\|\frac{d}{d\tau}\mathbf{T}x\right\|_{L_q(J)}\le E_s\left\|\frac{d}{d\tau}x\right\|_{L_p(J)}+E_q\|x\|_{C(\bar{J})}. \tag{12}$$

Если $f\in W_p^1(J)$, $1\le p<+\infty$, то решение уравнения (8) принадлежит пространству $W_p^1(J)$, причем

$$\frac{d}{d\tau}x=\varpi\mathbf{T}\frac{d}{d\tau}x+\varpi Kx(0)-\varpi K^*x(T)+ \\ +\varpi\Delta\mathbf{T}\frac{d}{d\tau}x++\varpi\Delta Kx(0)-\varpi\Delta K^*x(T)+\frac{d}{d\tau}f, \tag{13}$$

из которого следует оценка

$$\left\|\frac{d}{d\tau}x\right\|_{L_p(J)}\le\gamma_0\left(\left\|\frac{d}{d\tau}f\right\|_{L_p(J)}+E_p\gamma_1\|f\|_{C(\bar{J})}\right). \tag{14}$$

Подводя итог, из приведенных оценок и равенства (13) можно заключить, что $\left|\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right|\to+\infty$, $\tau\to 0$ и при $\tau\to T$. Это приводит к тому, что решение уравнения (8) в точках $\tau=0$ и $\tau=T$ составляет одну из проблем численного решения подобного класса уравнений.

Пусть $B=L_p(J)$, $1\le p\le+\infty$ или $B=C(\bar{J})$, через P_l- обозначим линейный оператор, действующий из B в конечномерное пространство $B_l\subset B$, такой, что $\|P_l\|_{B\to B}\le 1$. Рассмотрим несколько методов проекционного типа решения уравнения (8) с возмущенным оператором, в котором приближенное решение $x_l\in B_l$, определяется в виде:

1. Первый метод – итерированный метод Галеркина (метод Слоана), решение определяется из операторного уравнения

$$\bar{x}_l=\varpi\left(\mathbf{T}x_l+\Delta\mathbf{T}x_l\right)+f, \tag{15}$$

в котором $\bar{x}_l$ определяется как решение операторного уравнения

$$x_l(t)\cong P_l[x_l]\equiv P_l\left[\varpi\left(\mathbf{T}x_l+\Delta\mathbf{T}x_l\right)\right]+P_l[f], \tag{16}$$

где P_l- оператор проектирования. Уравнение (16) – классический метод Галеркина. Учитывая, что $x_l=\varpi P_l\left(\mathbf{T}x_l+\Delta\mathbf{T}x_l\right)+P_l f=P_l\bar{x}_l$, то метод (15) можно заисать в виде

$$\bar{x}_l=\varpi\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)P_l\bar{x}_l+f. \tag{17}$$

Видно

$$\left\|\varpi\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)P_l\right\|_{B\to B}\le\varpi\left\|\mathbf{T}\right\|_{B\to B}\left\|\Delta\mathbf{T}\right\|_{B\to B}\left\|P_l\right\|_{B\to B}\le\varpi<1, \tag{18}$$

то оператор $\left(\mathbf{I}-\varpi\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)P_l\right):B\to B$, где $\mathbf{I}-$тождественный оператор, непрерывно обратим, причем справедлива оценка

$$\left\|\left(\mathbf{I}-\varpi\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)P_l\right)^{-1}\right\|_{B\to B}\le\gamma_0. \tag{19}$$

2. Второй метод – метод Канторовича. Базовым положением, данного метода является простая регуляризация, предложенная Канторовичем [33, 34]. Пусть x – решение уравнения (8), тогда $y=\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)x$ решение уравнения

$$y=\varpi\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)y+\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)f. \tag{20}$$

Видно, что

$$x=\varpi\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)y+f. \tag{21}$$

Пусть $\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)f\in B$. Тогда приближенное решение y_l уравнения (20) по методу Галеркина имеет вид

$$y_l=\varpi P_l\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)y_l+P_l\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)f, \tag{22}$$

а затем приближенное решение $\tilde{x}_l$ к решению x, вычисляется по формуле

$$\tilde{x}_l=\varpi\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)y_l+f. \tag{23}$$

Последний метод основан на аппроксимации функции $\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)f$, которая является более гладкой по отношению к x, в этом состоит его преимущество перед методом Галеркина.

Видно $\tilde{x}_l=\varpi P_l\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\left(\varpi y_l+f\right)+f=\varpi P_l\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\tilde{x}_l+f$ поэтому метод Канторовича можо переписать в виде

$$\tilde{x}_l=\varpi P_l\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\tilde{x}_l+f. \tag{24}$$

3. Третий метод – итерированный метод Канторовича. В этом методе приближенное решение $\hat{x}_l$ определяется из уравнений вида

$$\hat{x}_l=\varpi\bar{y}_l+f,$$
$$\bar{y}_l=\varpi\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)y_l+\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)f,$$

где y_l определяется из решения уравнения (22). Из последенего уравнения видно, что $y_l=P_l\bar{y}$. Откуда следует, что $\bar{y}_l$ можно рассматривать как приближенное решение уравнения (20) определенное итерированным методом Галеркина

$$\bar{y}_l=\varpi\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)P_l\bar{y}_l+\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)f.$$

Пусть $x-$решение задачи (2), x_l-приближенное решение, полученное на основе метода Галеркина решения операторного уравнения (2), введем следующее обозначение:

$$\varepsilon_l=x_l-x, \tag{25}$$

погрешность рассматриваемого метода, так же введем в рассмотрение следующие обозначения для погрешностей указанных методов:

$$\bar{\varepsilon}_l=\bar{x}_l-x,\ \tilde{\varepsilon}_l=\tilde{x}_l-x,\ \hat{\varepsilon}_l=\hat{x}_l-x.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Предположим, что $f \in B$, тогда

$$\left\|\varepsilon_l\right\|_B \le \gamma_0 \left\|\left(\mathbf{I} - P_l\right)x\right\|_B. \tag{26}$$

$$\left\|\bar{\varepsilon}_l\right\|_B \le \gamma_1 \left\|\left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{I} - P_l\right)x\right\|_B. \tag{27}$$

Пусть так же $\left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}\right) f \in B,$ в этом случае

$$\left\|\tilde{\varepsilon}_l\right\|_B \le \gamma_1 \left\|\left(\mathbf{I} - P_l\right)\left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}\right)x\right\|_B, \tag{28}$$

$$\left\|\hat{\varepsilon}_l\right\|_B \le \gamma_2 \left\|\left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{I} - P_l\right)\left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}\right)x\right\|_B. \tag{29}$$

Доказательство. Применим к операторному уравнению (8) оператор ортогонального проектирования P_l, получим

$$x_l\left(t\right) \cong P_l\left[x\right] \equiv \varpi P_l\left[\left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}\right)x\right] + P_l\left[f\right]. \tag{30}$$

Из равенства (15) вычтем равенство (20), имеем

$$\left(\mathbf{I} - \varpi P_l\left[\left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}\right)\right]\right)\varepsilon_l = -\left(\mathbf{I} - P_l\right)x, \tag{31}$$

Из последнего, с учетом (17), следует оценка (26). Вычитая (2) из (24), получим выражение

$$\left(\mathbf{I} - \varpi\left[\left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}\right)\right]P_l\right)\bar{\varepsilon}_l = -\varpi\left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{I} - P_l\right)x,$$

из которого, учитывая

$$\left\|\left(\mathbf{I} - \varpi\left[\left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}\right)\right]P_l\right)^{-1}\right\|_{B \to B} \le \gamma_0,$$

Следует оценка (27). Отметим, что

$$\tilde{\varepsilon}_l = \varpi\left(y_l - y\right),\ \hat{\varepsilon}_l = \varpi\left(\bar{y}_l - y\right),$$

где $y_l - y$ и $\bar{y}_l - y$ – погрешности метода Галеркина и итерированного метода Галеркина решения уравнения (20). Поэтому оценки (28) и (29) следуют из оценок (26) и (27) заменой на x на $y = \left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}\right)x.$

3. Метод проекционного типа решения операторного уравнения с возмущенным оператором: пространство финитных функций, оценки погрешностей

В данном параграфе рассматривается метод проекционного типа, использующего специальные финитные базисные функции, его применение к решению линейных операторных уравнений с возмущенным оператором в гильбертовых пространствах. В качестве базиса рассматривается два вида финитных функций: кусочно постоянные функции и кусочно линейные функции.

3.1. Метод проекционного типа решения операторного уравнения в пространстве кусочно постоянных функций.

Пусть на отрезке $J = \left[0, T\right] \subset R$, ведена произвольная неравномерная сетка J_h с узлами

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{n-1} < \tau_n = T, \tag{32}$$

положим $h_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $1 \le i \le n$, $h_{\max} = \max\limits_{1\le i\le n} h_i$, разбив тем самым $J = [0, T]$ на n подобластей $J_i = (\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i = 1,\dots,n$ (конечных элементов). Зададим на каждом (τ_{i-1}, τ_i) характеристическую функцию

$$\varphi_i^h(\tau) = \begin{cases} 0, \ \tau \notin (\tau_{i-1}, \tau_i), \\ 1, \ \tau \in (\tau_{i-1}, \tau_i). \end{cases} \qquad (33)$$

Набор таких функций $\{\varphi_i^h\}$ принимается в качестве базисных при решении задачи (15). Введем следующее обозначение: $\tilde{P}_h -$ оператор проектирования на пространство кусочно постоянных функций, через $\tilde{B}_h(J)$ обозначим пространство элементами которого являются кусочно-постоянные функции вида

$$f(\tau) = \sum_{j=1}^{n} f_{j-1/2}\varphi_{j-1/2}^h(\tau), \qquad (34)$$

где $\varphi_{j-1/2}^h(\tau) -$характеристическая функция носитель, принадлежащая интервалу $\varphi_{j-1/2}^h(\tau) \in (\tau_{j-1}, \tau_j)$. Оператор проектирования $\tilde{P}_h : L_p(J) \to \tilde{B}_h(J)$ определяется следующей формулой

$$(\tilde{P}_h\psi)(\tau) = \tilde{P}_h\psi_{i-1/2} = h_i^{-1}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \psi(t)\,dt, \quad \tau \in (\tau_{i-1}, \tau_i), \ \ 1 \le i \le n. \qquad (35)$$

Оператор $\tilde{P}_h$ является оператором ортогонального проектирования из $\tilde{P}_h : L_2(J) \to \tilde{B}_h(J)$.

Рассмотрим классический метод Галеркина, в котором приближенное решение $\psi_h \in \tilde{B}_h(J)$ является решение конечномерной задачи

$$\psi_h \cong P_h[\psi_h] \equiv P_h\left[\varpi\left(\mathbf{T}\psi_h + \Delta\mathbf{T}\psi_h\right)\right] + P_h[f]. \qquad (36)$$

В работе [28] оценки погрешностей получены при следующих предположениях:

$$\Delta\mathbf{T} \equiv 0, \qquad (37)$$

в этом случае операторное уравнение (15) примет вид

$$\psi_h \cong P_h[\psi_h] \equiv P_h[\varpi\mathbf{T}\psi_h] + P_h[f], \qquad (38)$$

и в предположении о свойстве ядра $K(t-\tau)$:

$$K(t-\tau) \in W_r^1(\delta, +\infty) \ \ \forall\delta > 0 \ \text{ и } \ r \in [1, +\infty), \qquad (39)$$

$$\frac{d}{d\tau}K(\tau) = o\left(\tau^{-1}K(\tau)\right), \ \tau \to 0. \qquad (40)$$

Из (39) следует, что $K \in C\left(R^+\right)$. Выражение (40) означает, что с учетом того, что производная определена лишь почти всюду на R^+, то

$$\alpha(\delta) = ess\ \sup_{\tau\in(0,\delta)} \left|\tau(d/d\tau)K(\tau)/K(\tau)\right| \to 0, \ \delta \to 0^+. \qquad (41)$$

Функция ядра $K \in L_r(R)$, $r[1,+\infty)$, то на основании [28], $K(\tau) = o\left(\tau^{-\varepsilon}\right)$, при $\tau \to 0^+$, $\forall \varepsilon > 0$. Из предположения (39), так же следует, что

$$\int_0^\delta K^r(\tau)\,d\tau \sim \delta K^r(\delta),\ \delta \to 0^+,\ \forall r \geq 1. \tag{42}$$

В самом деле, интегрируя по частям, получим:

$$\int_0^\delta K^r(\tau)\,d\tau \sim \delta K^r(\delta) - r\int_0^\delta \tau K^{r-1}(\tau)\frac{d}{d\tau}K(\tau)\,d\tau \leq \delta K^r(\delta) + r\alpha(\delta)\int_0^\delta K^r(\tau)\,d\tau. \tag{43}$$

Откуда следует

$$\delta K^r(\delta) \leq \int_0^\delta K^r(\tau)\,d\tau \leq \frac{1}{1+r\alpha(\delta)}\delta K^r(\delta), \tag{44}$$

что подтверждает свойство (42). Откажемся от предположений (39) и (40), будем предполагать выполнение следующих свойств ядра K уравнения (1):

1). K является функцией заданной на $K \in R^+$.

2). $K \in L_r\left(R^+\right)$, $\forall r[1,+\infty)$; кроме того $\|K\|_{L_1\left(R^+\right)}$ – ограничена.

3). $\forall r \geq 1$ справедливо свойство (42).

Введем интегральный модуль непрерывности ядра K

$$\omega_r(K,\eta) = \sup_{0\leq\delta\leq\eta}\left\|K(\cdot+\delta) + \Delta K(\cdot+\delta) - K(\cdot) - \Delta K(\cdot)\right\|_{L_r(R)},\ 1 \leq r < \infty. \tag{45}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Пусть выполнены предположения 1) – 3), тогда справедливы оценки

$$\omega_r(K,\eta) \leq 2^{1/r}\|K + \Delta K\|_{L_r(0,\eta/2)}, \tag{46}$$

$$\omega_r(K,\eta) \leq \eta^{1/r}\left(K(\eta/2) + \Delta K(\eta/2)\right)\left(1 + o(1)\right),\ \eta \to 0^+. \tag{47}$$

Доказательство. Рассмотрим выражение (45)

$$\left\|K(\cdot+\delta) + \Delta K(\cdot+\delta) - K(\cdot) - \Delta K(\cdot)\right\|^r_{L_r(R)} =$$

$$= \int_0^\infty \left|K(\tau+\delta/2) + \Delta K(\tau+\delta/2) - K(\tau-\delta/2) - \Delta K(\tau-\delta/2)\right|^r d\tau =$$

$$= \int_0^{\delta/2}\left[K(\delta/2-\tau) + \Delta K(\delta/2-\tau) - K(\tau+\delta/2) - \Delta K(\tau+\delta/2)\right]^r d\tau +$$

$$+ \int_{\delta/2}^\infty \left[K(\tau-\delta/2) + \Delta K(\tau-\delta/2) - K(\tau+\delta/2) - \Delta K(\tau+\delta/2)\right]^r d\tau.$$

Из теории неравенств известно:

$$(a-b)^r \leq a^r - b^r, \tag{48}$$

которое справедливо для всех $0 \leq b \leq a$, получим

$$\left\|K(\cdot+\delta)+\Delta K(\cdot+\delta)-K(\cdot)-\Delta K(\cdot)\right\|_{L_r(R)}^r \le$$

$$\le \int_0^{\delta/2}\left(K(\delta/2-\tau)+\Delta K(\delta/2-\tau)\right)^r d\tau-\int_0^{\delta/2}\left(K(\tau+\delta/2)+\Delta K(\tau+\delta/2)\right)^r d\tau+$$

$$+\int_{\delta/2}^{\infty}\left(K(\tau)+\Delta K(\tau)\right)^r d\tau-\int_{\delta/2}^{\infty}\left(K(\tau+\delta)+\Delta K(\tau+\delta)\right)^r d\tau=$$

$$=\int_0^{\delta/2}\left(K(\tau)+\Delta K(\tau)\right)^r d\tau-\int_{\delta/2}^{\delta}\left(K(\tau)+\Delta K(\tau)\right)^r d\tau+\int_0^{\delta}\left(K(\tau)+\Delta K(\tau)\right)^r d\tau=$$

$$=2\int_0^{\delta/2}\left(K(\tau)+\Delta K(\tau)\right)^r d\tau.$$

Из последнего следует

$$\omega_r(K,\eta)=\sup_{0\le\delta\le\eta}\left\|K(\cdot+\delta)+\Delta K(\cdot+\delta)-K(\cdot)-\Delta K(\cdot)\right\|_{L_r(R)}\le 2^{1/r}\left\|K+\Delta K\right\|_{L_r(0,\eta/2)}.$$

При выполнении свойства 3), справедливо

$$\left\|K+\Delta K\right\|_{L_r(0,\eta/2)} \sim (\eta/2)^{1/r}\left(K(\eta/2)+\Delta K(\eta/2)\right),\ \eta\to 0.$$

Следовательно, справедлива оценка (37). Лемма доказана.

Введем следующее обозначение

$$\widehat{\omega}_r(K,\Delta K,J_h)=\sup_{0<t<T}\omega_r\left(K(\cdot-t)+\Delta K(\cdot-t);J_h\right),$$

$$\omega_r\left(K(\cdot-t)+\Delta K(\cdot-t);J_h\right)=$$

$$=\left[\sum_{i=1}^n h_i^{-1}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|K(\tau-t)+\Delta K(\tau-t)-K(\overline{\tau}-t)-\Delta K(\overline{\tau}-t)\right|^r d\overline{\tau}d\tau\right]^{1/r}$$

Справедлива лемма.

Лемма 3. Пусть выполнены условия 1) и 2) тогда справедлива оценка

$$\widehat{\omega}_r(K,\Delta K,J_h)\le 8^{1/r}\left\|K(\cdot-t)+\Delta K(\cdot-t)\right\|_{L_r(0,h_{\max}/2)}. \tag{49}$$

Пусть так же справедливы предположения 1)-3), тогда справедлива оценка

$$\widehat{\omega}_r(K,\Delta K,J_h)\le 4^{1/r}h_{\max}^{1/r}\left(K(h_{\max}/2)+\Delta K(h_{\max}/2)\right)\left(1+o(1)\right),\ h_{\max}\to 0. \tag{50}$$

Доказательство. Введем разбиение отрезка $J=[0,T]\subset R$ и положим $t\in[0,T]$, $t_i=\tau_i-t$, причем $t_i-t_{i-1}=h_i$, $0\le i\le n$, тогда

$$\omega_r\left(K(\cdot-t),\Delta K(\cdot-t),J_h\right)^r=\sum_{i=1}^n \mathrm{Int}_i^h(t),.$$

где

$$\mathrm{Int}_i^h(t) = h_i^{-1} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \left| K(\tau) + \Delta K(\tau) - K(\overline{\tau}) - \Delta K(\overline{\tau}) \right|^r d\tau d\overline{\tau}.$$

Введем следующее обозначение: l, j – минимальное и максимальное из тех значений i, для которых справедливо $[t_{i-1}, t_i] \cap (-h_{\max}/2, h_{\max}/2)$. Тогда

$$\omega_r\left(K(\cdot - t), \Delta K(\cdot - t), J_h\right)^r = \sum_{i=1}^{l-1} \mathrm{Int}_i^h(t) + \sum_{i=l}^{j} \mathrm{Int}_i^h(t) + \sum_{i=j+1}^{n} \mathrm{Int}_i^h(t).$$

Пусть $j+1 \le i \le n.$ Тогда учитывая монотонность ядра $K(\cdot - t)$ и неравенство (48), получим

$$\mathrm{Int}_i^h(t) \le h_i \left(K(t_{i-1}) - K(t_i) + \Delta K(t_{i-1}) - \Delta K(t_i) \right)^r \le$$
$$\le h_{\max} \left[\left(K(t_{i-1}) + \Delta K(t_{i-1}) \right)^r - \left(K(t_i) + \Delta K(t_i) \right)^r \right].$$

Откуда

$$\sum_{i=j+1}^{n} \mathrm{Int}_i^h(t) \le h_{\max} \sum_{i=j+1}^{n} \left[\left(K(t_{i-1}) + \Delta K(t_{i-1}) \right)^r - \left(K(t_i) + \Delta K(t_i) \right)^r \right] \le$$
$$\le h_{\max} \left(K(t_j) + \Delta K(t_j) \right)^r. \tag{51}$$

Аналогично

$$\sum_{i=1}^{l-1} \mathrm{Int}_i^h(t) \le h_{\max} \left(K(t_{l-1}) + \Delta K(t_{l-1}) \right)^r. \tag{52}$$

Выберем значение i таково, что интервалы $[t_{i-1}, t_i]$ и $(-h_{\max}/2, h_{\max}/2)$ пересекаются: $[t_{i-1}, t_i] \cap (-h_{\max}/2, h_{\max}/2)$. Если $[t_{i-1}, t_i] \subset (-h_{\max}/2, h_{\max}/2)$, то

$$\mathrm{Int}_i^h(t) \le h_i^{-1} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\left(K(\tau) + \Delta K(\tau) \right)^r + \left(K(\overline{\tau}) + \Delta K(\overline{\tau}) \right)^r \right] d\tau d\overline{\tau} =$$
$$= 2 \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \left(K(\tau) + \Delta K(\tau) \right)^r d\tau.$$

При условии равенства значений $i = j$ справедливо $-h_{\max}/2 < t_{j-1} < h_{\max}/2 < t_j$, то

$$\mathrm{Int}_j^h(t) \le h_j^{-1} \left\{ \int\limits_{t_{j-1}}^{h_{\max}/2} \int\limits_{t_{j-1}}^{h_{\max}/2} \left[\left(K(\tau) + \Delta K(\tau) \right) - \left(K(\overline{\tau}) + \Delta K(\overline{\tau}) \right) \right]^r d\tau d\overline{\tau} + \right.$$
$$+ 2 \int\limits_{t_{j-1}}^{h_{\max}/2} \left(\int\limits_{h_{\max}/2}^{t_j} \left(K(\tau) + \Delta K(\tau) - K(\overline{\tau}) - \Delta K(\overline{\tau}) \right)^r d\overline{\tau} \right) d\tau +$$
$$\left. + \int\limits_{h_{\max}/2}^{t_j} \int\limits_{h_{\max}/2}^{t_j} \left[\left(K(\tau) + \Delta K(\tau) \right) - \left(K(\overline{\tau}) + \Delta K(\overline{\tau}) \right) \right]^r d\tau d\overline{\tau} \right\} \le$$

$$\le h_j^{-1}\left\{\int_{t_{j-1}}^{h_{\max}/2}\int_{t_{j-1}}^{h_{\max}/2}\left[\left(K(\tau)+\Delta K(\tau)\right)^r+\left(K(\overline{\tau})+\Delta K(\overline{\tau})\right)^r\right]d\tau d\overline{\tau}+\right.$$

$$+2\int_{t_{j-1}}^{h_{\max}/2}\left(\int_{h_{\max}/2}^{t_j}\left(\left(K(\tau)+\Delta K(\tau)\right)^r-\left(K(t_j)-\Delta K(t_j)\right)^r\right)d\overline{\tau}\right)d\tau+$$

$$\left.+\int_{h_{\max}/2}^{t_j}\int_{h_{\max}/2}^{t_j}\left[\left(K(h_{\max}/2)+\Delta K(h_{\max}/2)\right)^r-\left(K(t_j)+\Delta K(t_j)\right)^r\right]d\tau d\overline{\tau}\right\}=$$

$$=h_j^{-1}\left\{2\left(h_{\max}/2-t_{j-1}\right)\int_{t_{j-1}}^{h_{\max}/2}\left(K(\tau)+\Delta K(\tau)\right)^r d\tau+\right.$$

$$+2\left(t_j-h_{\max}/2\right)\int_{t_{j-1}}^{h_{\max}/2}\left[\left(K(\tau)+\Delta K(\tau)\right)^r-\left(K(t_j)+\Delta K(t_j)\right)^r\right]d\tau+$$

$$\left.+2\left(t_j-h_{\max}/2\right)^2\left[\left(K(h_{\max}/2)+\Delta K(h_{\max}/2)\right)^r-\left(K(t_j)+\Delta K(t_j)\right)^r\right]\right\}\le$$

$$=2\int_{t_{j-1}}^{h_{\max}/2}\left(K(\tau)+\Delta K(\tau)\right)^r d\tau+$$

$$+h_{\max}\left[\left(K(h_{\max}/2)+\Delta K(h_{\max}/2)\right)^r-\left(K(t_j)+\Delta K(t_j)\right)^r\right].$$

Аналогично

$$\mathrm{Int}_l^h(t)\le 2\int_{-h_{\max}/2}^{\tau_l}\left(K(\tau)+\Delta K(\tau)\right)^r d\tau+$$

$$+h_{\max}\left[\left(K(h_{\max}/2)+\Delta K(h_{\max}/2)\right)^r-\left(K(t_l)+\Delta K(t_l)\right)^r\right].$$

В итоге

$$\sum_{i=l}^{j}\mathrm{Int}_i^h(t)\le 2\int_{-h_{\max}/2}^{h_{\max}/2}\left(K(\tau)+\Delta K(\tau)\right)^r d\tau+$$

$$+h_{\max}\left[\left(K(h_{\max}/2)+\Delta K(h_{\max}/2)\right)^r-\left(K(t_l)+\Delta K(t_l)\right)^r\right]+ \tag{53}$$

$$+h_{\max}\left[\left(K(h_{\max}/2)+\Delta K(h_{\max}/2)\right)^r-\left(K(t_j)+\Delta K(t_j)\right)^r\right].$$

Складывая оценки (51) – (53), получим неравенство

$$\widehat{\omega}_r\left(K,\Delta K,J_h\right)=\sup_{0<t<T}\omega_r\left(K(\cdot-t)+\Delta K(\cdot-t);J_h\right)\le$$

$$\le\left[4\int_0^{h_{\max}/2}\left(K(\tau)+\Delta K(\tau)\right)^r d\tau+2h_{\max}\left(K\left(h_{\max}/2\right)+\Delta K\left(h_{\max}/2\right)\right)^r\right]^{1/r}.$$

С учетом того, что

$$2h_{\max}\left(K\left(h_{\max}/2\right)+\Delta K\left(h_{\max}/2\right)\right)^r\le 4\int_0^{h_{\max}/2}\left(K(\tau)+\Delta K(\tau)\right)d\tau,$$

приходим к оценке (49).

При выполнении условия 3) имеем

$$\left\|K+\Delta K\right\|_{L_r(0,h_{\max}/2)}\sim\left(h_{\max}/2\right)^{1/r}\left(K\left(h_{\max}/2\right)+\Delta K\left(h_{\max}/2\right)\right),\quad h_{\max}\to 0. \tag{54}$$

Последнее подтверждает оценку (40). Лемма доказана.

Лемма 4. Для $\forall r\ge 1$ справедлива оценка

$$\left\|\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)\left(K+\Delta K\right)\right\|_{L_r(J)}\le 4^{1/r}\left\|\left(K+\Delta K\right)\right\|_{L_r(0,h_{\max}/2)}, \tag{55}$$

при выполнении свойства (54), оценка

$$\begin{gathered}\left\|\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)\left(K+\Delta K\right)\right\|_{L_r(J)}\le\\ \le 2^{1/r}h_{\max}^{1/r}\left(K\left(h_{\max}/2\right)+\Delta K\left(h_{\max}/2\right)\right)\left(1+o(1)\right),\quad h_{\max}\to 0.\end{gathered} \tag{56}$$

Доказательство. Справедливо

$$\left\|\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)\left(K+\Delta K\right)\right\|_{L_r(J)}\le\omega_r\left(K,\Delta K;J_h\right)^r=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Int}_i^h,$$

где

$$\mathrm{Int}_i^h(t)=h_i^{-1}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|K(\tau)+\Delta K(\tau)-K(\overline{\tau})-\Delta K(\overline{\tau})\right|^r d\tau d\overline{\tau}.$$

Пусть $j=\max i$ для которых справедливо, что интервалы $\left[t_{i-1},t_i\right]$ и $\left(0,h_{\max}/2\right)$ пересекаются: $\left[t_{i-1},t_i\right]\cap\left(0,h_{\max}/2\right)$. Тогда по аналогии с доказательством леммы 3, получим

$$\begin{gathered}\left\|\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)\left(K+\Delta K\right)\right\|_{L_r(J)}^r\le\sum_{i=1}^{j}\mathrm{Int}_i^h+\sum_{i=j+1}^{n}\mathrm{Int}_i^h\le\\ \le 2\int_0^{h_{\max}/2}\left(K(\tau)+\Delta K(\tau)\right)^r d\tau+h_{\max}/2\left(K\left(h_{\max}/2\right)+\Delta K\left(h_{\max}/2\right)\right)^r\le\\ \le 4\int_0^{h_{\max}/2}\left(K(\tau)+\Delta K(\tau)\right)^r d\tau.\end{gathered} \tag{57}$$

Из последнего следует оценка (55). Оценка (56) доказывается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 5. При выполнении предположений 1), 2) и справедливости неравенств $1 \le p \le q \le \infty$, $1/s = 1 - 1/p + 1/q > 0$, справедливы оценки

$$\left\| \left(\mathbf{I} - \tilde{P}_h \right) \left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T} \right) \right\|_{L_p(J) \to L_q(J)} \le 2^{1/s + 1/q} \left\| \left(K + \Delta K \right) \right\|_{L_s(0, h_{\max}/2)}, \tag{58}$$

$$\left\| \left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T} \right) \left(\mathbf{I} - \tilde{P}_h \right) \right\|_{L_p(J) \to L_q(J)} \le 2^{3/s - 1/q} \left\| \left(K + \Delta K \right) \right\|_{L_s(0, h_{\max}/2)}, \tag{59}$$

$$\left\| \left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T} \right) \left(\mathbf{I} - \tilde{P}_h \right) \left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T} \right) \right\|_{L_p(J) \to L_q(J)} \le 2^{2 + 3/s} \left\| \left(K + \Delta K \right) \right\|^2_{L_r(0, h_{\max}/2)}, \tag{60}$$

где $r = 2(1 + 1/s)^{-1} \in [1, 2]$, оценка (60) верна при $p = 1, q = \infty$. При выполнении предположении 1) – 3) справедливы оценки

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\mathbf{I} - \tilde{P}_h \right) \left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T} \right) \right\|_{L_p(J) \to L_q(J)} \le \\ &\le 2^{1/s + 1/q} h_{\max}^{1/s} \left(K\left(h_{\max}/2 \right) + \Delta K\left(h_{\max}/2 \right) \right) \left(1 + o(1) \right), \ h_{\max} \to 0, \end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T} \right) \left(\mathbf{I} - \tilde{P}_h \right) \right\|_{L_p(J) \to L_q(J)} \le \\ &\le 2^{1/s - 1/q} h_{\max}^{1/s} \left(K\left(h_{\max}/2 \right) + \Delta K\left(h_{\max}/2 \right) \right) \left(1 + o(1) \right), \ h_{\max} \to 0, \end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T} \right) \left(\mathbf{I} - \tilde{P}_h \right) \left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T} \right) \right\|_{L_p(J) \to L_q(J)} \le \\ &\le 2^{1 + 2/s} h_{\max}^{1 + 1/s} \left(K\left(h_{\max}/2 \right) + \Delta K\left(h_{\max}/2 \right) \right)^2 \left(1 + o(1) \right), \ h_{\max} \to 0. \end{aligned} \tag{63}$$

Доказательство. Пусть для правой части уравнения (1) выполняется условие $f \in L_p(J)$, $1 \le p < \infty$. При $\tau \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$ имеем

$$\begin{aligned} &\left| \left(\mathbf{I} - \tilde{P}_h \right) \left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T} \right) f(\tau) \right|^p = \\ &= \left| \int_0^T \left[K(\tau - t) + \Delta K(\tau - t) - h_i^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left(K(\overline{\tau} - t) + \Delta K(\overline{\tau} - t) \right) d\overline{\tau} \right] f(t) dt \right|^p = \\ &\le \left| \int_0^T h_i^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left[K(\tau - t) + \Delta K(\tau - t) - K(\overline{\tau} - t) - \Delta K(\overline{\tau} - t) \right] d\overline{\tau} f(t) dt \right|^p \le \\ &\le \left| \int_0^T \left(h_i^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left| K(\tau - t) + \Delta K(\tau - t) - K(\overline{\tau} - t) - \Delta K(\overline{\tau} - t) \right|^s d\overline{\tau} \right)^{1/s} \left| f(t) \right| dt \right|^p \le \\ &\le \left| \int_0^T \left[h_i^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left| K(\tau - t) + \Delta K(\tau - t) - K(\overline{\tau} - t) - \Delta K(\overline{\tau} - t) \right| d\overline{\tau} dt \right]^{p-1} \right. \times \end{aligned} \tag{64}$$

$$\times\int_0^T\left[h_i^{-1}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|K(\tau-t)+\Delta K(\tau-t)-K(\overline{\tau}-t)-\Delta K(\overline{\tau}-t)\right|^s d\overline{\tau}\right]^{p/q}\left|f(t)\right|^p dt\le$$

$$\le\omega_s(K,\Delta K,h_{\max})^{s(p-1)}\times$$

$$\times\left\{\int_0^T\left[h_i^{-1}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|K(\tau-t)+\Delta K(\tau-t)-K(\overline{\tau}-t)-\Delta K(\overline{\tau}-t)\right|^s d\overline{\tau}\right]^{p/q}\left|f(t)\right|^p dt\right\}.$$

Применяя к (64) обобщенное неравенство Минковского, получим

$$\left\|\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})f\right\|_{L_q(J)}^p=\left\|\left|\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})f\right|^p\right\|_{L_{q/p}(J)}\le$$

$$\le\omega_s(K,\Delta K,h_{\max})^{s(p-1)}\times$$

$$\times\int_0^T\left[\sum_{i=0}^n h_i^{-1}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left|K(\tau-t)+\Delta K(\tau-t)-K(\overline{\tau}-t)-\Delta K(\overline{\tau}-t)\right|^s d\overline{\tau}d\tau\right]^{p/q}\left|f(t)\right|^p dt\le$$

$$\le\omega_s(K,\Delta K,h_{\max})^{s(p-1)}\,\widehat{\omega}_s(K,\Delta K,J_h)^{sp/q}\left\|f\right\|_{L_q(J)}^p.$$

Из последнего неравенства при $1\le p<\infty$ следует оценка

$$\left\|\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})\right\|_{L_p(J)\to L_q(J)}^p\le\omega_s(K,\Delta K,h_{\max})^{1-s/q}\,\widehat{\omega}_s(K,\Delta K,J_h)^{s/q}. \tag{65}$$

При $p=q=\infty$, $\tau\in(\tau_{i-1},\tau_i)$ справедлива оценка

$$\left|\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})f(\tau)\right|\le$$

$$\le h_i^{-1}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left[\int_0^T\left|K(\tau-t)+\Delta K(\tau-t)-K(\overline{\tau}-t)-\Delta K(\overline{\tau}-t)\right|dt\right]d\overline{\tau}\left\|f\right\|_{L_\infty(J)}\le$$

$$\le\omega_1(K,\Delta K,h_{\max})\left\|f\right\|_{L_\infty(J)},$$

откуда следует

$$\left\|\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})f\right\|_{L_\infty(J)}\le\omega_1(K,\Delta K,h_{\max})\left\|f\right\|_{L_\infty(J)}.$$

Применяя неравенства (46) и (49) к оценке правой части неравенства (65), приходим к оценке (58).

Учитывая, что $(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)$ сопряженный оператор к оператору $\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})$, с учетом $1/s=1-1/\overline{p}+1/\overline{q}$, $s/q=1-s/\overline{p}$, имеем

$$\left\|(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)\right\|_{L_p(J)\to L_q(J)}=\left\|\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})\right\|_{L_{\overline{q}}(J)\to L_{\overline{p}}(J)}\le$$

$$\le\omega_s(K,\Delta K,h_{\max})^{s/q}\,\widehat{\omega}_s(K,\Delta K,J_h)^{1-s/q}\le 2^{3/s-1/q}\left\|(K+\Delta K)\right\|_{L_s(0,h_{\max}/2)}.$$

Пусть μ удовлетворяет условию $2/\mu = 1/p + 1/q$. Учитывая, что $\mathbf{I} - \tilde{P}_h = \left(\mathbf{I} - \tilde{P}_h\right)^2$, получим

$$\left\|\left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{I} - \tilde{P}_h\right)\left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}\right)\right\|_{L_p(J)\to L_q(J)} =$$
$$= \left\|\left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{I} - \tilde{P}_h\right)\left(\mathbf{I} - \tilde{P}_h\right)\left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}\right)\right\|_{L_p(J)\to L_q(J)} \le$$
$$\le \left\|\left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{I} - \tilde{P}_h\right)\right\|_{L_\mu(J)\to L_q(J)} \left\|\left(\mathbf{I} - \tilde{P}_h\right)\left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}\right)\right\|_{L_p(J)\to L_\mu(J)} \le$$
$$\le \omega_r\left(K, \Delta K, h_{\max}\right)^{1-r/q} \widehat{\omega}_s\left(K, \Delta K, J_h\right)^{r/q} \omega_r\left(K, \Delta K, h_{\max}\right)^{r/\mu} \widehat{\omega}_s\left(K, \Delta K, J_h\right)^{1-r/\mu} =$$
$$= \omega_r\left(K, \Delta K, h_{\max}\right)^{r} \widehat{\omega}_r\left(K, \Delta K, J_h\right)^{2-r} \le 2^{2+3/s} \left\|\left(K + \Delta K\right)\right\|_{L_r(0, h_{\max}/2)}.$$

Оценки (61) – (63) следуют из оценок (58) – (60) с учетом свойства (65). Лемма доказана.

3.2. Метод проекционного типа решения операторного уравнения в пространстве кусочно линейных функций, на основе усредняющего оператора

Введем на $J = [0, T] \subset R$ сетку $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{l-1} < \tau_l = T$, $h_{i+1/2} = \left(h_i + h_{i-1}\right)/2$, $h = \max h_i$, $i = 1, \ldots, n$ считая $h_0 = 0, h_{n+1} = 0$ и поставим в соответствие каждому узлу сетки функцию

$$\overline{\varphi}_i^h(\tau) = \begin{cases} \left(\tau_i - \tau_{i-1}\right)/h_i, \ \tau \in \left(\tau_{i-1}, \tau_i\right), \\ \left(\tau_{i+1} - \tau_i\right)/h_i, \ \tau \in \left(\tau_i, \tau_{i+1}\right), i = 1, \ldots, n-1; \\ 0, \qquad \tau \notin \left(\tau_{i-1}, \tau_{i+1}\right), \end{cases} \tag{66}$$

$$\overline{\varphi}_0^h(\tau) = \begin{cases} \left(\tau_1 - \tau\right)/h_1, \ t \in \left(\tau_0, \tau_1\right), \\ 0, \qquad \tau \notin \left(\tau_0, \tau_1\right), \end{cases} \quad \overline{\varphi}_n^h(\tau) = \begin{cases} \left(\tau_n - \tau_{n-1}\right)/h_n, \ t \in \left(t_{n-1}, t_n\right), \\ 0, \qquad t \notin \left(t_{n-1}, t_n\right). \end{cases}$$

Очевидно, что эти функции линейно независимы и каждая из них отлична от нуля лишь в интервале длиной порядка $2h$. Линейную оболочку $\left\{\overline{\varphi}_i^h\right\}$ обозначим через $H_n = \operatorname{span}\left\langle \overline{\varphi}_0^h \quad \overline{\varphi}_1^h \quad \ldots \quad \overline{\varphi}_n^h \right\rangle$. Функции H_n являются непрерывными кусочно линейными функциями, обладающими суммируемой с любой конечной степенью первой производной.

Через $\overline{B}_h(J)$ обозначим пространство кусочно линейных функций, элементами которого являются функции вида (66). Определим оператор $\overline{\sigma}_h$, такой что $\overline{\sigma}_h : L_p(J) \to \overline{B}_h(J)$, где $1 \le p \le \infty$, тогда справедливо

$$\left(\overline{\sigma}_h f\right)(\tau) = \sum_{i=0}^{n} \overline{\sigma}_h f\left(\tau_i\right) \overline{\varphi}_i^h(\tau) \in H_n, \ \tau \in \overline{J}, \tag{67}$$

где $\overline{\varphi}_i^h(\tau)$ – кусочно линейные функции, причем $\overline{\sigma}_h f(\tau_i) = h_{i+1/2}^{-1}\left(f, \overline{\varphi}_i^h\right)$. Видно, что оператор $\overline{\sigma}_h$ не является оператором проектирования, но $\operatorname{Im}\overline{\sigma}_h = \overline{B}_h\left(\overline{J}\right)$ и $\left\|\overline{\sigma}_h\right\|_{L_p(J)\to L_p(J)} = 1,\ \forall p \in [1, \infty]$. Введем обозначения, для $f \in L_p(J)$ имеем

$$\omega_p(f, J) = \begin{cases} \left[\sum\limits_{i=0}^{n} h_{i+1/2}^{-1} \int\limits_{J_i}\int\limits_{J_i} \left|f(\tau') - f(\tau)\right|^p \overline{\varphi}_i^h(\tau')\overline{\varphi}_i^h(\tau)\, d\tau' d\tau\right]^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1\le i\le n} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\tau',\tau\in J_i^h} \left|f(\tau') - f(\tau)\right|, & p = \infty, \end{cases} \tag{68}$$

где $J_i = (\tau_{i-1}, \tau_{i+1})$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 6. Пусть $f \in L_p(J),\ 1 \le p \le \infty$, тогда справедливы оценки

$$\left\|\left(\mathbf{I} - \overline{\sigma}_h\right) f\right\|_{L_p(J)} \le \omega_p(f, J). \tag{69}$$

Доказательство. Видно, что

$$\left(\mathbf{I} - \overline{\sigma}_h\right) f(\tau) = f(\tau) - \sum_{i=0}^{n} h_{i+1/2}^{-1}\left(f, \overline{\varphi}_i^h\right)\overline{\varphi}_i^h(\tau) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} h_{i+1/2}^{-1} \int\limits_{J_i} \left(f(\tau) - f(\tau')\right)\overline{\varphi}_i^h(\tau')\overline{\varphi}_i^h(\tau). \tag{70}$$

Поэтому при $1 \le p \le \infty$ справедливо следующее неравенство

$$\left|\left(\mathbf{I} - \overline{\sigma}_h\right) f(\tau)\right|^p \le$$

$$\le \left[\sum_{i=0}^{n} h_{i+1/2}^{-1} \int\limits_{J_i} \left|f(\tau) - f(\tau')\right|^p \overline{\varphi}_i^h(\tau')\overline{\varphi}_i^h(\tau)\right]\left[\sum_{i=0}^{n} h_{i+1/2}^{-1} \int\limits_{J_i} \overline{\varphi}_i^h(\tau')\, d\tau' \overline{\varphi}_i^h(\tau)\right]^{p-1}. \tag{71}$$

Причем

$$\sum_{i=0}^{n} h_{i+1/2}^{-1} \int\limits_{J_i} \overline{\varphi}_i^h(\tau')\, d\tau' \overline{\varphi}_i^h(\tau) = \sum_{i=0}^{n} \overline{\varphi}_i^h(\tau) = 1. \tag{72}$$

Интегрируя неравенство (71), с учетом (72) приходим к оценке (69).

Предположим теперь, что $f \in L_\infty(J)$. Тогда, справедлива оценка

$$\left\|\left(\mathbf{I} - \overline{\sigma}_h\right) f\right\|_{L_p(J)} \le \omega_p(f, J) \le$$

$$\le \left[\sum_{i=0}^{n} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\tau',\tau\in J_i} \left|f(\tau) - f(\tau')\right|^p h_{i+1/2}\right]^{1/p} \le \omega_\infty(f, J)\tau^{1/p}. \tag{73}$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве при $p \to \infty$, прийдем к оценке (69) с $p = \infty$. Лемма доказана.

Из приведенной леммы следует следствие.

Следствие 1. Пусть $f \in L_p(J)$, $1 \le p \le \infty$, тогда

$$\left\|(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h) f\right\|_{L_p(J)} \to 0 \ \ if \ \ h_{\max} \to 0. \tag{74}$$

Доказательство. Известно, что пространство $\tilde{N}(\overline{J})$ всюду плотно в $L_p(J)$, то для $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, f_\varepsilon \in C(\overline{J})$, такое, что выполнено неравенство $\|f - f_\varepsilon\|_{L_p(J)} < \varepsilon.$ Следовательно

$$\left\|(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h) f\right\|_{L_p(J)} \le \left\|(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h)(f - f_\varepsilon)\right\|_{L_p(J)} +$$
$$+\left\|(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h) f_\varepsilon\right\|_{L_p(J)} < 2\varepsilon + \omega_\infty(f, J)\tau^{1/p}.$$

Откуда

$$\lim_{h_{\max}\to 0}\left\|(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h) f\right\|_{L_p(J)} \le 2\varepsilon.$$

Следствие доказано.

Теперь, пусть $1 \le r < \infty$, введем следующее обозначение

$$\widehat{\omega}_r(K, \Delta K, J) = \sup_{t\in J}\left[\sum_{i=0}^{n} h_{i+1/2}\int_{J_i}\int_{J_i}\left|K(\tau'-t)+\Delta K(\tau'-t)-K(\tau-t)-\Delta K(\tau-t)\right|^r \times\right.$$
$$\left.\times\overline{\varphi}_i^h(\tau')\overline{\varphi}_i^h(\tau)\,d\tau' d\tau\right]^{1/r}. \tag{75}$$

Справедлива лемма.

Лемма 7. Справедлива оценка

$$\widehat{\omega}_r(K, \Delta K, J) = 2^{4/r} h_{\max}^{1/r}(K+\Delta K)(h_{\max}/2)(1+o(1)) \ \ if \ \ h_{\max} \to 0. \tag{76}$$

Доказательство. Пусть

$$Int_i^h(t) =$$
$$= h_{i+1/2}^{-1}\int_{J_i}\int_{J_i}\left|K(\tau'-t)+\Delta K(\tau'-t)-K(\tau-t)-\Delta K(\tau-t)\right|^r\overline{\varphi}_i^h(\tau')\overline{\varphi}_i^h(\tau)\,d\tau' d\tau$$

тогда $\widehat{\omega}_r(K, \Delta K, J)$ можно представить в виде

$$\widehat{\omega}_r(K, \Delta K, J) = \sup_{t\in J}\left[\sum_{t}^{l} Int_i^h(t) + \sum_{t}^{m} Int_i^h(t) + \sum_{t}^{k} Int_i^h(t)\right]^{1/r}.$$

В последней формуле знак $\sum\limits_{t}^{l} Int_i^h(t)$ следует понимать так: суммирование ведется по тем индексам i, для которых $|t-\tau_i| \le 3h_{\max}/2$, $\sum\limits_{t}^{m} Int_i^h(t)-$ суммирование ведется по тем индексам i, для которых $t > \tau_i + 3h_{\max}/2$, $\sum\limits_{t}^{k} Int_i^h(t)-$ суммирование ведется по тем индексам i, для которых $t < \tau_i - 3h_{\max}/2$.

Рассмотрим первый случай $\left|t-\tau_i\right|\le 3h_{\max}/2$, имеем

$$Int_i^h(t)\le h_{i+1/2}^{-1}\int\limits_{J_i}\int\limits_{J_i}\Big[\big(K(\tau'-t)+\Delta K(\tau'-t)\big)^r+$$

$$+\big(K(\tau-t)+\Delta K(\tau-t)\big)^r\Big]\overline{\varphi}_i^h(\tau')\overline{\varphi}_i^h(\tau)\,d\tau' d\tau=$$

$$=\int\limits_{J_i}\big(K(\tau'-t)+\Delta K(\tau'-t)\big)^r\,\overline{\varphi}_i^h(\tau')\,d\tau'+$$

$$+\int\limits_{J_i}\big(K(\tau-t)+\Delta K(\tau-t)\big)^r\overline{\varphi}_i^h(\tau)\,d\tau=2\int\limits_{J_i}\big(K(\tau-t)+\Delta K(\tau-t)\big)^r\overline{\varphi}_i^h(\tau)\,d\tau.$$

Откуда следует

$$\sum_t^l Int_i^h(t)\le 2\int\limits_0^T\big(K(\tau-t)+\Delta K(\tau-t)\big)^r\sum_i^l\overline{\varphi}_i^h(\tau)d\tau\le$$

$$\le 2\int\limits_{t-5h_{\max}/2}^{t+5h_{\max}/2}\big(K(\tau-t)+\Delta K(\tau-t)\big)^r\,d\tau=4\int\limits_0^{5h_{\max}/2}\big(K(\tau)+\Delta K(\tau)\big)^s\,d\tau.$$

Рассмотрим второй случай $t>\tau_i+3h_{\max}/2$, на основе оценки для $\tau,\ \tau'\in J_i$

$$\left|K(\tau-t)+\Delta K(\tau-t)-K(\tau'-t)-\Delta K(\tau'-t)\right|^r\le$$

$$\le\big(K(\tau_{i-1}-t)+\Delta K(\tau_{i-1}-t)\big)^r-\big(K(\tau_{i+1}-t)+\Delta K(\tau_{i+1}-t)\big)^r,$$

имеем

$$Int_i^h(t)\le h_{i+1/2}\Big[\big(K(\tau_{i-1}-t)+\Delta K(\tau_{i-1}-t)\big)^r-\big(K(\tau_{i+1}-t)+\Delta K(\tau_{i+1}-t)\big)^r\Big]\le$$

$$\le h_{\max}\Big[\big(K(\tau_{i-1}-t)+\Delta K(\tau_{i-1}-t)\big)^r-\big(K(\tau_{i+1}-t)+\Delta K(\tau_{i+1}-t)\big)^r\Big].$$

Откуда

$$\sum_t^m Int_i^h(t)\le h_{\max}\sum_t^m\Big[\big(K(\tau_{i-1}-t)+\Delta K(\tau_{i-1}-t)\big)^r-\big(K(\tau_{i+1}-t)+\Delta K(\tau_{i+1}-t)\big)^r\Big]\le$$

$$\le 2h_{\max}\left(K+\Delta K\right)^r\left(h_{\max}/2\right).$$

По аналогии с последней оценкой, получаем оценку и для третьего случая $\left|t-\tau_i\right|\le 3h_{\max}/2$:

$$\sum_t^k Int_i^h(t)\le 2h_{\max}\left(K+\Delta K\right)^r\left(h_{\max}/2\right).$$

Суммируя оценки, полученные для трех случаев, приходим к неравенству

$$\widehat{\omega}_r(K,\Delta K,J)\le\left[4\int\limits_0^{5h_{\max}/2}\big(K(t)+\Delta K(t)\big)^s\,dt+4h_{\max}\left(K+\Delta K\right)^r\left(h_{\max}/2\right)\right]^{1/r}.$$

Учитывая, что

$$\int_0^{5h_{\max}/2}\left(K(t)+\Delta K(t)\right)^r dt \sim (5h_{\max}/2)(K+\Delta K)(5h_{\max}/2),$$

получим

$$\widehat{\omega}_r(K,\Delta K,J)\le$$
$$\le\left[4(5h_{\max}/2)(K+\Delta K)(5h_{\max}/2)(1+o(1))+4h_{\max}(K+\Delta K)^r(h_{\max}/2)\right]^{1/r}\le$$
$$\le 14^{1/r}h_{\max}^{1/r}(K+\Delta K)(h_{\max}/2)(1+o(1))\le 2^{4/r}h_{\max}^{1/r}(K+\Delta K)(h_{\max}/2)(1+o(1)).$$

Лемма доказана.

Лемма 8. При $1\le p\le q\le\infty$, $1/s=1-1/p+1/q>0$ справедливы оценки

$$\left\|(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h)(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})\right\|_{L_p(J)\to L_q(J)}\le\omega_s(K,\Delta K,2h_{\max})^{1-s/q}\,\widehat{\omega}_s(K,\Delta K,J)^{s/q},\tag{77}$$

$$\left\|(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h)\right\|_{L_p(J)\to L_q(J)}\le\omega_s(K,\Delta K,2h_{\max})^{s/q}\,\widehat{\omega}_s(K,\Delta K,J)^{1-s/q},\tag{78}$$

$$\begin{gathered}\left\|(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h)(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})\right\|_{L_p(J)\to L_q(J)}\le\\ \le E_s\omega_1(K,\Delta K,2h_{\max})^{1/(2s)}\,\widehat{\omega}_1(K,\Delta K,J)^{1/(2s)}.\end{gathered}\tag{79}$$

Доказательство. Положим $f\in L_p(J)$, $1\le p<\infty$ тогда

$$\begin{gathered}\left|(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h)(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})\,f(\tau)\right|=\\ =\left|\int_0^T\Big[K(t-\tau)+\Delta K(t-\tau)-\right.\\ \left.-\sum_{i=0}^n h_{i+1/2}^{-1}\int_{J_i}\left(K(\tau'-t)+\Delta K(\tau'-t)\right)\overline{\varphi}_i^h(\tau')\,d\tau'\overline{\varphi}_i^h(\tau)\Big]f(t)\,dt\right|=\\ =\left|\int_0^T\left[\sum_{i=0}^n h_{i+1/2}^{-1}\int_{J_i}\big[K(\tau-t)+\Delta K(\tau-t)-\right.\right.\\ \left.-K(\tau'-t)-\Delta K(\tau'-t)\big]\overline{\varphi}_i^h(\tau')\,d\tau'\overline{\varphi}_i^h(\tau)\,f(t)\,dt\right|.\end{gathered}\tag{80}$$

Видно, что

$$\sum_{i=0}^n h_{i+1/2}^{-1}\int_{J_i}\left|K(\tau-t)+\Delta K(\tau-t)-K(\tau'-t)-\Delta K(\tau'-t)\right|^s\overline{\varphi}_i^h(\tau')\,d\tau'\overline{\varphi}_i^h(\tau)\le$$

$$\left[\sum_{i=0}^n h_{i+1/2}^{-1}\int_{J_i}\left|K(\tau-t)+\Delta K(\tau-t)-K(\tau'-t)-\Delta K(\tau'-t)\right|^s\overline{\varphi}_i^h(\tau')\,d\tau'\overline{\varphi}_i^h(\tau)\right]^{1/s}\times$$

$$\times\left[\sum_{i=0}^n h_{i+1/2}^{-1}\int_{J_i}\overline{\varphi}_i^h(\tau')\,d\tau'\overline{\varphi}_i^h(\tau)\right]^{1-1/s}.$$

Учитывая формулу (41), получим

$$\left|\left(\mathbf{I}-\bar{\sigma}_h\right)\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right) f\left(\tau\right)\right| \le$$

$$\le \left[\int_0^T \left[\sum_{i=0}^n h_{i+1/2}^{-1} \int_0^T \left|K\left(\tau-t\right)+\Delta K\left(\tau-t\right)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-K\left(\tau'-t\right)-\Delta K\left(\tau'-t\right)\right|^s \bar{\varphi}_i^h\left(\tau'\right) d\tau' \bar{\varphi}_i^h\left(\tau\right)\right]^{1/s} \left|f\left(t\right)\right| dt\right]^p \le$$

$$\le \left[\int_0^T \sum_{i=0}^n h_{i+1/2}^{-1} \int_0^T \left|K\left(\tau-t\right)+\Delta K\left(\tau-t\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-K\left(\tau'-t\right)-\Delta K\left(\tau'-t\right)\right|^s \bar{\varphi}_i^h\left(\tau'\right) d\tau' \bar{\varphi}_i^h\left(\tau\right)\right]^{p-1} \times$$

$$\le \int_0^T \left[\sum_{i=0}^n h_{i+1/2}^{-1} \int_{J_i} \left|K\left(\tau-t\right)+\Delta K\left(\tau-t\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-K\left(\tau'-t\right)-\Delta K\left(\tau'-t\right)\right|^s \bar{\varphi}_i^h\left(\tau'\right) d\tau' \bar{\varphi}_i^h\left(\tau\right)\right]^{p/q} \left|f\left(t\right)\right|^p dt \le$$

$$\le \omega_s\left(K, \Delta K, 2h_{\max}\right)^{s(p-1)} \times$$

$$\times \int_0^T \left[\sum_{i=0}^n h_{i+1/2}^{-1} \int_{J_i} \left|K\left(\tau-t\right)+\Delta K\left(\tau-t\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-K\left(\tau'-t\right)-\Delta K\left(\tau'-t\right)\right|^s \bar{\varphi}_i^h\left(\tau'\right) d\tau' \bar{\varphi}_i^h\left(\tau\right)\right]^{p/q} \left|x\left(t\right)\right|^p dt.$$

Применяя к последнему неравенству обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$\left\|\left(\mathbf{I}-\bar{\sigma}_h\right)\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)x\right\|_{L_q(J)}^p = \left\|\left|\left(\mathbf{I}-\bar{\sigma}_h\right)\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)x\right|^p\right\|_{L_{q/p}(J)} \le \omega_s\left(K, \Delta K, 2h_{\max}\right)^{s(p-1)} \times$$

$$\times \int_0^T \left[\sum_{i=0}^n h_{i+1/2}^{-1} \int_{J_i}\int_{J_i} \left|K\left(\tau-t\right)+\Delta K\left(\tau-t\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-K\left(\tau'-t\right)-\Delta K\left(\tau'-t\right)\right|^s \bar{\varphi}_i^h\left(\tau\right)\bar{\varphi}_i^h\left(\tau'\right) d\tau' d\tau\right]^{p/q} \left|x\left(t\right)\right|^p dt \le$$

$$\le \omega_s\left(K, \Delta K, 2h_{\max}\right)^{s(p-1)} \widehat{\omega}_s\left(K, \Delta K, J\right)^{sp/q} \left\|x\right\|_{L_p(J)}^p.$$

В последнем неравенстве при $1 \le p < \infty$ приходим к оценке (77).

Примем $p = q = \infty$, то с учетом (80) приходим к неравенству

$$\left|\left(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h\right)\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)f\left(\tau\right)\right|\le$$

$$\le\sum_{i=0}^{n}h_{i+1/2}^{-1}\int_{J_i}\left[\int_0^T\left[K\left(t-\tau\right)+\Delta K\left(t-\tau\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-K\left(\tau'-t\right)+\Delta K\left(\tau'-t\right)\right|dt\right]\overline{\varphi}_i^h\left(\tau'\right)d\tau'\overline{\varphi}_i^h\left(\tau\right)\left\|f\right\|_{L_\infty(J)}\le$$

$$=\omega_1\left(K,\Delta K,2h_{\max}\right)\sum_{i=0}^{n}\overline{\varphi}_i^h\left(\tau\right)\left\|f\right\|_{L_\infty(J)}=\omega_1\left(K,\Delta K,2h_{\max}\right)\left\|f\right\|_{L_\infty(J)}.$$

В итоге

$$\left\|\left(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h\right)\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)f\left(\tau\right)\right\|_{L_\infty(J)}\le\omega_1\left(K,\Delta K,2h_{\max}\right)\left\|f\right\|_{L_\infty(J)}.$$

Откуда следует оценка (78).

Видно, что оператор $\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h\right)$ сопряженный к $\left(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h\right)\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)$, тогда учитывая, $1-1/\overline{q}+1/\overline{p}=1/s$, $1-s/\overline{p}=s/q$, имеем

$$\left\|\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h\right)\right\|_{L_p(J)\to L_q(J)}=\left\|\left(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h\right)\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\right\|_{L_{\overline{q}}(J)\to L_{\overline{p}}(J)}\le$$

$$\le\omega_s\left(K,\Delta K,2h_{\max}\right)^{s/q}\widehat{\omega}_s\left(K,\Delta K,J\right)^{1-s/q}.$$

На основе оценок (77) и (78) и неравенства $\left\|\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\right\|_{L_p(J)\to L_q(J)}\le E_s$, получим

$$\left\|\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h\right)\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\right\|_{L_p(J)\to L_q(J)}\le E_s\left\|\left(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h\right)\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\right\|_{L_p(J)\to L_q(J)}\le$$

$$\le E_s\omega_1\left(K,\Delta K,2h_{\max}\right)^{1-1/p}\widehat{\omega}_s\left(K,\Delta K,J\right)^{1/p},$$

$$\left\|\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h\right)\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\right\|_{L_p(J)\to L_q(J)}\le E_s\left\|\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h\right)\right\|_{L_q(J)\to L_q(J)}\le$$

$$\le E_s\omega_1\left(K,\Delta K,2h_{\max}\right)^{1/q}\widehat{\omega}_s\left(K,\Delta K,J\right)^{1-1/q}.$$

Перемножив два последних неравенства, получим оценку (79).

Из приведенной леммы следует следствие.

Следствие 2. При $1\le p\le q\le\infty$, $1/s=1-1/p+1/q>0$, справедливы оценки с

$$\left\|\left(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h\right)\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\right\|_{L_p(J)\to L_q(J)}\le$$
$$\le 2^{1/s+3/q}h_{\max}^{1/s}\left(K+\Delta K\right)\left(h_{\max}/2\right)\left(1+o\left(1\right)\right)\ \ if\ \ h_{\max}\to 0, \tag{81}$$

$$\left\|\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h\right)\right\|_{L_p(J)\to L_q(J)}\le$$
$$\le 2^{4/s-3/q}h_{\max}^{1/s}\left(K+\Delta K\right)\left(h_{\max}/2\right)\left(1+o\left(1\right)\right)\ \ if\ \ h_{\max}\to 0, \tag{82}$$

$$\left\|\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h\right)\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\right\|_{L_p(J)\to L_q(J)}\le$$
$$\le 2^{5/(2s)}E_s h_{\max}\left(K+\Delta K\right)\left(h_{\max}/2\right)\left(1+o\left(1\right)\right)\ \ if\ \ h_{\max}\to 0. \tag{83}$$

Доказательство. На основе оценки (68)

$$\omega_r\left(K,\Delta K,2h_{\max}\right)\le\left(2h_{\max}\right)^{1/r}\left(K+\Delta K\right)\left(h_{\max}\right)\left(1+o\left(1\right)\right)\le$$

$$\le (2)^{1/r} h_{\max}^{1/r} (K+\Delta K)(h_{\max}/2)(1+o(1))$$

и оценки (76), приходим от оценок (77) – (79) к оценкам (81) – (83).

Лемма 9. Если $f \in W_p^1(J)$ и $1 \le p \le q \le \infty,\ 1/s = 1 - 1/p + 1/q > 0,$ то справедлива оценка

$$\left\| (\mathbf{I} - \bar{\sigma}_h) f \right\|_{L_q(J)} \le 2^{1/s} \left\| \frac{d}{d\tau} f \right\|_{L_p(J)} h_{\max}^{1/s}. \tag{84}$$

Доказательство. Положим $q \ne \infty$, тогда

$$\left\| (\mathbf{I} - \bar{\sigma}_h) f \right\|_{L_q(J)} \le \omega_q(f, J) \le \left[\sum_{i=0}^{n} \left\| \frac{d}{d\tau} f \right\|_{L_p(J_i)}^q h_{i+1/2} \right]^{1/q} \le$$

$$\le \left[\sum_{i=0}^{n} \left\| \frac{d}{d\tau} f \right\|_{L_p(J_i)}^q \left(2h_{i+1/2}\right)^{q/p'} h_{i+1/2} \right]^{1/q} \le$$

$$\le \max_{1\le i\le n} \left\| \frac{d}{d\tau} f \right\|_{L_p(J_i)}^{1-p/q} \left[\sum_{i=0}^{n} \left\| \frac{d}{d\tau} f \right\|_{L_p(J_i)}^p \right]^{1/q} 2^{1/p'} h_{\max}^{1/s} \le 2^{1/s} \left\| \frac{d}{d\tau} f \right\|_{L_p(J)} h_{\max}^{1/s}.$$

Положим $q = \infty$, тогда

$$\left\| (\mathbf{I} - \bar{\sigma}_h) f \right\|_{L_\infty(J)} \le \omega_\infty(f, J) \le \max_{1\le i\le n} \left\| \frac{d}{d\tau} f \right\|_{L_1(J_i)} \le \left\| \frac{d}{d\tau} f \right\|_{L_p(J)} (2h_{\max})^{1-1/p}.$$

Лемма доказана.

Лемма xxx. 1. Положим $f \in W_1^1(J)$, тогда справедлива оценка

$$\left\| (\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \bar{\sigma}_h) f \right\|_{C(\bar{J})} \le 2 \left\| \frac{d}{d\tau} f \right\|_{L_1(J)} h_{\max} (K+\Delta K)(h_{\max})(1+o(1)) \tag{85}$$

if $h_{\max} \to 0,$

$$\left\| (\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \bar{\sigma}_h)(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}) f \right\|_{C(\bar{J})} \le \sqrt{2} E_2 \left\| \frac{d}{d\tau} (\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}) f \right\|_{L_2(J)} h_{\max}. \tag{86}$$

2. Положим $f \in W_p^1(J)$ и $1 \le p \le q \le \infty,\ 1/s = 1 - 1/p + 1/q > 0,$ тогда справедлива оценка

$$\left\| (\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \bar{\sigma}_h) f \right\|_{L_q(J)} \le 2E_s \left\| \frac{d}{d\tau} f \right\|_{L_p(J)} h_{\max}, \tag{87}$$

$$\left\| (\mathbf{I} - \bar{\sigma}_h)(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}) f \right\|_{L_q(J)} \le 2 \left\| \frac{d}{d\tau} (\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}) f \right\|_{L_q(J)} h_{\max}. \tag{88}$$

Доказательство. На основании выражения (70), получим

$$\left|\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h\right)f(t)\right| = \left|\int_0^T \left(K(t-\tau)+\Delta K(t-\tau)\right)\left(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h\right)f(\tau)\,d\tau\right| \le \tag{89}$$

$$\le \int_0^T \sum_{i=0}^n h_{i+1/2}^{-1}\left(K(t-\tau)+\Delta K(t-\tau)\right)\int_{J_i}\left|f(\tau')-f(\tau)\right|\overline{\varphi}_i^h(\tau')\,d\tau'\overline{\varphi}_i^h(\tau)\,d\tau \le$$

$$\le \sum_{i=0}^n \int_{J_i}\left(K(t-\tau)+\Delta K(t-\tau)\right)\overline{\varphi}_i^h(\tau)\,d\tau\left\|\frac{d}{d\tau}f(\tau)\right\|_{L_1(J_i)} \le$$

$$\le \max_{1\le i\le n}\int_{J_i}\left(K(t-\tau)+\Delta K(t-\tau)\right)d\tau\sum_{i=0}^n\left\|\frac{d}{d\tau}f(\tau)\right\|_{L_1(J_i)} \le$$

$$\le 2\int_0^{h_{\max}}\left(K(t-\tau)+\Delta K(t-\tau)\right)dt\left\|\frac{d}{d\tau}f(\tau)\right\|_{L_1(J)} \le$$

$$\le 2\left\|\frac{d}{d\tau}f(\tau)\right\|_{L_1(J)} h_{\max}\left(K(t-\tau)+\Delta K(t-\tau)\right)\left(h_{\max}\right)\left(1+o(1)\right).$$

Из последнего следует оценка (85).

На основании оценки (84) и формулы (70), имеем

$$\left\|\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h\right)\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)f\right\|_{L_1(J)\to C(\overline{J})} \le$$

$$\le \left\|\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\right\|_{L_2(J)\to C(\overline{J})}\left\|\left(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h\right)\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)f\right\|_{L_2(J)} \le \sqrt{2}E_2\left\|\frac{d}{d\tau}\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)f\right\|_{L_2(J)} h_{\max},$$

$$\left\|\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h\right)f\right\|_{L_q(J)} \le$$

$$\le \left\|\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\right\|_{L_p(J)\to L_q(\overline{J})}\left\|\left(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h\right)f\right\|_{L_p(J)\to L_p(J)} \le 2E_2\left\|\frac{d}{d\tau}\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)f\right\|_{L_p(J)} h_{\max},$$

$$\left\|\left(\mathbf{I}-\overline{\sigma}_h\right)\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)f\right\|_{L_q(J)} \le 2\left\|\frac{d}{d\tau}\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)f\right\|_{L_p(J)} h_{\max}.$$

Лемма доказана.

3.3. Метод проекционного типа решения операторного уравнения в пространстве кусочно линейных функций, на основе оператора кусочно линейного интерполирования.

Как и в предыдущем параграфе через $\overline{B}_h(J)$ обозначим пространство кусочно линейных функций, элементами которого являются функции вида (66). Определим оператор $\overline{l}_h$, такой что $\overline{l}_h : C(\overline{J}) \to \overline{B}_h(\overline{J})$, тогда справедливо

$$\left(\overline{l}_h f\right)(\tau) = \sum_{i=0}^n f(\tau_i)\overline{\varphi}_i^h(\tau),\ \ \tau\in\overline{J}, \tag{90}$$

причем

$$\left\| \bar{l}_h \right\|_{C(\bar{J}) \to \bar{B}_h(\bar{J})} = 1.$$

Пусть на отрезке $J = [0, T] \subset R$, ведена произвольная неравномерная сетка J_h с узлами

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{n-1} < \tau_n = T,$$

положим $h_i = \tau_i - \tau_{i-1},\ 1 \le i \le n,\ h_{\max} = \max\limits_{1 \le i \le n} h_i$, разбив тем самым $J = [0, T]$ на n подобластей $J_i = (\tau_{i-1}, \tau_i),\ i = 1, \ldots, n$ (конечных элементов). Зададим на каждом (τ_{i-1}, τ_i) характеристическую функцию

$$\varphi_i^h(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \notin (\tau_{i-1}, \tau_i), \\ 1, & \tau \in (\tau_{i-1}, \tau_i). \end{cases}$$

Пусть δ_h оператор, такой что $\delta_h : C(\bar{J}) \to \tilde{B}_h(J)$, тогда

$$(\delta_h f)(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \delta_h f_{i-1/2} \bar{\varphi}_{i-1/2}^h(\tau),\ \tau \in \bar{J},$$

где через $\tilde{B}_h(J)$ обозначено пространство элементами которого являются кусочно-постоянные функции вида

$$f(\tau) = \sum_{j=1}^{n} f_{j-1/2} \varphi_{j-1/2}^h(\tau),$$

где $\varphi_{j-1/2}^h(\tau) -$характеристическая функция носитель, принадлежащая интервалу $\varphi_{j-1/2}^h(\tau) \in (\tau_{j-1}, \tau_j)$. Выражение $\delta_h f_{i-1/2}$ определено в виде

$$\delta_h f_{i-1/2} = \frac{f(\tau_i) - f(\tau_{i-1})}{h_i},\ 1 \le i \le n.$$

Справедливо следующее выражение

$$\frac{d}{d\tau} \bar{l}_h f(\tau) = \delta_h f(\tau), \qquad \forall f \in C(\bar{J}). \tag{91}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 10. Положим $x \in W_p^1(J),\ 1 \le p \le q \le \infty,\ 1/s = 1 - 1/p + 1/q$, тогда справедлива оценка

$$\left\| \left(\mathbf{I} - \bar{l}_h \right) x \right\|_{L_q(J)} \le \frac{1}{4^{1-1/p}} \left\| \frac{d}{d\tau} x \right\|_{L_p(J)} h_{\max}^{1/s}. \tag{92}$$

Доказательство. Положим $\tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i],\ 1 \le i \le n$, а так же $\bar{x} = \bar{l}_h x$. Пусть функции $\bar{\varphi}_i^h,\ 0 \le i \le n$ кусочно линейный интерполянт функции $\psi(\tau)$, причем $\bar{\varphi}_i^h \in \bar{B}_h(J)$. Функции $\bar{\varphi}_i^h$ совпадают с $\psi(\tau)$ в узлах сетки J_h отрезка $J = [0, T] \subset R$. Пусть, так же, $\tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$, тогда для погрешности интерполяции справедливо выражение

$$\psi(\tau)-\overline{\varphi}^h(\tau)=-\frac{\tau-\tau_{i-1}}{h_i}\int_{\tau}^{\tau_i}\frac{d}{d\xi}\psi(\xi)d\xi+\frac{\tau_i-\tau}{h_i}\int_{\tau}^{\tau_i}\frac{d}{d\xi}\psi(\xi)d\xi.$$

Последнее можно переписать в виде

$$\psi(\tau)-\overline{\varphi}^h(\tau)=\int_{\tau}^{\tau_i}G_i(\tau,\xi)\frac{d}{d\xi}\psi(\xi)d\xi, \tag{93}$$

где

$$G_i(\tau,\xi)=\frac{1}{h_i}\begin{cases}\tau_{i-1}-\tau, & \tau_{i-1}\le\tau<\xi\le\tau_i,\\ \tau_i-\tau, & \tau_{i-1}\le\xi<\tau\le\tau_i.\end{cases}$$

Тогда на основании форулы (93) можно получить

$$\left|\left(\mathbf{I}-\overline{l}_h\right)x(\tau)\right|=\left|x(\tau)-\overline{x}(\tau)\right|\le\left\|G_i(\tau,\cdot)\right\|_{L_{p'}(\tau_{i-1},\tau_i)}\left\|\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right\|_{L_p(\tau_{i-1},\tau_i)}. \tag{94}$$

Учитывая, что $\left\|G_i(\tau,\cdot)\right\|_{L_\infty(\tau_{i-1},\tau_i)}\le 1$ и при $1<p\le\infty$

$$\left\|G_i(\tau,\cdot)\right\|_{L_{p'}(\tau_{i-1},\tau_i)}=\frac{1}{h_i}\left[(\tau_i-\tau)^{p'}(\tau-\tau_{i-1})+(\tau_i-\tau)(\tau-\tau_{i-1})^{p'}\right]^{1/p'}=$$

$$=\frac{1}{h_i}\left[(\tau_i-\tau)(\tau-\tau_{i-1})\right]^{1/p'}\left[(\tau_i-\tau)^{p'-1}+(\tau-\tau_{i-1})^{p'-1}\right]^{1/p'}\le$$

$$\le\frac{1}{h_i^{1/p'}}\left[(\tau_i-\tau)(\tau-\tau_{i-1})\right]^{1/p'}\le\frac{1}{4^{1-1/p}}h_i^{1-1/p},$$

получаем оценку

$$\left|\left(\mathbf{I}-\overline{l}_h\right)x(\tau)\right|\le\frac{1}{4^{1-1/p}}\left\|\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right\|_{L_p(\tau_{i-1},\tau_i)}h_{\max}^{1-1/p}.$$

Рассмотрим следующие два случая: 1) $q=\infty$, 2) $q<\infty$. В первом случае имеем

$$\left\|\left(\mathbf{I}-\overline{l}_h\right)x(\tau)\right\|_{L_\infty(J)}\le$$

$$\le\frac{1}{4^{1-1/p}}\max_{1\le i\le n}\left\|\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right\|_{L_p(\tau_{i-1},\tau_i)}h_i^{1-1/p}\le\frac{1}{4^{1-1/p}}\left\|\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right\|_{L_p(J)}h_{\max}^{1-1/p}.$$

Во втором

$$\left\|\left(\mathbf{I}-\overline{l}_h\right)x(\tau)\right\|_{L_q(J)}\le\frac{1}{4^{1-1/p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right\|_{L_p(\tau_{i-1},\tau_i)}h_i\right)^{1/q}h_{\max}^{1-1/p}\le$$

$$\le\frac{1}{4^{1-1/p}}\max_{1\le i\le n}\left\|\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right\|_{L_p(\tau_{i-1},\tau_i)}^{1-p/q}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right\|_{L_p(\tau_{i-1},\tau_i)}^{p}\right)^{1/q}h_{\max}^{1/s}\le$$

$$\le\frac{1}{4^{1-1/p}}\left\|\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right\|_{L_p(J)}h_{\max}^{1/s}.$$

Лемма доказана.

Лемма 11. Пусть $1 \le p \le \infty$, тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\mathbf{I} - \bar{l}_h \right) \left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T} \right) \right\|_{L_p(J) \to C(\bar{J})} \le \\ &\le 2^{1-1/p} h_{\max}^{1-1/p} \left(K + \Delta K \right) \left(h_{\max}/2 \right) \left(1 + o(1) \right) \quad if \quad h_{\max} \to 0. \end{aligned} \tag{95}$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $x(\tau) \in L_p(J)$, тогда при $\tau \in \left[\tau_{j-1}, \tau_j \right]$, $1 \le j \le n$, имеем

$$\begin{aligned} &\left| \left(\mathbf{I} - \bar{l}_h \right) \left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T} \right) x(\tau) \right| = \Big| \left[\left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T} \right) x(\tau) - \left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T} \right) x\left(\tau_{j-1} \right) \right] \bar{\varphi}_{j-1}^h(\tau) + \\ &\qquad + \left[\left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T} \right) x(\tau) - \left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T} \right) x\left(\tau_j \right) \right] \bar{\varphi}_j^h(\tau) \Big| \le \\ &+ \int_J \left| K(\tau - \tau') + \Delta K(\tau - \tau') - \left(K\left(\tau_{j-1} - \tau' \right) + \Delta K\left(\tau_{j-1} - \tau' \right) \right) \right| \left| x(\tau') \right| d\tau' \bar{\varphi}_{j-1}^h(\tau) + \\ &+ \int_J \left| K(\tau - \tau') + \Delta K(\tau - \tau') - \left(K\left(\tau_j - \tau' \right) + \Delta K\left(\tau_j - \tau' \right) \right) \right| \left| x(\tau') \right| d\tau' \bar{\varphi}_j^h(\tau) \le \\ &\left\| K(\tau - \cdot) + \Delta K(\tau - \cdot) - K\left(\tau_{j-1} - \cdot \right) - \Delta K\left(\tau_{j-1} - \cdot \right) \right\|_{L_{p'}(J)} \|x\|_{L_p(J)} \bar{\varphi}_{j-1}^h(\tau) + \\ &+ \left\| K(\tau - \cdot) + \Delta K(\tau - \cdot) - K\left(\tau_j - \cdot \right) - \Delta K\left(\tau_j - \cdot \right) \right\|_{L_{p'}(J)} \|x\|_{L_p(J)} \bar{\varphi}_j^h(\tau) \le \\ &\le \omega_{p'}\left(K, \Delta K, h_{\max} \right) \|x\|_{L_p(J)}. \end{aligned}$$

Применяя оценку (68) к последнему неравенству, приходим к оценке (95).

Лемма 12. Предположим, что $x(\tau) \in W_1^1(J)$. тогда справедливо следующее:

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T} \right) \left(\mathbf{I} - \bar{l}_h \right) x \right\|_{C(\bar{J})} \le \\ &\le \left\| \frac{d}{d\tau} x(\tau) \right\|_{L_1(J)} \left(K + \Delta K \right) \left(h_{\max}/2 \right) h_{\max} \left(1 + o(1) \right) \quad if \quad h_{\max} \to 0. \end{aligned} \tag{96}$$

Предположим, что $x(\tau) \in W_p^1(J)$, $1 < p \le \infty$. тогда справедливо следующее:

$$\left\| \left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T} \right) \left(\mathbf{I} - \bar{l}_h \right) x \right\|_{C(\bar{J})} \le \frac{1}{4^{1-1/p}} E_{p'} \left\| \frac{d}{d\tau} x(\tau) \right\|_{L_p(J)} h_{\max}. \tag{97}$$

Доказательство. Видно, что

$$\begin{aligned} &\left| \left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T} \right) \left(\mathbf{I} - \bar{l}_h \right) x(\tau) \right| \le \sum_{i=1}^{m} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left(K(t - \tau') + \Delta K(t - \tau') \right) \left| \left(\mathbf{I} - \bar{l}_h \right) x(\tau') \right| d\tau' \le \\ &\qquad \le \sum_{i=1}^{m} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left(K(t - \tau') + \Delta K(t - \tau') \right) d\tau' \left\| \frac{d}{d\tau} x(\tau) \right\|_{L_1(\tau_{i-1}, \tau_i)} \le \\ &\qquad \le \max_{1 \le i \le n} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left(K(t - \tau') + \Delta K(t - \tau') \right) d\tau' \sum_{i=1}^{m} \left\| \frac{d}{d\tau} x(\tau) \right\|_{L_1(\tau_{i-1}, \tau_i)} \le \end{aligned}$$

$$\le 2\int_{0}^{h_{\max}/2}\left(K(t)+\Delta K(t)\right)dt\left\|\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right\|_{L_1(J)} =$$

$$=(K+\Delta K)(h_{\max}/2)h_{\max}\left(1+o(1)\right)\left\|\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right\|_{L_1(J)}.$$

Откуда следует доказательство оценки (96). Применим неравенство (92) при условии, что $q=p,$ получим оценку (97):

$$\left\|(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})\left(\mathbf{I}-\bar{l}_h\right)x\right\|_{C(\bar{J})} \le \left\|(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})\right\|_{L_p(\bar{J})\to C(\bar{J})}\left\|\left(\mathbf{I}-\bar{l}_h\right)x\right\|_{L_p(J)} \le$$

$$\le E_{p'}\frac{1}{4^{1-1/p}}\left\|\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right\|_{L_p(J)} h_{\max}.$$

Лемма доказана.

Лемма 13. Предположим, что $x(\tau)\in W_1^1(J)$. тогда справедливо следующее:

$$\left\|(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})\left(\mathbf{I}-\bar{l}_h\right)(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})x\right\|_{C(\bar{J})} \le$$

$$\le 4\left[\left\|\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right\|_{L_1(J)}+\left\|x(\tau)\right\|_{C(\bar{J})}\right]h_{\max}^2(K+\Delta K)^2(h_{\max}/2)\left(1+o(1)\right) \tag{98}$$

$if \quad h_{\max}\to 0.$

Доказательство. Учитывая, что $\left(\mathbf{I}-\bar{l}_h\right)=\left(\mathbf{I}-\bar{l}_h\right)^2$, а так же оценку (96)

$$\left\|(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})\left(\mathbf{I}-\bar{l}_h\right)(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})x\right\|_{C(\bar{J})} \le \left\|(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})\left(\mathbf{I}-\bar{l}_h\right)\left(\mathbf{I}-\bar{l}_h\right)(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})x\right\|_{C(\bar{J})} \le$$

$$\le\left\|\frac{d}{d\tau}\left(\mathbf{I}-\bar{l}_h\right)(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})x(\tau)\right\|_{L_1(J)} h_{\max}(K+\Delta K)(h_{\max}/2)\left(1+o(1)\right).$$

На основании формулы $\frac{d}{d\tau}\left(\mathbf{I}-\bar{l}_h\right)=\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)\frac{d}{d\tau}$ и оценок из лемм 4 и 5:

$$\left\|\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)(K+\Delta K)\right\|_{L_1(J)} \le 2h_{\max}(K+\Delta K)(h_{\max}/2)\left(1+o(1)\right),$$

$$\left\|\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)(K+\Delta K)^*\right\|_{L_1(J)} \le 2h_{\max}(K+\Delta K)(h_{\max}/2)\left(1+o(1)\right),$$

$$\left\|\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})\right\|_{L_1(J)\to L_1(J)} \le 4h_{\max}(K+\Delta K)(h_{\max}/2)\left(1+o(1)\right),$$

получим

$$\left\|\frac{d}{d\tau}\left(\mathbf{I}-\bar{l}_h\right)(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})x(\tau)\right\|_{L_1(J)} = \left\|\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)\frac{d}{d\tau}(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})x(\tau)\right\|_{L_1(J)} =$$

$$=\left\|\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)\left[(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})\frac{d}{d\tau}x(\tau)+(K+\Delta K)x(0)-(K+\Delta K)^*x(\tau_*)\right]\right\|_{L_1(J)} \le$$

$$\le \left\| \left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right) \right\|_{L_1(J)\to L_1(J)} \left\| \frac{d}{d\tau} x(\tau) \right\|_{L_1(J)} +$$

$$+\left\| \left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)\left(K+\Delta K\right) \right\|_{L_1(J)} \left|x(0)\right| + \left\| \left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)\left(K+\Delta K\right)^* \right\|_{L_1(J)} \left|x(\tau_*)\right| \le$$

$$\le 4 \left\| \frac{d}{d\tau} x(\tau) \right\|_{L_1(J)} h_{\max}\left(K+\Delta K\right)\left(h_{\max}/2\right)\left(1+o(1)\right)+$$

$$+4\left\| x(\tau) \right\|_{C(\bar{J})} h_{\max}\left(K+\Delta K\right)\left(h_{\max}/2\right)\left(1+o(1)\right).$$

Лемма доказана.

4. Методы решения сингулярного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с возмущенным оператором на основе усредняющего оператора и оценки их погрешностей

Применение усредняющего оператора $P_l = \bar{\sigma}_h$ в пространстве $B = L_q(J)$ приводит к следующим методам:

Итерированный метод Галеркина

$$\bar{x}_l = \varpi\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\bar{\sigma}_h \bar{x}_l + f.$$

Метод Канторовича

$$\tilde{x}_l = \varpi\bar{\sigma}_h\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\tilde{x}_l + f.$$

Итерированный метод Канторовича

$$\hat{x}_l = \varpi\bar{y}_h + f,$$

$$\bar{y}_h = \omega\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\bar{\sigma}_h\bar{y}_h + \left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right) f.$$

Причем для погрешностей рассматриваемых методов применяются следующие обозначения:

$$\bar{\varepsilon}_l = \bar{x}_l - x,\ \tilde{\varepsilon}_l = \tilde{x}_l - x,\ \hat{\varepsilon}_l = \hat{x}_l - x,$$

где x – решение уравнения (1).

Справедлива следующая

Теорема 1. 1. Предположим, что $f \in L_p(J)$, $1 \le p < \infty$. Тогда справедлива оценка

$$\left\|\varepsilon_l\right\|_{L_p(J)} \to 0 \ \ if \ \ h_{\max} \to 0. \tag{99}$$

2. Предположим, что $f \in L_p(J)$, $1 \le p \le q < \infty$, $1/s = 1 - 1/p + 1/q > 0$. Тогда справедливы оценки:

$$\left\|\bar{\varepsilon}_l\right\|_{L_q(J)} \le 2^{4/s-3/q}\gamma_1 \left\|x\right\|_{L_p(J)} h_{\max}^{1/s}\left(K+\Delta K\right)\left(h_{\max}/2\right)\left(1+o(1)\right) \ \ if \ \ h_{\max}\to 0, \tag{100}$$

$$\left\|\tilde{\varepsilon}_l\right\|_{L_q(J)} \le 2^{1/s+3/q}\gamma_1 \left\|x\right\|_{L_p(J)} h_{\max}^{1/s}\left(K+\Delta K\right)\left(h_{\max}/2\right)\left(1+o(1)\right) \ \ if \ \ h_{\max}\to 0, \tag{101}$$

$$\left\|\hat{\varepsilon}_l\right\|_{L_q(J)} \le 2^{5/(2s)} E_s\gamma_2 \left\|x\right\|_{L_p(J)} h_{\max}\left(K+\Delta K\right)\left(h_{\max}/2\right)\left(1+o(1)\right) \ \ if \ \ h_{\max}\to 0. \tag{102}$$

Доказательство. На основании леммы 1, а так же в случае $B = L_q(J)$, $P_l = \overline{\sigma}_h$, имеем

$$\|\varepsilon_l\|_{L_q(J)} \le \gamma_0 \left\|(\mathbf{I} - \overline{\sigma}_h) x\right\|_{L_p(J)}, \tag{103}$$

$$\|\overline{\varepsilon}_l\|_{L_q(J)} \le \gamma_1 \left\|(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \overline{\sigma}_h) x\right\|_{L_q(J)}, \tag{104}$$

$$\|\tilde{\varepsilon}_l\|_{L_q(J)} \le \gamma_1 \left\|(\mathbf{I} - \overline{\sigma}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}) x\right\|_{L_q(J)}, \tag{105}$$

$$\|\hat{\varepsilon}_l\|_{L_q(J)} \le \gamma_2 \left\|(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \overline{\sigma}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}) x\right\|_{L_q(J)}. \tag{106}$$

Оценка (99) следует из (103) при $p = q$, так как $\left\|(\mathbf{I} - \overline{\sigma}_h) x\right\|_{L_q(J)} \to 0$ при $h_{\max} \to 0$ (см. следствие 1). Проводя оценку правых частей неравенств (104) – (106) с помощью неравенств (82) и (83), приходим к оценкам (100) – (102).

Теорема доказана.

Теорема 2. 1. Предположим, что $f \in W_1^1(J)$, $1 \le q < \infty$. Тогда справедливы оценки

$$\|\varepsilon_l\|_{L_q(J)} \le 2^{1/q} \gamma_0 \left\|\frac{d}{d\tau} x(\tau)\right\|_{L_1(J)} h_{\max}^{1/q}, \tag{107}$$

$$\|\overline{\varepsilon}_l\|_{C(J)} \le 2\gamma_1 \left\|\frac{d}{d\tau} x(\tau)\right\|_{L_1(J)} h_{\max} (K + \Delta K)(h_{\max}/2)(1 + o(1)), \tag{108}$$

$$\|\tilde{\varepsilon}_l\|_{L_q(J)} \le 2\gamma_1 \left\|\frac{d}{d\tau}(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}) x\right\|_{L_q(J)} h_{\max}, \tag{109}$$

$$\|\hat{\varepsilon}_l\|_{C(J)} \le \sqrt{2} E_2 \left\|\frac{d}{d\tau}(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}) x(\tau)\right\|_{L_2(J)} h_{\max}. \tag{110}$$

2. Предположим, что $f \in W_p^1(J)$, $1 < p < \infty$, $p \le q \le \infty$, $1/s = 1 - 1/p + 1/q$. Тогда справедливы оценки:

$$\|\varepsilon_l\|_{L_q(J)} \le 2^{1/s} \gamma_0 \left\|\frac{d}{d\tau} x(\tau)\right\|_{L_p(J)} h_{\max}^{1/s}, \tag{111}$$

$$\|\overline{\varepsilon}_l\|_{C(\overline{J})} \le 2\gamma_1 E_{p'} \left\|\frac{d}{d\tau} x(\tau)\right\|_{L_p(J)} h_{\max}. \tag{112}$$

Доказательство. Оценки (107) – (110) следуют из неравенств (103) – (106) на основании неравенств (84), (85), (86). Оценки (11) и (112) следуют из неравенств (103) и (104) на основании неравенств (84) и (87).

Теорема доказана.

5. Метод решения сингулярного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с возмущенным оператором на основе метода коллокации, его модификаций и оценки погрешностей

Известно, что в методе Галеркина с оператором $P_l = \overline{l}_h$ приближенное решение $x_l \in \overline{B}_h\left(\overline{J}\right)$ определяется из решения опеараторного уравнения

$$x_l = \varpi \overline{l}_h \left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}\right) x_l + \overline{l}_h f, \tag{113}$$

которое эквивалентно системе

$$x_l\left(\tau_i\right) = \varpi_h \left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}\right) x_l\left(\tau_i\right) + f\left(\tau_i\right),\ 0 \le i \le n. \tag{114}$$

Таким образом (113) – это классический метод коллокации

Отметим, что метод (113) можно рассматривать как метод Галеркина с ортогональным проектированием в $W_2^1(J)$ на $\overline{B}_h\left(\overline{J}\right)$, так как снабжение пространства $W_2^1(J)$ скалярным произведением приводит к тому, что $\overline{l}_h$ становится оператором ортогонального проектирования, т.е. справедливо свойство

$$\tilde{P}_h \frac{d}{d\tau} f(\tau) = \delta_h f(\tau) \quad \forall f \in W_1^1(J). \tag{115}$$

Тогда, сужение оператора $\overline{l}_h$ на $W_2^1(J)$ является оператором ортогонального проектирования на $\overline{B}_h(J)$ в случае, когда $W_2^1(J)$ снабжено скалярным произведением

$$(f, g)_{W_2^1(J)} = f(0)g(0) + \left(\frac{d}{d\tau} f(\tau), \frac{d}{d\tau} g(\tau)\right). \tag{116}$$

Покажем справедливость выражения (117). Для $\forall f \in W_2^1(J)$ и $g \in \overline{B}_h(J)$ получим $\overline{l}_h f(0) = f(0)$, $\frac{d}{d\tau}\overline{l}_h f(\tau) = \delta_h f(\tau)$, $\frac{d}{d\tau} g(\tau) = \delta_h g(\tau)$ тогда

$$\left(\frac{d}{d\tau}\overline{l}_h f(\tau), \frac{d}{d\tau} g(\tau)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \delta_h f_{i-1/2} \delta_h g_{i-1/2} h_i = \sum_{i=1}^{n} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \frac{d}{d\tau} f(\tau) \delta_h g_{i-1/2} d\tau = \left(\frac{d}{d\tau} f(\tau), \frac{d}{d\tau} g(\tau)\right).$$

Поэтому

$$\left(\overline{l}_h f, g\right)_{W_2^1(J)} = (f, g)_{W_2^1(J)} \quad \forall f \in W_2^1(J),\ \forall g \in \overline{B}_h(J).$$

Введем в рассмотрение три модификации метода коллокации:
итерированный метод коллокации

$$\overline{x}_l = \varpi\left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}\right)\overline{l}_h \overline{x}_l + f, \tag{117}$$

метод коллокации Канторовича

$$\tilde{x}_l = \varpi \overline{l}_h \left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}\right) \tilde{x}_l + f, \tag{118}$$

итерированный метод коллокации Канторовича

$$\hat{x}_l = \varpi \overline{y}_h + f, \tag{119}$$

$$\overline{y}_h = \omega \overline{l}_h \left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}\right) \overline{y}_h + \left(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}\right) f.$$

Через x обозначим решение уравнения (1), тогда обозначения для оценок погрешностей методов (117) – (1119) будут следующими:

$$\varepsilon_l = x_l - x,\ \bar{\varepsilon}_l = \bar{x}_l - x,\ \tilde{\varepsilon}_l = \tilde{x}_l - x,\ \hat{\varepsilon}_l = \hat{x}_l - x.$$

Справедлива следующая

Теорема 3. 1. Предположим, что $f \in L_p(J)$, $1 < p < \infty$. Тогда справедливы оценки

$$\left\|\tilde{\varepsilon}_l\right\|_{C(\bar{J})} \le 2^{1/p'}\gamma_1 \left\|x(\tau)\right\|_{L_p(J)} h_{\max}^{1-1/p}(K+\Delta K)(h_{\max}/2)(1+o(1)),\ h_{\max}\to 0, \tag{120}$$

$$\left\|\hat{\varepsilon}_l\right\|_{C(\bar{J})} \le 2^{1/p'}\gamma_2 \left\|x(\tau)\right\|_{L_p(J)} h_{\max}^{1-1/p}(K+\Delta K)(h_{\max}/2)(1+o(1)),\ h_{\max}\to 0. \tag{121}$$

2. Предположим, что $f \in C(\bar{J})$, тогда справедливы оценки:

$$\left\|\varepsilon_l\right\|_{C(\bar{J})} \to 0, \left\|\bar{\varepsilon}_l\right\|_{C(\bar{J})} \to 0\ h_{\max}\to 0, \tag{122}$$

$$\left\|\tilde{\varepsilon}_l\right\|_{C(\bar{J})} \le 2\gamma_1 \left\|x(\tau)\right\|_{C(\bar{J})} h_{\max}(K+\Delta K)(h_{\max}/2)(1+o(1)),\ h_{\max}\to 0, \tag{123}$$

$$\left\|\hat{\varepsilon}_l\right\|_{C(\bar{J})} \le 2\gamma_2 \left\|x(\tau)\right\|_{C(\bar{J})} h_{\max}(K+\Delta K)(h_{\max}/2)(1+o(1)),\ h_{\max}\to 0. \tag{124}$$

Доказательство. На основе леммы 1 при $B = C(\bar{J})$, $\tilde{P}_h = \bar{l}_h$ следует

$$\left\|\varepsilon_l\right\|_{C(\bar{J})} \le \gamma_0 \left\|\left(\mathbf{I} - \bar{l}_h\right)x\right\|_{C(\bar{J})}, \tag{125}$$

$$\left\|\bar{\varepsilon}_l\right\|_{C(\bar{J})} \le \gamma_1 \left\|(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})\left(\mathbf{I} - \bar{l}_h\right)x\right\|_{C(\bar{J})}, \tag{126}$$

$$\left\|\tilde{\varepsilon}_l\right\|_{C(\bar{J})} \le \gamma_1 \left\|\left(\mathbf{I} - \bar{l}_h\right)(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})x\right\|_{C(\bar{J})}, \tag{127}$$

$$\left\|\hat{\varepsilon}_l\right\|_{C(\bar{J})} \le \gamma_2 \left\|(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})\left(\mathbf{I} - \bar{l}_h\right)(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})x\right\|_{C(\bar{J})}. \tag{128}$$

Оценка (122) следует из оценок (125), (126) так как $\left\|\left(\mathbf{I} - \bar{l}_h\right)x\right\|_{C(\bar{J})} \to 0$ в силу равномерной непрерывности решения x. Из оценок (127) и (128) следует, что

$$\left\|\tilde{\varepsilon}_l\right\|_{C(\bar{J})} \le \gamma_1 \left\|\left(\mathbf{I} - \bar{l}_h\right)(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})\right\|_{L_p(J)\to C(\bar{J})} \left\|x\right\|_{L_p(J)},$$

$$\left\|\hat{\varepsilon}_l\right\|_{C(\bar{J})} \le \gamma_2 \left\|(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})\right\|_{C(\bar{J})\to C(\bar{J})} \left\|\left(\mathbf{I} - \bar{l}_h\right)(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})\right\|_{L_p(\bar{J})\to C(\bar{J})} \left\|x\right\|_{L_p(J)}.$$

Применяя оценку (93) к последним двум выражения, приходим к оценкам (120) и (121), из которых следуют при $p = \infty$ оценки (123), (124).

Теорема доказана.

В пространстве $\bar{B}_h(J)$ введем норму по правилу $\|f\|_{C_h(\bar{J})} = \max\limits_{1\le i\le n}\left|f(\tau_i)\right|$.

Справедлива следующая

Теорема 4. 1. Предположим, что $f \in W_1^1(J)$, тогда справедливы оценки

$$\left\|\varepsilon_l\right\|_{C_h(\bar{J})} \le \gamma_1 \left\|\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right\|_{L_1(J)} h_{\max}(K+\Delta K)(h_{\max}/2)(1+o(1)),\ h_{\max}\to 0, \tag{129}$$

$$\left\|\bar{\varepsilon}_l\right\|_{C(\bar{J})} \le \gamma_1 \left\|\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right\|_{L_1(J)} h_{\max}(K+\Delta K)(h_{\max}/2)(1+o(1)),\ h_{\max}\to 0, \tag{130}$$

$$\left\|\tilde{\varepsilon}_l\right\|_{C_h(\bar{J})} \le 4\gamma_2 \left[\left\|\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right\|_{L_1(J)} + \left\|x(\tau)\right\|_{C(\bar{J})}\right] h_{\max}^2 (K+\Delta K)^2 \times$$
$$\times(h_{\max}/2)(1+o(1)),\ h_{\max}\to 0, \tag{131}$$

$$\left\|\hat{\varepsilon}_l\right\|_{C(\bar{J})} \le 4\gamma_2 \left[\left\|\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right\|_{L_1(J)} + \left\|x(\tau)\right\|_{C(\bar{J})}\right] h_{\max}^2 (K+\Delta K)^2 \times$$
$$\times(h_{\max}/2)(1+o(1)),\ h_{\max}\to 0, \tag{132}$$

2. Предположим, что $f \in W_p^1(J), 1< p<\infty$, тогда справедливы оценки:

$$\left\|\varepsilon_l\right\|_{C_h(\bar{J})} \le \frac{1}{4^{1/p'}}\gamma_1 E_{p'} \left\|\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right\|_{L_p(J)} h_{\max}, \tag{133}$$

$$\left\|\varepsilon_l\right\|_{C(\bar{J})} \le \frac{1}{4^{1/p'}}\gamma_0 \left\|\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right\|_{L_p(J)} h_{\max}^{1-1/p}, \tag{134}$$

$$\left\|\bar{\varepsilon}_l\right\|_{C(\bar{J})} \le \frac{1}{4^{1/p'}}\gamma_1 E_{p'} \left\|\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right\|_{L_p(J)} h_{\max}. \tag{135}$$

Доказательство. Применим к уравнению (8) оператор $\bar{l}_h$, получим

$$\bar{l}_h x = \varpi \bar{l}_h (\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})x + \bar{l}_h f. \tag{136}$$

Из (113) вычтем равенство (136), имеем

$$x_l - \bar{l}_h x = \varpi \bar{l}_h(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})(x_l - \bar{l}_h x) - \varpi \bar{l}_h \bar{l}_h (\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})(\mathbf{I}-\bar{l}_h)x.$$

Откуда

$$\left\|x_l - \bar{l}_h x\right\|_{C(\bar{J})} \le \varpi \left\|x_l - \bar{l}_h x\right\|_{C(\bar{J})} + \varpi \left\|(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})(\mathbf{I}-\bar{l}_h)x\right\|_{C(\bar{J})}.$$

С учетом того, что $\left\|x_l - \bar{l}_h x\right\|_{C(\bar{J})} = \left\|\varepsilon^h\right\|_{C_h(\bar{J})}$ получим

$$\left\|\varepsilon^h\right\|_{C_h(\bar{J})} \le \gamma_1 \left\|(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})(\mathbf{I}-\bar{l}_h)x\right\|_{C(\bar{J})}. \tag{137}$$

Проводя оценку правой части неравенств (137) и (126) с помощью неравенств (94) и (95), получаем оценки (129), (130), (133) и (135). В оценке (137) проведем замену x_l, x и $f \to y_l,\ y = (\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})x$ и $(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})f$, в результате приходим к оценке

$$\left\|y_l \to y\right\|_{C_h(\bar{J})} \le \gamma_1 \left\|(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})(\mathbf{I}-\bar{l}_h)(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})x\right\|_{C(\bar{J})}. \tag{138}$$

Поскольку $\tilde{\varepsilon}_l = \varpi(y_l - y)$, то неравенства (131) и (132) следуют из оценок (138), (128) и (129), а из оценок (125) и (90) следует оценка (134).

Далее рассмотрим теорему об оценках производных погрешностей модификаций методов коллокации.

Из $f \in W_p^1(J), 1 \le p < \infty$ следует, что для решения x справедливо свойство $x \in W_p^1(J)$, причем $(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})x \in W_q^1(J)$ для всех $q \in [1, \infty)$.

Справедлива следующая

Теорема 5. 1. Предположим, что $f \in W_1^1(J)$, $1 < p < \infty$ тогда справедливы оценки

$$\left\|\delta_h \tilde{\varepsilon}_l\right\|_{L_q(J)} \le c_q \left\|\frac{d}{d\tau}(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})x(\tau)\right\|_{L_q(J)} h_{\max}(K+\Delta K)(h_{\max}/2)(1+o(1)), \tag{139}$$

$h_{\max} \to 0,$

$$\left\|\frac{d}{d\tau}\hat{\varepsilon}_l\right\|_{L_q(J)} \le c_q \left\|\frac{d}{d\tau}(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})x(\tau)\right\|_{L_q(J)} h_{\max}(K+\Delta K)(h_{\max}/2)(1+o(1)), \tag{140}$$

$h_{\max} \to 0,$

где $c_1 = \gamma_2(\gamma_1+2)$ и $c_q = \gamma_2$ при $1 < q < \infty$.

2. Предположим, что $f \in W_p^1(J), 1 \le p \le q < \infty$, $1/s = 1 - 1/p + 1/q$, тогда справедливы оценки:

$$\left\|\delta_h \varepsilon_l\right\|_{L_q(J)} \le c_{p,q} \left\|\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right\|_{L_q(J)} h_{\max}^{1/s}(K+\Delta K)(h_{\max}/2)(1+o(1)), \tag{141}$$

$h_{\max} \to 0,$

$$\left\|\frac{d}{d\tau}\bar{\varepsilon}_l\right\|_{L_q(J)} \le c_{p,q} \left\|\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right\|_{L_p(J)} h_{\max}^{1/s}(K+\Delta K)(h_{\max}/2)(1+o(1)), \tag{142}$$

$h_{\max} \to 0,$

где $c_{p,q} = \gamma_1(\gamma_1+2)$ при $p = q = 1$ и $c_{p,q} = \gamma_1 2^{1/s}$ при остальных значениях p и q.

Доказательство. Производная $\frac{d}{d\tau}x(\tau)$ решения операторного уравнения (8) удовлетворяет следующему выражению

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\tau}x(\tau) = \varpi(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})\frac{d}{d\tau}x(\tau) + \varpi(K+\Delta K)x(0) - \\ -\varpi(K+\Delta K)^* x(\tau^*) + \frac{d}{d\tau}f(\tau).\end{gathered} \tag{143}$$

Применим оператор ортогонального проектирования (проектор Галеркина) $\tilde{P}_h$ к уравнению (143) и учитывая, что $\tilde{P}_h \frac{d}{d\tau} = \delta_h$, приходим к равенству

$$\begin{gathered}\delta_h x = \varpi\tilde{P}_h(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T})\frac{d}{d\tau}x(\tau) + \varpi\tilde{P}_h(K+\Delta K)x(0) - \\ -\varpi\tilde{P}_h(K+\Delta K)^* x(\tau_*) + \delta_h f.\end{gathered} \tag{144}$$

Продифференцируем операторное уравнение (123), на основе выражений $\frac{d}{d\tau}\overline{l}_h = \delta_h = \tilde{P}_h \frac{d}{d\tau}$ и (11), получим равенство

$$\delta_h x_l = \varpi \tilde{P}_h \frac{d}{d\tau}\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)x_l + \delta_h f = \varpi \tilde{P}_h \left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\frac{d}{d\tau}x_l +$$

$$+\varpi \tilde{P}_h \left(K+\Delta K\right)x_l\left(0\right) - \varpi \tilde{P}_h \left(K+\Delta K\right)^* x_l\left(\tau_*\right) + \delta_h f.$$

Из последнего равенства вычтем (144), получим

$$\delta_h \varepsilon_l = \varpi \tilde{P}_h \left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\delta_h \varepsilon_l + \varpi \tilde{P}_h \left(K+\Delta K\right)\varepsilon_l\left(0\right) -$$

$$-\varpi \tilde{P}_h \left(K+\Delta K\right)^* \varepsilon_l\left(\tau_*\right) - \varpi \tilde{P}_h \left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)\frac{d}{d\tau}x\left(\tau\right).$$

Откуда

$$\left\|\delta_h \varepsilon_l\right\|_{L_q(J)} \le \varpi \left\|\delta_h \varepsilon_l\right\|_{L_q(J)} + 2\varpi \left\|\left(K+\Delta K\right)\right\|_{L_q(R)} \left\|\varepsilon_l\right\|_{C_h(\bar{J})} +$$

$$+\varpi \left\|\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)\frac{d}{d\tau}x\left(\tau\right)\right\|_{L_q(J)}.$$

Следовательно

$$\left\|\delta_h \varepsilon_l\right\|_{L_q(J)} \le \gamma_1 2^{1-1/q} E_q \left\|\varepsilon_l\right\|_{C_h(J)} + \gamma_1 \left\|\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)\right\|_{L_p(R)\to L_q(R)} \left\|\frac{d}{d\tau}x\right\|_{L_p(J)}. \qquad (145)$$

Продифференцируем операторное уравнение (123), на основе выражения $\overline{l}_h \overline{x}_l = x_l$, получим равенство

$$\frac{d}{d\tau}\overline{x}_l = \varpi\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\tilde{P}_h \frac{d}{d\tau}\overline{x}_l + \varpi\left(K+\Delta K\right)x_l\left(0\right) - \varpi\left(K+\Delta K\right)^* x_l\left(\tau_*\right) + \frac{d}{d\tau}f.$$

Из последнего равенства вычтем (143), получим

$$\frac{d}{d\tau}\overline{\varepsilon}_l = \varpi\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\tilde{P}_h \frac{d}{d\tau}\overline{\varepsilon}_l + \varpi\left(K+\Delta K\right)\varepsilon_l\left(0\right) - \varpi\left(K+\Delta K\right)^* x_l\left(\tau_*\right) -$$

$$-\varpi\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)\frac{d}{d\tau}x.$$

Откуда

$$\left\|\frac{d}{d\tau}\overline{\varepsilon}_l\right\|_{L_q(J)} \le \varpi \left\|\frac{d}{d\tau}\overline{\varepsilon}_l\right\|_{L_q(J)} + 2\varpi \left\|\left(K+\Delta K\right)\right\|_{L_q(R)} \left\|\varepsilon_l\right\|_{C(\bar{J})} +$$

$$+\varpi \left\|\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)\right\|_{L_p(J)\to L_q(J)} \left\|\frac{d}{d\tau}x\right\|_{L_p(J)}.$$

Следовательно

$$\left\|\frac{d}{d\tau}\overline{\varepsilon}_l\right\|_{L_q(J)} \le \gamma_1 2^{1-1/q} E_q \left\|\varepsilon_l\right\|_{C(\bar{J})} + \gamma_1 \left\|\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)\right\|_{L_p(R)\to L_q(R)} \left\|\frac{d}{d\tau}x\right\|_{L_p(J)}. \qquad (146)$$

Применим оценку

$$\left\|\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{I}-\tilde{P}_h\right)\right\|_{L_p(R)\to L_q(R)} \le 2^{2/s-1/q} h_{\max}^{1/s}\left(K+\Delta K\right)\left(h_{\max}/2\right)\left(1+o(1)\right),$$

$h_{\max}\to 0,$

а так же оценки (11) и (146), приходим от (129) и (133) к оценкам (141) и (142).

Отметим, что $\tilde{\varepsilon}_l=\varpi\left(y_l-y\right)$, $\hat{\varepsilon}_l=\varpi\left(\overline{y}_l-y\right)$, где $y=\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)x$ есть решение уравнения

$$y=\varpi\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)y+\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)f,$$

причем y_l и $\overline{y}_l$ – приближенные решения рассматриваемого уравнения, определенные по методу коллокации и итерированным методом коллокации. Применяя к y_l-y в качестве ε_l и к $\overline{y}_l-y$ в качестве $\overline{\varepsilon}_l$ оценки (141) и (142) с $p=q$, приходим к оценкам (139) и (140).

6. Численная реализация метода Галеркина решения сингулярного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с возмущенным оператором в пространстве финитных функций на основе усредняющего и линейного интерполирования операторов.

Рассмотрим операторное уравнение (2) в пространстве кусочно линейных функций с оператором проектирования $\tilde{P}_h=\overline{\sigma}_h$, где решение этого уравнения определяется в виде $x_l\in\overline{B}_h\left(J\right)$:

$$x\cong\overline{\sigma}_h\left[x_l\right]\equiv\varpi\overline{\sigma}_h\left[\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)x_l\right]+\overline{\sigma}_h\left[f\right]. \tag{147}$$

Данное уравнение эквивалентно следующей системе уравнений

$$x_l\left(\tau_i\right)=\varpi h^{-1}\left(\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right)x_l,\overline{\varphi}_i^h\left(\tau\right)\right)_{L_2(J)}+\overline{\sigma}_h f\left(\tau_i\right),\ 0\le i\le n. \tag{148}$$

Система уравнений (148) в матричной форме записи имеет вид

$$\mathbf{C}^{x_l}=\varpi\left(\mathbf{\Lambda}+\Delta\mathbf{\Lambda}\right)\mathbf{C}^{x_l}+\mathbf{C}^f, \tag{149}$$

где

$$\mathbf{C}^{x_l}=\begin{pmatrix}c_1^{x_l} & c_2^{x_l} & \dots & c_n^{x_l}\end{pmatrix}^T,$$

$$\mathbf{C}^f=\begin{pmatrix}c_1^f & c_2^f & \dots & c_n^f\end{pmatrix}^T,\ c_i^f=h^{-1}\int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f\left(\tau\right)\overline{\varphi}_i^h d\tau,\ \ 1\le i\le n.$$

Матрицы $\mathbf{\Lambda}$ и $\Delta\mathbf{\Lambda}$, представляющие собой конечномерный вариант интегрального оператора в уравнении (2), имеют вид

$$\lambda_{ij}=\frac{1}{2h}\int\limits_0^T\int\limits_0^T K\left(t-\tau\right)\overline{\varphi}_j^h\left(\tau\right)\overline{\varphi}_i^h\left(t\right)dtd\tau,\Delta\lambda_{ij}=\frac{1}{2h}\int\limits_0^T\int\limits_0^T \Delta K\left(t-\tau\right)\overline{\varphi}_j^h\left(\tau\right)\overline{\varphi}_i^h\left(t\right)dtd\tau. \tag{150}$$

При $i=0,\ 0\le j\le n$ последние формулы для конечномерных операторов $\mathbf{\Lambda}$ и $\Delta\mathbf{\Lambda}$ принимают вид

$$\lambda_{0j} = \chi_j = \frac{1}{2h}\int_0^T \left[\int_0^h K(t-\tau)\overline{\varphi}_0^h(t)\,dt \right] \overline{\varphi}_j^h(\tau)\,d\tau,$$
$$\Delta\lambda_{0j} = \Delta\chi_j = \frac{1}{2h}\int_0^T \left[\int_0^h \Delta K(t-\tau)\overline{\varphi}_0^h(t)\,dt \right] \overline{\varphi}_j^h(\tau)\,d\tau, \tag{151}$$

а при $j=n,\ 0 \le i \le n$ с учетом замены переменных $s = T-t,\ \overline{s} = T-\tau$ – вид

$$\widehat{\lambda}_{in} = \chi_{n-i} = \frac{1}{2h}\int_0^T \left[\int_0^h K(s-\overline{s})\overline{\varphi}_0^h(\overline{s})\,d\overline{s} \right] \overline{\varphi}_{n-i}^h(s)\,ds,$$
$$\Delta\widehat{\lambda}_{in} = \Delta\chi_{n-i} = \frac{1}{2h}\int_0^T \left[\int_0^h \Delta K(s-\overline{s})\overline{\varphi}_0^h(\overline{s})\,d\overline{s} \right] \overline{\varphi}_{n-i}^h(s)\,ds. \tag{152}$$

Пусть $1 \le i \le j < n$. С учетом замены $s = t - t_i,\ \overline{s} = \overline{\tau} - \tau_i$, (152) приводятся к виду

$$\lambda_{ij} = \beta_{j-i} = \frac{1}{2h}\int_{\tau_{j-i-1}}^{\tau_{j-i+1}} \left[\int_{-h}^h K(s-\overline{s})\overline{\varphi}_0^h(\overline{s})\,d\overline{s} \right] \overline{\varphi}_{j-i}^h(s)\,ds, \tag{153}$$

$$\Delta\lambda_{in} = \Delta\beta_{j-i} = \frac{1}{2h}\int_{\tau_{j-i-1}}^{\tau_{j-i+1}} \left[\int_{-h}^h \Delta K(s-\overline{s})\overline{\varphi}_0^h(\overline{s})\,d\overline{s} \right] \overline{\varphi}_{j-i}^h(s)\,ds.$$

Из последнего следует, что $\widehat{\lambda}_{ij}$ принимают постоянные значения равные β_k для всех $\forall\, 1 \le i \le j < n$, таких что $j - i = k$, аналогично и для $\Delta\widehat{\lambda}_{ij}$. Таким образом, матрицы $\mathbf{\Lambda}$ и $\Delta\mathbf{\Lambda}$ имеют вид:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \chi_0 & \chi_1 & \chi_2 & \cdots & \chi_{n-1} & \chi_n \\ \chi_1 & \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-2} & \chi_{n-1} \\ \chi_2 & \beta_1 & \beta_0 & \cdots & \beta_{n-3} & \chi_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \chi_{n-1} & \beta_{n-2} & \beta_{n-3} & \cdots & \beta_0 & \chi_1 \\ \chi_n & \chi_{n-1} & \chi_{n-2} & \cdots & \chi_1 & \chi_0 \end{pmatrix}, \tag{154}$$

$$\Delta\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Delta\chi_0 & \Delta\chi_1 & \Delta\chi_2 & \cdots & \Delta\chi_{n-1} & \Delta\chi_n \\ \Delta\chi_1 & \Delta\beta_0 & \Delta\beta_1 & \cdots & \Delta\beta_{n-2} & \Delta\chi_{n-1} \\ \Delta\chi_2 & \Delta\beta_1 & \Delta\beta_0 & \cdots & \Delta\beta_{n-3} & \Delta\chi_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Delta\chi_{n-1} & \Delta\beta_{n-2} & \Delta\beta_{n-3} & \cdots & \Delta\beta_0 & \Delta\chi_1 \\ \Delta\chi_n & \Delta\chi_{n-1} & \Delta\chi_{n-2} & \cdots & \Delta\chi_1 & \Delta\chi_0 \end{pmatrix}. \tag{155}$$

Выражения для коэффициентов $\chi_k, \beta_k, \Delta\chi_k$ и $\Delta\beta_k$ матриц (154) и (155), с учетом формул

$$K_k(t) = -K'_{k+1}(t), \quad \Delta K_k(t) = -\Delta K'_{k+1}(t),$$

и интегрирования по частям имеют следующий вид:

$$\beta_0 = \frac{2}{3}K_2(0) - \frac{2}{h^2}K_4(0) + \frac{1}{h^3}\left[3K_5(0) - 4K_5(h) + K_5(2h)\right],$$

$$\beta_1 = \frac{1}{6}K_2(0) + \frac{1}{h^2}K_4(0) + \frac{1}{2h^3}\left[-4K_5(0) + 7K_5(h) - 4K_5(2h) + K_5(3h)\right],$$

$$\beta_k = \frac{1}{2h^3}\left[K_5(\tau_{k-2}) - 4K_5(\tau_{k-1}) + 6K_5(\tau_k) - 4K_5(\tau_{k+1}) + K_5(\tau_{k+2})\right],\ 2 \le k < n-1,$$

$$\chi_0 = \frac{1}{3}K_2(0) - \frac{1}{2h}K_3(0) - \frac{1}{h^2}K_4(h) + \frac{1}{h^3}\left[K_5(0) - K_5(h)\right],$$

$$\chi_1 = \frac{1}{6}K_2(0) + \frac{1}{2h^2}\left[K_4(0) + 2K_4(h) - K_4(2h)\right] +$$

$$+\frac{1}{2h^3}\left[-3K_5(0) + 4K_5(h) - K_5(h)\right] + \frac{1}{h^3}\left[K_5(0) - K_5(2h)\right],$$

$$\chi_k = -\frac{1}{2h^2}\left[K_4(\tau_{k-1}) - 2K_4(\tau_k) + K_4(\tau_{k+1})\right] +$$

$$+\frac{1}{2h^3}\left[K_5(\tau_{k-2}) - 3K_5(\tau_{k-1}) + 3K_5(\tau_k) - K_5(\tau_{k+1})\right],\ 2 \le k < n,$$

$$\chi_n = \frac{1}{2h}K_3(\tau_n) - \frac{1}{h^2}\left[K_4(\tau_{n-1}) - K_4(\tau_n)\right] + \frac{1}{2h^3}\left[K_5(\tau_{n-3}) - 2K_5(\tau_{n-2}) + K_5(\tau_{n-1})\right].$$

Аналогичные выражения имеют место быть и для коэффициентов $\Delta\chi_k$ и $\Delta\beta_k$ матрицы (155), например:

$$\Delta\beta_0 = \frac{2}{3}\Delta K_2(0) - \frac{2}{h^2}\Delta K_4(0) + \frac{1}{h^3}\left[3\Delta K_5(0) - 4\Delta K_5(h) + \Delta K_5(2h)\right].$$

Введем следующее обозначение: $\Delta\mathbf{A}_l = \mathbf{I}_l - \varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})$, где $\mathbf{I}_l$ – единичная матрица размерности $\dim\{\mathbf{I}_l\} = l \times l$, тогда систему (115), с учетом введеного обозначения, можно переписать в виде

$$\Delta\mathbf{A}_l\mathbf{C}^{x_l} = \mathbf{C}^f. \tag{156}$$

Матрица $\Delta\mathbf{A}_l$ – симметрична и теплицева.

Рассмотрим операторное уравнение (2) в пространстве кусочно линейных функций с оператором проектирования $\tilde{P}_h = \bar{l}_h$, где решение этого уравнения определяется в виде $x_l \in \bar{B}_h(J)$:

$$x \cong \bar{l}_h[x_l] \equiv \varpi\bar{l}_h\left[(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})x_l\right] + \bar{l}_h[f]. \tag{157}$$

Последняя система эквивалентна системе уравнений вида

$$x_l(\tau_i) = \varpi(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})x_l(\tau_i) + f(\tau_i),\ 0 \le i \le n. \tag{158}$$

Покажем, каким образом задачу (157) возможно свести к задаче обращения оператора $\mathbf{I} - \tilde{P}_h\varpi(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})$ на пространстве кусочно – постоянных функций, т.е. к решению интервальной системы линейных алгебраических уравнений с теплицевой матрицей $\Delta\mathbf{A}_l$, возникающей при применении метода Галеркина с использованием оператора $\tilde{P}_h$. Для решения подобной системы с такой матрицей будем использовать формальный подход, основанный на разложении оператора системы $\mathbf{I} - \tilde{P}_h \varpi(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})$ в степенной ряд, данный подход будет рассмотрен в следующем параграфе.

Функция $x_l \in \bar{B}_h(J)$ однозначно определяется производной $\frac{d}{d\tau} x_l = \delta_h x_l$, а так же $x_l(0)$, причем

$$x_l(\tau) = x_l(0) + \int_0^\tau \delta_h x_l(s)\, ds. \tag{159}$$

Продифференцируем уравнение (157), получим

$$\delta_h x_l = \varpi \tilde{P}_h(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})\delta_h x_l + \varpi \tilde{P}_h(K + \Delta K) x_l(0) - \varpi \tilde{P}_h(K + \Delta K)^* x_l(\tau_*) + \delta_h f. \tag{160}$$

С учтом того, что

$$x_l(0) \equiv \varpi(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}) x_l(0) + f(0), \tag{161}$$

Задача (157) сводится к эквивалентной системе (159) – (161) относительно функции $\delta_h x_l$ и значений $x_l(0)$, $x_l(\tau_*)$. Разрешая уравнение (160) относительно $\delta_h x_l$, получим

$$\delta_h x_l = x_l(0) y - x_l(\tau_*) y^* + z, \tag{162}$$

где y, y^*, z – кусочно-постоянные функции, определяемые из выражений

$$y = \varpi\left(\mathbf{I} - \varpi \tilde{P}_h(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})\right)^{-1} \tilde{P}_h(K + \Delta K), \;\; y^* = \varpi\left(\mathbf{I} - \varpi \tilde{P}_h(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})\right)^{-1} \tilde{P}_h(K + \Delta K)^*,$$

$$z = \left(\mathbf{I} - \varpi \tilde{P}_h(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})\right)^{-1} \delta_h f.$$

Учитывая, что $\tilde{P}_h\left(K(\tau) + \Delta K(\tau)\right)^* = \tilde{P}_h\left(K(\tau_* - \tau) + \Delta K(\tau_* - \tau)\right)$, следует $y^*(\tau) = y(\tau_* - \tau)$. Из последнего видно, что вычислению подлежат только функции y и z, а для этого требуется решить систему уравнений (157).

Из (159) и (162) следуют выражения

$$x_l = x_l(0) + x_l(0) Y - x_l(\tau_*) Y^* + Z, \tag{163}$$

$$x_l(\tau_*) = x_l(0) + x_l(0) Y(\tau_*) - x_l(\tau_*) Y^*(\tau_*) + Z(\tau_*),$$

где

$$Y(\tau) = \int_0^\tau y(\tau')\, d\tau', \;\; Y^*(\tau) = \int_0^\tau y^*(\tau')\, d\tau', \;\; Z^*(\tau) = \int_0^\tau z(\tau')\, d\tau'.$$

Учитывая, что

$$(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}) x_l(0) = \left((K + \Delta K), x_l\right) = \left((K + \Delta K), 1 + Y\right) x_l(0) -$$

$$-\left((K + \Delta K), Y^*\right) x_l(\tau_*) + \left((K + \Delta K), Z\right),$$

$$Y(\tau_*) = Y^*(\tau_*) = (y, 1), \;\; Z(\tau_*) = (z, 1),$$

преобразуем уравнения (161) и (163) к виду

$$\left(1-\varpi\left(\left(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}\right),1+Y\right)\right)x_l\left(0\right)+\varpi\left(\left(K+\Delta K\right),Y^*\right)x_l\left(\tau_*\right)= \tag{164}$$
$$\varpi\left(\left(K+\Delta K\right),Z\right)+f\left(0\right),$$

$$x_l\left(\tau_*\right)=x_l\left(0\right)+\frac{\left(z,1\right)}{1+\left(y,1\right)}. \tag{165}$$

Разрешая полученную систему относительно $x_l\left(\tau_*\right)$ и $x_l\left(0\right)$ и подставляя найденное значение $x_l\left(0\right)$ в (162), определяем x_l.

Итак, алгоритм нахождения неизвестной x_l, следующий:

1. Вычисление y и z на основе формального подхода к разрешению матричного уравнения с возмущенным оператором.
2. Разрешение системы (164) и (165).
3. Разрешение уравнения (162).
4. Вычисление x_l по формуле (159).

Следует отметить, что все операции согласно рассмотреному алгоритму проводятся в интервальной постановке.

7. Переход от скалярного дифференциального уравнения с интервальными параметрами к сингулярному интегральному уравнению с возмущенным оператором.

Для замкнутости изложения материала статьи, покажем связь между сингулярным интегральным уравнением с возмущенным оператором (1) и обыкновенным дифференциальным уравнением с интервальными параметрами.

Пусть линейный элемент динамической системы с постоянными параметрами описывается скалярным дифференциальным уравнением n-го порядка вида:

$$x^{(n)}\left(t\right)+\sum_{i=0}^{n-1}a_i^f x^{(i)}\left(t\right)=\sum_{j=0}^{m}b_j^r\varepsilon^{(j)}\left(t\right), \tag{166}$$

где все коэффициенты $a_i^f, i=\overline{0,n-1}; b_j^r, j=\overline{0,m}$ представимы в виде;

$$a_i^f=a_i+\Delta a_i^f,\ b_j^r=b_j+\Delta b_j^r,\ f=\overline{1,N},\ r=\overline{1,N}, \tag{167}$$

a_i и b_j – номинальные значения коэффициентов, а Δa_i^f и Δb_j^r – возможные отклонения от этих значений, $a_n=1$; $N-$размерность выборки, $y\left(t\right),x\left(t,\delta\right)$ – соответственно входной и выходной сигналы системы, зависящий от параметрической неопределенности δ. В силу условия технической реализуемости системы управления, считаем $n\geq m$.

Рассмотрим вопрос перехода от дифференциального уравнения (166) при нулевых начальных условиях к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода

$$x\left(t\right)+\int_0^t K_x^f\left(t,\tau\right)x\left(\tau\right)d\tau=\int_0^t K_y^r\left(t,\tau\right)y\left(\tau\right)d\tau.$$

Интегрируя n раз левую и правую части уравнения (166), получим

$$\int_0^t \ldots \int_0^{\tau_{n-1}} x^{(n)}(\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n + \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^t \ldots \int_0^{\tau_{n-1}} a_k^f x^{(k)}(\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\int_0^t \ldots \int_0^{\tau_{n-1}} b_k^r y^{(k)}(\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n.$$

В силу нулевых начальных условий

$$\int_0^t \ldots \int_0^{\tau_{n-1}} x^{(n)}(\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n = x(t).$$

Рассмотрим n-кратный интеграл

$$\int_0^t \ldots \int_0^{\tau_{n-1}} a_k^f x^{(k)}(\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n = \int_0^t \ldots \int_0^{\tau} a_k^f x^{(k)}(\tau_n)(d\tau)^n =$$

$$= \int_0^t \ldots \int_0^{\tau} a_k^f x^{(k)}(\tau_n)(d\tau)^{n-1}d\tau.$$

Тогда, из последнего следует

$$\int_0^t \ldots \int_0^{\tau} a_k^f x^{(k)}(\tau_n)(d\tau)^{n-1}d\tau = \int_0^t \ldots \int_0^{\tau} a_k^f x^{(k)}(\tau_n)d^{(n-1)}\left[(t-\tau)^{n-1}\right]d\tau =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-1} a_k^f x^{(k)}(\tau)d\tau.$$

Из последней зависимости можно получить соотношение

$$x(t) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-1} a_k^f x^{(k)}(\tau)d\tau = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-1} b_k^r y^{(k)}(\tau)d\tau.$$

Интегралы в левой части последнего соотношения путем интегрирования по частям можно записать так:

$$\int_0^t (t-\tau)^{n-1} a_k^f x^{(k)}(\tau)d\tau = \int_0^t \underbrace{(t-\tau)^{n-1} a_k^f}_{u}\, \underbrace{d\left[x^{(k-1)}(\tau)\right]}_{dv} =$$

$$= (t-\tau)^{n-1} a_k^f x^{(k-1)}(\tau)\Big|_0^t - \int_0^t x^{(k-1)}(\tau)\left[(t-\tau)^{n-1} a_k^f\right]' d\tau =$$

$$= (-1)\int_0^t \underbrace{\left[(t-\tau)^{n-1} a_k^f\right]'}_{u}\, \underbrace{d\left[x^{(k-2)}(\tau)\right]}_{dv} = \underbrace{(-1)\left[(t-\tau)^{n-1} a_k^f\right]' x^{(k-2)}(\tau)\Big|_0^t}_{=0} -$$

$$-(-1)\int_0^t x^{(k-2)}(\tau)\left[(t-\tau)^{n-1} a_k^f\right]'' d\tau =$$

$$=(-1)^2\int_0^t \underbrace{\left[(t-\tau)^{n-1}a_k^f\right]''}_{u}\underbrace{d\left[x^{(k-3)}(\tau)\right]}_{dv}=\ldots=(-1)^{k-1}\int_0^t x'(\tau)\left[(t-\tau)^{n-1}a_k^f\right]^{(k-1)}d\tau=$$

$$=\underbrace{(-1)^{k-1}\left[(t-\tau)^{n-1}a_k^f\right]^{(k-1)}x'(\tau)\Big|_0^t}_{=0}-(-1)^{k-1}\int_0^t x(\tau)\left[(t-\tau)^{n-1}a_k^f\right]^{(k)}d\tau.$$

Используя формулу Лейбница

$$\frac{d^\nu}{d\tau^\nu}\left[a_k^f(t-\tau)^n\right]\Big|_{\tau=t}=\sum_{l=0}^{\nu}C_\nu^l a_\nu^{f(l)}\left[(t-\tau)^n\right]^{(\nu-l)}=0,\ \nu\le n-1;$$

$$x^{(\nu)}(\tau)\Big|_{\tau=0}=0,\ \nu=\overline{0,n-1},$$

получим

$$\int_0^t(t-\tau)^{n-1}a_k^f x^{(k)}(\tau)d\tau=(-1)^k\int_0^t x(\tau)\frac{d^k}{d\tau^k}\left[a_k^f(t-\tau)^{n-1}\right]d\tau$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t(t-\tau)^{n-1}a_k^f x^{(k)}(\tau)d\tau=\int_0^t x(\tau)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(n-1)!}\frac{d^k}{d\tau^k}\left[a_k^f(t-\tau)^{n-1}\right]d\tau.$$

Аналогично можно показать, что

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t(t-\tau)^{n-1}b_k^r y^{(k)}(\tau)d\tau=\int_0^t y(\tau)\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{(n-1)!}\frac{d^k}{d\tau^k}\left[b_k^r(t-\tau)^{n-1}\right]d\tau.$$

Получим интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода, эквивалентное ДУ (166) которое имеет вид:

$$x(t)+\int_0^t\underbrace{\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(-1)^\nu}{(n-1)!}\left(a_\nu+\Delta a_\nu^f\right)\frac{d^\nu}{d\tau^\nu}(t-\tau)^{n-1}\right\}}_{K_x^f(t,\tau)}x(\tau)d\tau=$$

$$=\int_0^t\underbrace{\left\{\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{(n-1)!}\left(b_k+\Delta b_k^r\right)\frac{d^k}{d\tau^k}(t-\tau)^{n-1}\right\}}_{K_y^r(t,\tau)}\varepsilon(\tau)d\tau,\ f,r=\overline{1,N}, \tag{168}$$

Преобразуем уравнение Вольтерра 2-го рода к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода

$$x(t)+\int_0^T \underbrace{\left\{1(t-\tau)\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(-1)^\nu}{(n-1)!}\left(a_\nu+\Delta a_\nu^f\right)\frac{d^\nu}{d\tau^\nu}(T-\tau)^{n-1}\right\}}_{K_x^f(t,\tau)}x(\tau)d\tau=$$

$$=\int_0^T \underbrace{\left\{1(t-\tau)\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{(n-1)!}\left(b_k+\Delta b_k^r\right)\frac{d^k}{d\tau^k}(T-\tau)^{n-1}\right\}}_{K_y^r(t,\tau)}\varepsilon(\tau)d\tau,\ f,r=\overline{1,N}, \tag{169}$$

Получим аппроксимированную модель уравнения (169), для этого разложим коэффициенты исходного интегрального уравнения (169), функции $\varepsilon(t), x(t)$ по ортогональному базису $\mathbf{\Phi}(t)$:

$$\mathbf{\Phi}(t)=\left[\varphi_0(t)\quad \varphi_1(t)\quad \dots\quad \varphi_{l-1}(t)\right]^{\mathrm{T}}; \tag{170}$$

$$x(t)=\mathbf{\Phi}^T(t)\mathbf{C}^x;\ \varepsilon(t)=\mathbf{\Phi}^T(t)\mathbf{C}^\varepsilon; \tag{171}$$

$$K_x^f(t,\tau)=\mathbf{\Phi}^T(t)\mathbf{A}_x^f\mathbf{\Phi}^T(t); \tag{172}$$

$$K_y^r(t,\tau)=\mathbf{\Phi}^T(t)\mathbf{B}_y^r\mathbf{\Phi}^T(t);\ f,\ r=\overline{1,N}, \tag{173}$$

где $\mathbf{A}_x^f$ и $\mathbf{B}_y^r$, с учетом (169), представимы в виде

$$\mathbf{A}_x^f=\mathbf{A}_x+\Delta\mathbf{A}_x^f;\ \mathbf{B}_\varepsilon^r=\mathbf{B}_\varepsilon+\Delta\mathbf{B}_\varepsilon^r;\ f,\ r=\overline{1,N};$$

$$\mathbf{A}_x^f=\underbrace{\left[\int_0^T\int_0^t \bar{K}_x(T,\tau)\varphi_i(t)\varphi_j(\tau)dtd\tau\right]\Bigg|_{i,j=0}^{l-1}}_{\mathbf{A}_x}+\underbrace{\left[\int_0^T\int_0^t \Delta K_x^f(T,\tau)\varphi_i(t)\varphi_j(\tau)dtd\tau\right]\Bigg|_{i,j=0}^{l-1}}_{\Delta\mathbf{A}_x^f}; \tag{174}$$

$$\mathbf{B}_x^r=\underbrace{\left[\int_0^T\int_0^t \bar{K}_y(T,\tau)\varphi_i(t)\varphi_j(\tau)dtd\tau\right]\Bigg|_{i,j=0}^{l-1}}_{\mathbf{B}_y}+\underbrace{\left[\int_0^T\int_0^t \Delta K_y^r(T,\tau)\varphi_i(t)\varphi_j(\tau)dtd\tau\right]\Bigg|_{i,j=0}^{l-1}}_{\Delta\mathbf{B}_y^r}. \tag{175}$$

$$\bar{K}_x(t,\tau)=1(t-\tau)\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(-1)^\nu}{(n-1)!}\bar{a}_\nu\frac{d^\nu}{d\tau^\nu}(T-\tau)^{n-1};$$

$$\Delta K_x^f(t,\tau)=1(t-\tau)\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(-1)^\nu}{(n-1)!}\Delta a_\nu^f\frac{d^\nu}{d\tau^\nu}(T-\tau)^{n-1}; \tag{176}$$

$$\bar{K}_y(t,\tau)=1(t-\tau)\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^\nu}{(n-1)!}\bar{b}_k\frac{d^\nu}{d\tau^\nu}(T-\tau)^{n-1};$$

$$\Delta K_y^r(t,\tau)=1(t-\tau)\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^\nu}{(n-1)!}\Delta b_k^r\frac{d^\nu}{d\tau^\nu}(T-\tau)^{n-1}; \tag{177}$$

В соответствии с представлением (171) – (177), уравнение (169) запишется следующим образом:

$$\mathbf{\Phi}^T(t)\mathbf{C}^x + \mathbf{\Phi}^T(t)\mathbf{A}_x^f\int_0^T \mathbf{\Phi}(\tau)\mathbf{\Phi}^T(\tau)d\tau\mathbf{C}^x =$$

$$= \mathbf{\Phi}^T(t)\mathbf{B}_\varepsilon^r\int_0^T \mathbf{\Phi}(\tau)\mathbf{\Phi}^T(\tau)d\tau\mathbf{C}^\varepsilon,\ f,\ r = \overline{1,N}.$$

Тогда, в силу линейной независимости базисных функций, последнее уравнение равносильно матричному уравнению относительно спектральных характеристик входа и выхода динамической системы (169)

$$\mathbf{C}^x + \left(\mathbf{A}_x + \Delta\mathbf{A}_x^f\right)\mathbf{C}^x = \left(\mathbf{B}_\varepsilon + \Delta\mathbf{B}_\varepsilon^r\right)\mathbf{C}^\varepsilon, \tag{178}$$

где

$$\mathbf{C}^x = \begin{bmatrix} c^{x_0} & c^{x_1} & \dots & c^{x_{l-1}} \end{bmatrix}^T,\ \mathbf{C}^\varepsilon = \begin{bmatrix} c^{\varepsilon_0} & c^{\varepsilon_1} & \dots & c^{\varepsilon_{l-1}} \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0,l-1} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1,l-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l-1,0} & a_{l-1,1} & \dots & a_{l-1,l-1} \end{bmatrix},$$

$$\Delta\mathbf{A}_x^f\Big|_{f=1}^N = \begin{bmatrix} \Delta a_{00}^f & \Delta a_{01}^f & \dots & \Delta a_{0,l-1}^f \\ \Delta a_{10}^f & \Delta a_{11}^f & \dots & \Delta a_{1,l-1}^f \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta a_{l-1,0}^f & \Delta a_{l-1,1}^f & \dots & \Delta a_{l-1,l-1}^f \end{bmatrix},$$

или, с учетом границ интервалов (167)

$$\Delta\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} \left[\underline{a_{00}}, \overline{a_{00}}\right] & \left[\underline{a_{01}}, \overline{a_{01}}\right] & \dots & \left[\underline{a_{0,l-1}}, \overline{a_{0,l-1}}\right] \\ \left[\underline{a_{10}}, \overline{a_{10}}\right] & \left[\underline{a_{11}}, \overline{a_{11}}\right] & \dots & \left[\underline{a_{1,l-1}}, \overline{a_{1,l-1}}\right] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[\underline{a_{l-1,0}}, \overline{a_{l-1,0}}\right] & \left[\underline{a_{l-1,1}}, \overline{a_{l-1,1}}\right] & \dots & \left[\underline{a_{l-1,l-1}}, \overline{a_{l-1,l-1}}\right] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_y = \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & \dots & b_{0,l-1} \\ b_{10} & b_{11} & \dots & b_{1,l-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l-1,0} & b_{l-1,1} & \dots & b_{l-1,l-1} \end{bmatrix},$$

$$\Delta\mathbf{B}_y = \begin{bmatrix} \left[\underline{b_{00}}, \overline{b_{00}}\right] & \left[\underline{b_{01}}, \overline{b_{01}}\right] & \cdots & \left[\underline{b_{0,l-1}}, \overline{b_{0,l-1}}\right] \\ \left[\underline{b_{10}}, \overline{b_{10}}\right] & \left[\underline{b_{11}}, \overline{b_{11}}\right] & \cdots & \left[\underline{b_{1,l-1}}, \overline{b_{1,l-1}}\right] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[\underline{b_{l-1,0}}, \overline{b_{l-1,0}}\right] & \left[\underline{b_{l-1,1}}, \overline{b_{l-1,1}}\right] & \cdots & \left[\underline{b_{l-1,l-1}}, \overline{b_{l-1,l-1}}\right] \end{bmatrix}.$$

Перепишем (178), в виде

$$\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}_x + \Delta\mathbf{A}_x^f\right)\mathbf{C}^x = \left(\mathbf{B}_\varepsilon + \Delta\mathbf{B}_\varepsilon^r\right)\mathbf{C}^\varepsilon, \tag{179}$$

Система уравнений (179) эквивалентна СЛАУ вида:

$$\mathbf{C}^{x_l} = \varpi\left(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda}\right)\mathbf{C}^{x_l} + \mathbf{C}^f, \tag{180}$$

где $\mathbf{A}_x + \Delta\mathbf{A}_x^f = \varpi\left(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda}\right)$, $\varpi = 1$; $\mathbf{C}^x = \mathbf{C}^{x_l}$; $\mathbf{C}^f = \mathbf{C}^\varepsilon$; $\mathbf{B}_\varepsilon + \Delta\mathbf{B}_\varepsilon^r = \mathbf{I}$.

8. Описание множеств решений интервальной линейной алгебраической системы.

Рассмотрим кванторный подход к описанию интевальной системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) (180), предложенным С.П. Шарым в [2].

Отметим, что в [3] приводится краткий обзор кванторного формализма описания ИСЛАУ в критической форме, приводятся как преимущества, так и недостатки.

Введем следующее определение.

Определение 1. [2] Множеством $\exists\forall-$решений называется обобщенное множество решений ИСЛАУ (180) для которых выделяющий предикат имеет $\exists\forall-$форму.

Рассмотрим способы описания множества $\exists\forall-$решений. Итак, возможны следующие варианты:

1. Разбиение индексных множеств компонент вектора $\mathbf{a}$ и правой части – векора $\mathbf{b}$. Т.е. допустим, что множество индексов i компонент a_i, т.е. множество $\{1, 2, \ldots, l\}$, разбито на две непересекающиеся части $\hat{G} = \{\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_p\}$ и $\breve{G} = \{\breve{\gamma}_1, \ldots, \breve{\gamma}_q\}$, причем $p + q = l$, тогда имеет место быть следующее описание: вектор a_i имеет интервальную $\forall-$неопределенность при $i \in \hat{G}$, вектор a_i имеет интервальную $\exists-$неопределенность при $i \in \breve{G}$. Аналогично вводится разбиение на два непересекающихся множества индексов $\hat{\Delta} = \{\hat{\delta}_1, \ldots, \hat{\delta}_p\}$ и $\breve{\Delta} = \{\breve{\delta}_1, \ldots, \breve{\delta}_q\}$, $\hat{\Delta} \cup \breve{\Delta} = \{1, 2, \ldots, m\}$ для вектора $\mathbf{b}$: вектор b_i имеет интервальную $\forall-$неопределенность при $i \in \hat{\Delta}$, вектор b_i имеет интервальную $\exists-$неопределенность при $i \in \breve{\Delta}$. Причем допускается возможность того, что некоторые из множеств $\hat{G}, \breve{G}$, $\hat{\Delta}$ и $\breve{\Delta}$ пусты. Тогда

$$a_i = \begin{cases} \forall, \; if \;\; i \in \hat{G}, \\ \exists, \; if \;\; i \in \breve{G}, \end{cases} \qquad b_i = \begin{cases} \forall, \; if \;\; i \in \hat{\Delta}, \\ \exists, \; if \;\; i \in \breve{\Delta}, \end{cases} \tag{181}$$

откуда видно, что задание множеств $\hat{G}, \breve{G}$, $\hat{\Delta}$ и $\breve{\Delta}$ допускает полное описание множества $\exists\forall -$решений для ИСЛАУ.

2. Второй способ описания заключается в дизъюнктивном разложении векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Определим вектор $\mathbf{a}^{\forall} = \left(\mathbf{a}_i^{\forall}\right)$ и $\mathbf{a}^{\exists} = \left(\mathbf{a}_i^{\exists}\right)$ и интервальный вектор $\mathbf{b}^{\forall} = \left(\mathbf{b}_i^{\forall}\right)$ и $\mathbf{b}^{\exists} = \left(\mathbf{b}_i^{\exists}\right)$, следующим образом:

$$\mathbf{a}_i^{\forall} = \begin{cases} \mathbf{a}_i, \ if \ \ a_i = \forall, \\ 0, \ if \ \ not, \end{cases} \qquad \mathbf{a}_i^{\exists} = \begin{cases} \mathbf{a}_i, \ if \ \ a_i = \exists, \\ 0, \ if \ \ not, \end{cases} \tag{182}$$

$$b_i^{\forall} = \begin{cases} \mathbf{b}_i, \ if \ \ b_i = \forall, \\ 0, \ if \ \ not, \end{cases} \qquad \mathbf{b}_i^{\exists} = \begin{cases} b_i, \ if \ \ b_i = \exists, \\ 0, \ if \ \ not. \end{cases} \tag{183}$$

В итоге имеем

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_i^{\forall} + \mathbf{a}_i^{\exists}, \ \mathbf{a}_i^{\forall}\mathbf{a}_i^{\exists} = 0,$$
$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_i^{\forall} + \mathbf{b}_i^{\exists}, \ \mathbf{b}_i^{\forall}\mathbf{b}_i^{\exists} = 0,$$

для всех i. Откуда видно, что вектора $\mathbf{a}_i^{\forall}$ и $\mathbf{b}_i^{\forall}$ описывают все интервальные параметры, соответсвующие типу неопределенности $\forall$, а вектора $\mathbf{a}_i^{\exists}$ и $\mathbf{b}_i^{\exists}$ типу неопределености $\exists$.

Подводя итог, приходим к следующему определению.

Определение 2. [2] Пусть для ИСЛАУ вида $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ с интервальными матрицей $\mathbf{A}$ и вектором $\mathbf{b}$, распределение типов неопределенностей по этим интервальным элементам задается соответствующими разбиениями индексных множеств матрицы $\mathbf{A}$ и вектора $\mathbf{b}$ или же дизьюнктными разложениями $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\forall} + \mathbf{A}^{\exists}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}_i^{\forall} + \mathbf{b}_i^{\exists}$. Тогда множество

$$\Big\{ x \in R^n \Big| \left(\forall a_{\hat{\gamma}1} \in \mathbf{a}_{\hat{\gamma}1}\right) \ldots \left(\forall a_{\hat{\gamma}p} \in \mathbf{a}_{\hat{\gamma}p}\right) \left(\forall b_{\hat{\delta}1} \in \mathbf{b}_{\hat{\gamma}1}\right) \ldots \left(\forall b_{\hat{\delta}s} \in \mathbf{b}_{\hat{\gamma}s}\right)$$
$$\left(\exists a_{\hat{\gamma}1} \in \mathbf{a}_{\hat{\gamma}1}\right) \ldots \left(\exists a_{\hat{\gamma}p} \in \mathbf{a}_{\hat{\gamma}p}\right) \left(\exists b_{\hat{\delta}1} \in \mathbf{b}_{\hat{\gamma}1}\right) \ldots \left(\exists b_{\hat{\delta}s} \in \mathbf{b}_{\hat{\gamma}s}\right) \ (\mathbf{A}x = \mathbf{b}) \Big\}$$

называется множеством $\exists\forall -$решений для интервальной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ и обозначать через $\Theta_{\exists\forall}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Частным случаем этого определения явлется объединеное множество решений

$$\Theta_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \Big\{ x \in R^n \Big| (\exists a \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(\mathbf{A}x = \mathbf{b}) \Big\}, \tag{184}$$

образованное решениями всех точечных систем $Ax = b$ с $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$. Оно является наиболее популярным из множеств решений, что обусловлено, происхождением задач интервального анализа из задач чувствительности. $\Theta_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ часто называется множеством решений. Его аналогом для динамических систем является известное множество достижимости (см. [4], [5]).

Обратимся к различным эквивалентным описаниям обобщенных $\exists\forall -$множеств решений ИСЛАУ.

Теорема 6. Множество $\exists\forall -$решений СЛАУ определяется в виде

$$\Theta_{\exists\forall}(\mathbf{A},\mathbf{b}) = \bigcap_{\hat{A}\in\mathbf{A}^{\forall}} \bigcap_{\hat{b}\in\mathbf{b}^{\forall}} \bigcap_{\breve{A}\in\mathbf{A}^{\exists}} \bigcap_{\breve{b}\in\mathbf{b}^{\exists}} \left\{ x\in R^n \middle| \left(\hat{A}+\breve{A}\right)x = \hat{b}+\breve{b} \right\}.$$

Если интервальная матрица $\mathbf{A}$ невырожденная, то рассматриваемое множество решений имеет вид:

$$\Theta_{\exists\forall}(\mathbf{A},\mathbf{b}) = \bigcap_{\hat{A}\in\mathbf{A}^{\forall}} \bigcap_{\hat{b}\in\mathbf{b}^{\forall}} \bigcap_{\breve{A}\in\mathbf{A}^{\exists}} \bigcap_{\breve{b}\in\mathbf{b}^{\exists}} \left\{ x\in R^n \middle| x = \left(\hat{A}+\breve{A}\right)^{-1}\left(\hat{b}+\breve{b}\right) \right\}.$$

Доказательство. На основе правил пересечения и объединения множеств, имеем

$$\Theta_{\exists\forall}(\mathbf{A},\mathbf{b}) = \left\{ x\in R^n \middle| \left(\forall\hat{A}\in\mathbf{A}^{\forall}\right)\left(\forall\hat{b}\in\mathbf{b}^{\forall}\right)\left(\exists\breve{A}\in\mathbf{A}^{\exists}\right)\left(\exists\breve{b}\in\mathbf{b}^{\exists}\right)\left(\left(\hat{A}+\breve{A}\right)x = \hat{b}+\breve{b}\right) \right\} =$$

$$= \bigcap_{\hat{A}\in\mathbf{A}^{\forall}} \bigcap_{\hat{b}\in\mathbf{b}^{\forall}} \left\{ x\in R^n \middle| \left(\forall\breve{A}\in\mathbf{A}^{\exists}\right)\left(\exists\breve{b}\in\mathbf{b}^{\exists}\right)\left(\left(\hat{A}+\breve{A}\right)x = \hat{b}+\breve{b}\right) \right\} =$$

$$= \bigcap_{\hat{A}\in\mathbf{A}^{\forall}} \bigcap_{\hat{b}\in\mathbf{b}^{\forall}} \bigcap_{\breve{A}\in\mathbf{A}^{\exists}} \bigcap_{\breve{b}\in\mathbf{b}^{\exists}} \left\{ x\in R^n \middle| \left(\hat{A}+\breve{A}\right)x = \hat{b}+\breve{b} \right\}.$$

Теорема доказана.

Отметим, что объединеное множество решений для рассматриваемой ИСЛАУ с невырожденной матрицей $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\Theta_{uni}(\mathbf{A},\mathbf{b}) = \bigcup_{A\in\mathbf{A}} \bigcup_{b\in\mathbf{b}} \left\{ A^{-1}b \right\}.$$

Рассмотрим аналитические описания обобщенных $\exists\forall-$множеств решений ИСЛАУ. Справедлива

Теорема 7. Точка x принадлежит множеству $\exists\forall-$решений $\Theta_{\exists\forall}(\mathbf{A},\mathbf{b})$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{A}^{\forall}x - b^{\forall} \subseteq b^{\exists} - \mathbf{A}^{\exists}x. \tag{185}$$

Доказательство. Перепишем множество $\exists\forall-$решений, на основе разбиения индексных множеств матрицы и вектора ИСЛАУ:

$$\Theta_{\exists\forall}(\mathbf{A},\mathbf{b}) = \left\{ x\in R^n \middle| \left(\forall\hat{A}\in\mathbf{A}^{\forall}\right)\left(\forall\hat{b}\in\mathbf{b}^{\forall}\right)\left(\exists\breve{A}\in\mathbf{A}^{\exists}\right)\left(\exists\breve{b}\in\mathbf{b}^{\exists}\right)\left(\left(\hat{A}+\breve{A}\right)x = \hat{b}+\breve{b}\right) \right\}.$$

Далее, преобразовав эквивалентным образом выделяющий предикат множества решений, имеем

$$\Theta_{\exists\forall}(\mathbf{A},\mathbf{b}) = \left\{ x\in R^n \middle| \left(\forall\hat{A}\in\mathbf{A}^{\forall}\right)\left(\forall\hat{b}\in\mathbf{b}^{\forall}\right)\left(\exists\breve{A}\in\mathbf{A}^{\exists}\right)\left(\exists\breve{b}\in\mathbf{b}^{\exists}\right)\left(\hat{A}x - \hat{b} = \breve{b} - \breve{A}x\right) \right\} =$$

$$= \left\{ x\in R^n \middle| \left(\forall\hat{A}\in\mathbf{A}^{\forall}\right)\left(\forall\hat{b}\in\mathbf{b}^{\forall}\right)\left(\hat{A}x - \hat{b} \in \mathbf{b}^{\exists} - \mathbf{A}^{\exists}x\right) \right\} =$$

$$= \left\{ x\in R^n \middle| \left(A^{\forall}x - b^{\forall} \subseteq \mathbf{b}^{\exists} - \mathbf{A}^{\exists}x\right) \right\},$$

учитывая, что

$$\mathbf{b}^{\exists} - \mathbf{A}^{\exists}x = \left\{ \breve{b} - \breve{A}x \middle| \breve{A}\in\mathbf{A}^{\exists}, \breve{b}\in\mathbf{b}^{\exists} \right\}$$

$$\mathbf{A}^{\forall}x - \mathbf{b}^{\forall} = \left\{ \hat{A}x - \hat{b} \middle| \hat{A}\in\mathbf{A}^{\forall}, \hat{b}\in\mathbf{b}^{\forall} \right\}$$

на основании свойств интервальных матричных операций [6].

Теорема доказана.

Отметим, что логические кванторы разного типа не перестановочны. Аналогичное справедливо и в случае выделяющего предиката при определении обобщенных множеств решений ИСЛАУ. Однако, в частном случае систем вида $\mathbf{A}x=\mathbf{b}$, вполне возможно переставить кванторы всеобщности и существования, относящиеся к различным частям указанногой системы. На основании этого, справедлива

Теорема 8. Обощенное множество $\exists\forall-$решений $\Theta_{\exists\forall}(\mathbf{A},\mathbf{b})$ для ИСЛАУ $\mathbf{A}x=\mathbf{b}$ имеет вид:

$$\Theta_{\exists\forall}(\mathbf{A},\mathbf{b})=\left\{x\in R^n \middle| \left(\forall\hat{A}\in\mathbf{A}^{\forall}\right)\left(\exists\breve{A}\in\mathbf{A}^{\exists}\right)\left(\forall\hat{b}\in\mathbf{b}^{\forall}\right)\left(\exists\breve{b}\in\mathbf{b}^{\exists}\right)\left(\left(\hat{A}+\breve{A}\right)x=\hat{b}+\breve{b}\right)\right\}. \quad (186)$$

Доказательство. В правой части доказываемого равенства, преобразуем выделяющий предикат множества $\exists\forall-$решений

$$\left\{x\in R^n \middle| \left(\forall\hat{A}\in\mathbf{A}^{\forall}\right)\left(\exists\breve{A}\in\mathbf{A}^{\exists}\right)\left(\forall\hat{b}\in\mathbf{b}^{\forall}\right)\left(\exists\breve{b}\in\mathbf{b}^{\exists}\right)\left(\left(\hat{A}+\breve{A}\right)x=\hat{b}+\breve{b}\right)\right\}=$$

$$=\left\{x\in R^n \middle| \left(\forall\hat{A}\in\mathbf{A}^{\forall}\right)\left(\exists\breve{A}\in\mathbf{A}^{\exists}\right)\left(\forall\hat{b}\in\mathbf{b}^{\forall}\right)\left(\exists\breve{b}\in\mathbf{b}^{\exists}\right)\left(\hat{A}x-\hat{b}=\breve{b}-\breve{A}x\right)\right\}=$$

$$=\left\{x\in R^n \middle| \left(\forall\hat{A}\in\mathbf{A}^{\forall}\right)\left(\exists\breve{A}\in\mathbf{A}^{\exists}\right)\left(\forall\hat{b}\in\mathbf{b}^{\forall}\right)\left(\exists\breve{b}\in\mathbf{b}^{\exists}\right)\left(\hat{A}x-\hat{b}\in\mathbf{b}^{\exists}-\breve{A}x\right)\right\}=$$

$$=\left\{x\in R^n \middle| \left(\forall\hat{A}\in\mathbf{A}^{\forall}\right)\left(\exists\breve{A}\in\mathbf{A}^{\exists}\right)\left(\forall\hat{b}\in\mathbf{b}^{\forall}\right)\left(\exists\breve{b}\in\mathbf{b}^{\exists}\right)\left(\hat{A}x-\mathbf{b}^{\forall}\subseteq\mathbf{b}^{\exists}-\breve{A}x\right)\right\}=$$

$$=\left\{x\in R^n \middle| \left(\forall\hat{A}\in\mathbf{A}^{\forall}\right)\left(\hat{A}x-\mathbf{b}^{\forall}\subseteq\mathbf{b}^{\exists}-\mathbf{A}^{\exists}x\right)\right\}=$$

$$=\left\{x\in R^n \middle| \left(\mathbf{A}^{\forall}x-\mathbf{b}^{\forall}\subseteq\mathbf{b}^{\exists}-\mathbf{A}^{\exists}x\right)\right\},$$

последнее справедливо, исходя из того, что для любой правильной [2] интервальной матрицы $\mathbf{A}$ и вещественного вектора x, результат интервального умножения $\mathbf{A}x$ совпадает с множеством $\left\{\mathbf{A}x \middle| A\in\mathbf{A}\right\}$. [6]

Откуда следует, что описание множества правой части соотношения (186), идентична в силу теоремы 6, описанию множества решений $\Theta_{\exists\forall}(\mathbf{A},\mathbf{b})$, следовательно, имеет место их совпадение.

Теорема доказана.

Из теоремы 8 возможно получить еще одно описание множества $\exists\forall-$решений интервальных алгебраических систем. Справедлива теорема:

Теорема 9.

$$\Theta_{\exists\forall}(\mathbf{A},\mathbf{b})=\bigcap_{\hat{A}\in\mathbf{A}^{\forall}}\bigcap_{\hat{b}\in\mathbf{b}^{\exists}}\bigcap_{\breve{A}\in\mathbf{A}^{\forall}}\bigcap_{\breve{b}\in\mathbf{b}^{\exists}}\left\{x\in R^n \middle| \left(\hat{A}+\breve{A}\right)x=\hat{b}+\breve{b}\right\},$$

при условии, что интервальная матрица $\mathbf{A}$ невырожденная, то справедливо

$$\Theta_{\exists\forall}(\mathbf{A},\mathbf{b})=\bigcap_{\hat{A}\in\mathbf{A}^{\forall}}\bigcap_{\hat{b}\in\mathbf{b}^{\exists}}\bigcap_{\breve{A}\in\mathbf{A}^{\forall}}\bigcap_{\breve{b}\in\mathbf{b}^{\exists}}\left\{x=\left(\hat{A}+\breve{A}\right)^{-1}\left(\hat{b}+\breve{b}\right)\right\}.$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы введем следующее определение.

Определение 1. Интервальная матрица $\mathbf{A}^c$ и интервальный вектор $\mathbf{b}^c$, заданные в виде

$$\mathbf{A}^c = \mathbf{A}^\forall + \mathrm{dual}\,\mathbf{A}^\exists,\ \mathbf{b}^c = \mathbf{b}^\forall + \mathrm{dual}\,\mathbf{b}^\exists, \tag{187}$$

считаем характеристическими для $\exists\forall-$множества решений ИСЛАУ, заданными своими дизъюнктивными разложениями $\mathbf{A}$ на $\mathbf{A}^\forall$ и $\mathbf{A}^\exists$, $\mathbf{b}$ на $\mathbf{b}^\forall$ и $\mathbf{b}^\exists$.

В формуле (187) dual обозначает операцию дуализацию, введенную следующим образом: правильные и неправильные интервалы [6], две части KR (полная интервальная арифметика Каухера [6], или ее носитель – множество всех пар $[a,b]$, $a,b\in R$) меняются местами в результате отображения дуализации $\mathrm{dual}: KR \to KR$, изменяющего местами концы интервала, т.е. если $\mathbf{x} = \left[\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}\right]$, то $\mathrm{dual}\,\mathbf{x} = \left[\overline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}\right]$. Так же введем следующую операцию над интервалами. Каждый элемент $\mathbf{x}$ из KR имеет единственный обратный по сложению, обозначим через $\mathrm{opp}\,\mathbf{x}$, такой, что справедливо: $\mathbf{x} + \mathrm{opp}\,\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \mathrm{opp}\,\mathbf{x} = \left[-\underline{\mathbf{x}}, -\overline{\mathbf{x}}\right]$. В соответствии с последним, операцию алгебраическое вычитание двух интервалов в KR, будем обозначать в виде: $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathrm{opp}\,\mathbf{y} = \left[\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}\right]$.

Доказательство. Повторяет доказательство теоремы 6.

Рассмотрим вопросы существования решения ИСЛАУ. Справедлива

Теорема 10. Точка $\mathbf{x}\in R^n$ принадлежит множеству решений $\Theta_{\exists\forall}(\mathbf{A},\mathbf{b})$, тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{A}^c x \subseteq \mathbf{b}^c \tag{188}$$

в полной интервальной арифметике Каухера [6].

Доказательство. Известно, что

$$\mathrm{opp}\,(-\mathbf{x}) = \mathrm{dual}\,\mathbf{x},\ \ \forall \mathbf{x}\in KR.$$

Рассмотррим включение (185): $\mathbf{A}^\forall x - b^\forall \subseteq b^\exists - \mathbf{A}^\exists x.$ К обеим частям этого включения прибавим по $\mathrm{dual}\,\mathbf{b}^\forall + \mathrm{dual}\left(\mathbf{A}^\exists x\right)$, то получим следжующее включение в полной арифметике Каухера:

$$\mathbf{A}^\forall x - \mathbf{b}^\forall + \mathrm{dual}\,\mathbf{b}^\forall + \mathrm{dual}\left(\mathbf{A}^\exists x\right) \subseteq \mathbf{b}^\exists - \mathbf{A}^\exists x + \mathrm{dual}\,\mathbf{b}^\forall + \mathrm{dual}\left(\mathbf{A}^\exists x\right),$$

$$\mathbf{A}^\forall x + \mathrm{dual}\left(\mathbf{A}^\exists x\right) \subseteq \mathrm{dual}\,\mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists. \tag{189}$$

Учитывая, что $\mathrm{dual}\left(\mathbf{A}^\exists x\right) = \left(\mathrm{dual}\,\mathbf{A}^\exists\right)x$, т.к. $x-$точечный вектор. Откуда

$$\mathbf{A}^\forall x + \left(\mathrm{dual}\,\mathbf{A}^\exists\right)x \subseteq \mathrm{dual}\,\mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists.$$

В левой части последнего включения воспользуемся дистрибутивностью относительно точечного вектора x, тогда

$$\left(\mathbf{A}^\forall + \mathrm{dual}\,\mathbf{A}^\exists\right)x \subseteq \mathrm{dual}\,\mathbf{b}^\forall + \mathbf{b}^\exists,$$

которое аналогично включению (188). Теорема доказана.

Определние 2 [2]. Вершинами интервального вектора $\mathbf{x}\in KR^n$ называются точки множества

$$\operatorname{vert}\mathbf{x} = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, x_i \in \left\{ \underline{\mathbf{x}}_i, \overline{\mathbf{x}}_i \right\},\ i = \overline{1,n} \right\}.$$

Аналогичным образом определяются вершины интервальной матрицы.

Теорема 11. Для любых матрицы α и вектора β пересечение множества $\exists\forall -$решений $\Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b})$ с каждым из ортантов пространства R^n является выпуклым полиэдральным множеством. Вершины которого – решения точечных линейных алгебраических систем, которые образованы

1. Линейными уравнениями вида
$$\tilde{a}_{i1}x_1 + \tilde{a}_{i2}x_2 + \ldots \tilde{a}_{in}x_2 = \tilde{b}_i,\ \ \tilde{a}_{ij} \in \left\{ \underline{\mathbf{a}}_{ij}, \overline{\mathbf{a}}_{ij} \right\},\ b_i \in \left\{ \underline{\mathbf{b}}_i, \overline{\mathbf{b}}_i \right\},\ i = \overline{1,m}.$$
2. Уравнениями вида $x_k = 0,\ k = \overline{1,n}.$

Доказательство. Отметим, что для любой интервальной матрицы $\mathbf{C} \in IR^{m\times n}$ произведение $\mathbf{C}x = \left((\mathbf{C}x)_1 \quad (\mathbf{C}x)_2 \quad \ldots \quad (\mathbf{C}x)_m \right)^T$ можно представить в виде:

$$(\mathbf{C}x)_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_{ij}x_j = \left[\sum_{j=1}^{n} \underline{c_{ij}x_j},\ \sum_{j=1}^{n} \overline{c_{ij}x_j} \right] = \left[\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{/}x_j,\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{//}x_j \right], \tag{190}$$

где $c_{ij}^{/}$ и $c_{ij}^{//}$ – некоторые числа, которые принадлежат интервалу $\left\{ \underline{\mathbf{c}}_{ij}, \overline{\mathbf{c}}_{ij} \right\}$ и фиксированы для каждого отдельного ортанта, содержащего x.

Переписывая включение (185) покомпонентным образом, при этом проводя замену каждой компоненты представлением (190), т.е. каждое из одномерных включений парой неравенств, приходим к системе $2m+n$ линейных неравенств

$$A'x \ge b',\ A''x \ge b'',\ x_k,\ k = \overline{1,n}, \tag{191}$$

где $A', A'' \in \operatorname{vert}\mathbf{A}$ и $b', b'' \in \operatorname{vert}\mathbf{b}$. Система (190) описывает выпуклое полиэдральное множество. Теорема доказана.

В итоге, множество $\Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b})$ допускает представление в виде объединения не более 2^n (по числу ортантов) выпуклых полиэдральных множеств. Для объединеного множества решений ИСЛАУ этот факт впервые был установлен У. Оеттли [7].

Как следствие отмеченного, сложность описания множеств решений $\Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b})$ может расти экспоненциально с n невзирая на приведенные выше описания этого множества решений. Подобное описание делается, таким образом, исключительно трудоемким и практически непригодным для интервальных линейных систем даже не высокой размерности. Это затруднение носит принципиальный характер, так как результат, отраженный в [8] показывает, что даже задача распознования того, пусто ли множество $\exists\forall -$решений ИСЛАУ, в общем случае является NP – полной задачей, т.е. не может быть решена проще, чем за время, которое является экспонентой от длины кодировки задачи [9].

В силу отмеченного, на практике не имеет смысла ставить целью нахождение и представление прользователю полного описания множества решений $\Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b})$, вполне достаточно вычислить некоторое просто устроенное приближение к этому множеству решений – оценку для $\Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b})$. В качестве оценок (оценочных множеств) могут выступать интервальные векторы – прямые произведения интервалов вещественной оси, – т.е. с геометрической точки зрения, брусы со сторонами параллельными координатным осям. Поэтому, подводя итог, задачу решения ИСЛАУ (180) можно сформулировать следующим образом:

Задача: *для интервальной системы уравнений (180) найти интервальную оценку множества решений* $\Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b})$, *где* $\mathbf{A}=\mathbf{I}-\varpi(\mathbf{\Lambda}+\Delta\mathbf{\Lambda}),\mathbf{b}-$*единичный орт.*

9. Прямой регулярный метод решения ИСЛАУ. Теоретические положения.

Рассмотрим задачу оценивания множества решений $\Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b})$ ИСЛАУ на основе прямого регулярного метода решения (ПРМР) этих систем, при этом исходная задача еценивания сводится к задаче нахождения формального решения некоторой вспомогательной системы в полной интервальной арифметике Каухера KR^n.

На основе теоремы 10, имеем:

$$x\in\Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b}) \leftrightarrow \mathbf{A}^c x\subseteq\mathbf{b}^c \tag{192}$$

Прибавим к обеим частям (192) по вектору $\left(x-\mathbf{A}^c x\right)$, получим равносильное включение

$$x\subseteq x+\mathrm{opp}\left(\mathbf{A}^c x\right)+\mathbf{b}^c.$$

С учетом того, $\mathrm{opp}\left(\mathbf{A}^c x\right)=\mathrm{opp}\left(\mathbf{A}^c\right)x$ для вещественных x, имеем

$$x\subseteq x+\mathrm{opp}\left(\mathbf{A}^c\right)x+\mathbf{b}^c,$$

далее, воспользовавшись свойством дистрибутивности, вынесем вектор x за скобку

$$x\in\Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b}) \leftrightarrow x\subseteq\left(I-\mathbf{A}^c\right)x+\mathbf{b}^c,$$

причем, при $x\in\Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b})\neq 0$ из рассуждений рассмотренных выше, следует, что $\left(I-\mathbf{A}^c\right)x+\mathbf{b}^c-$правильный интервальный вектор [6].

Теорема 12. Точка $x\in R^n$ принадлежит множеству решений $\Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b})$, тогда и только тогда, когда $x\subseteq\left(I-\mathbf{A}^c\right)x+\mathbf{b}^c$ в полной интервальной арифметике Каухера.

Теорема 13. Предположим, что некоторая интервальная матрица $\mathbf{C}\in KR^{n\times n}$ такова, что выполняется условие $\rho\left(|\mathbf{C}|\right)<1-$спектральный радиус матрицы $|\mathbf{C}|$, составленный из модулей элементов $\mathbf{C}$. Тогда решение ИСЛАУ

$$x=\mathbf{C}x+\mathbf{d} \tag{193}$$

существует и единственно для $\forall\mathbf{d}\in KR^n$.

Прежде чем приступить к доказательству, введем следующее понятие.

Расстояние – $\operatorname{dist}(\ ,\ )$ – между элементами полной интевальной арифметике KR, вводится согласно выражению [10]:

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max\left\{\left|\underline{\mathbf{x}}-\underline{\mathbf{y}}\right|,\left|\overline{\mathbf{x}}-\overline{\mathbf{y}}\right|\right\} = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|.$$

При этом для любых двух интервалов $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{x}',\mathbf{y}' \in KR$ справедливы неравенства [10]

$$\operatorname{dist}(\mathbf{xy},\mathbf{xy}') \le |\mathbf{x}|\operatorname{dist}(\mathbf{y},\mathbf{y}'), \tag{194}$$

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}'+\mathbf{y}') \le \operatorname{dist}(\mathbf{x},\mathbf{x}') + \operatorname{dist}(\mathbf{y},\mathbf{y}'). \tag{195}$$

Предположение 1. Для любой интервальной матрицы $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{ij}) \in KR^{n\times n}$ и любых интервальных векторов $\mathbf{x},\mathbf{y} \in KR$ имеет место неравенство

$$\operatorname{dist}(\mathbf{Cx},\mathbf{Cy}) \le |\mathbf{C}|\operatorname{dist}(\mathbf{x},\mathbf{y}). \tag{196}$$

Действительно, в силу неравенств (194) и (195), имеем

$$\operatorname{dist}\left((\mathbf{Cx})_i,(\mathbf{Cy})_i\right) = \operatorname{dist}\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{c}_{ij}\mathbf{x}_j,\sum_{j=1}^{n}\mathbf{c}_{ij}\mathbf{y}_j\right) \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n}\operatorname{dist}\left(\mathbf{c}_{ij}\mathbf{x}_j,\mathbf{c}_{ij}\mathbf{y}_j\right) \le \sum_{j=1}^{n}\left|\mathbf{c}_{ij}\right|\operatorname{dist}\left(\mathbf{x}_j,\mathbf{y}_j\right)$$

при всех $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Вернемся к доказательству теоремы 13.

Доказательство. На основе неравенства (196) и любых векторов $\mathbf{d},\mathbf{u},\mathbf{v} \in KR^n$

$$\operatorname{dist}(\mathbf{Cu}+\mathbf{d},\mathbf{Cv}+\mathbf{d}) = \operatorname{dist}(\mathbf{Cu},\mathbf{Cv}) \le |\mathbf{C}|\operatorname{dist}(\mathbf{u},\mathbf{v}).$$

Если выполнено условие $\rho(|\mathbf{C}|) < 1$, то справедливо применение конечномерного варианта теоремы Шредера о неподвижной точке [6, 10 – 12]. Поэтому отображение $KR^n \to KR^n$, т.е. $x \to \mathbf{C}x + \mathbf{d}$, является сжимающим относительно псевдометрики $\operatorname{dist}(\ ,\ )$, и имеет единственную неподвижную точку, которое расценивается как решение ИСЛАУ (193).

Теорема доказана.

Теорема 14. Пусть для ИСЛАУ $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ множество решений $\Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b})$ непусто, $\mathbf{A}^c$ и $\mathbf{b}^c$ – характеристическая матрица и вектор правой части множества $\Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b})$, причем выполнено условие

$$\rho\left(\left|I-\mathbf{A}^c\right|\right) < 1 \tag{197}$$

тогда решение ИСЛАУ

$$x = \left(I-\mathbf{A}^c\right)x + \mathbf{b}^c, \tag{198}$$

которое существует и единственно в силу теоремы 13, является правильным интервальным вектором, содержащим множество решений $\Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b})$.

Доказательство. Примем в качестве $\mathbf{x}^*$ – решение ИСЛАУ (198), а так же выберем, какой либо точечный вектор $\tilde{x} \in \Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b})$ и покажем, что необходимо $\tilde{x} \in \mathbf{x}^*$. На основании теоремы 12, если $\tilde{x} \in \Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b})$, это равносильно включению

$$\tilde{x} \in \left(I - \mathbf{A}^c\right)\tilde{x} + \mathbf{b}^c.,\tag{199}$$

Построим в пространстве KR^n итерационный процесс вида:

$$\tilde{x}_{k+1} = \left(I - \mathbf{A}^c\right)\tilde{x}_k + \mathbf{b}^c,\ x_0 = \tilde{x}.,\tag{200}$$

На основании метода математической индукции, можно показать, что все последовательные приближения включают $\tilde{x}_k$. Для начального приближения x_0 – справедливо по построению итерационного процесса (200). Если $\tilde{x} \in \tilde{x}_k$, то учитывая (199) и свойство монотонности интервальных арифметических операций в KR^n [6] по включению, приходим к выражению

$$\tilde{x} \in \left(I - \mathbf{A}^c\right)\tilde{x} + \mathbf{b}^c \subseteq \left(I - \mathbf{A}^c\right)x_k + \mathbf{b}^c = x_{k+1}.,\tag{201}$$

Откуда $\tilde{x} \in \tilde{x}_k$, для $\forall k$. Из последнего следует правильность всех интервальных векторов x_k.

Из условия, $\rho\left(\left|I - \mathbf{A}^c\right|\right) < 1$ следует сходимость итерационного процесса (200) (см., например [6]). Также сходится последовательность x_k к неподвижной точке отображения

$$\mathbf{x} \to \left(I - \mathbf{A}^c\right)\mathbf{x} + \mathbf{b}^c,$$

т.е. к единственному решению $\mathbf{x}^*$ уравнения (198). Поскольку $x \in \mathbf{x}_k$, то последнее равносильно системе $2n$ нестрогих неравенст, поэтому

$$\tilde{x} \in \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^*.$$

Теорема доказана.

В заключение данного параграфа, отметим, что спектральное условие применимости ПРМР ИСЛАУ

$$\rho\left(\left|I - \mathbf{A}^c\right|\right) < 1$$

является непростым с точки зрения практической применимости, поэтому в следующем параграфе рассмотрим один из способов достижения этого неравенства, т.е. предобуславливание.

9.1. Предобуславливание ИСЛАУ.

Методика, основанная на ПРМР ИСЛАУ для оценивания множеств решений $\Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b})$, имеет существенные ограничения на область своей применимости. Основным моментом, является приведение исходной ИСЛАУ к виду, например (198) таким образом, чтобы выполнялось условие $\rho\left(\left|I - \mathbf{A}^c\right|\right) < 1$. Это условие является трудно выполнимым и на практике выполняется не всегда. Кроме этого, даже если выполнено условие ограниченности по спектральному радиусу интервальной матрицы, т.е. $\rho\left(\left|I-\mathbf{A}^c\right|\right)<1$ и рассмотреный подход применим, то ширина неподвижной точки уравнеия (198) также зависит от величины $\rho\left(\left|I-\mathbf{A}^c\right|\right)$. Причем, чем меньше $\rho\left(\left|I-\mathbf{A}^c\right|\right)$, тем лучшую, при всех равных прочих условиях, интервальную оценку множества решений возможно получить.

В классической задаче интервального оценивания множества решений $\Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b})$, указанные вопросы решаются с помощью предобуславливания – домножения обеих частей ИСЛАУ на некоторую вещественную матрицу (как правило, для середины матрицы[2] ИСЛАУ [6, 13]), таким образом, что вместо системы

$$\mathbf{A}x=\mathbf{b} \tag{202}$$

имеем предобусловленную систему вида

$$(\Lambda\mathbf{A})x=\Lambda\mathbf{b}, \tag{203}$$

где $\Lambda\in R^{n\times n}$, причем множество решений не уже, чем для (202). Последнее следует, из того, что

$$\Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b})=\left\{x\in R^n \,\middle|\, (\exists A\in\mathbf{A})(\exists b\in\mathbf{b})(Ax=b)\right\}\subseteq$$
$$\subseteq\left\{x\in R^n \,\middle|\, (\exists A\in\mathbf{A})(\exists b\in\mathbf{b})(\Lambda Ax=\Lambda b)\right\}\subseteq$$
$$\subseteq\left\{x\in R^n \,\middle|\, (\exists U\in\Lambda\mathbf{A})(\exists v\in\Lambda\mathbf{b})(Ux=v)\right\}=\Theta_{\alpha\beta}(\Lambda\mathbf{A},\Lambda\mathbf{b}),$$

учитывая, что $\Lambda\mathbf{A}\supseteq\left\{\Lambda\mathbf{A}\,\middle|\, A\in\mathbf{A}\right\}$ и $G\mathbf{b}\supseteq\left\{Gb\,\middle|\, b\in\mathbf{b}\right\}$. Видно, что предобуславливание приводит к расширению множества решений, но одновременно с этим, улучшаются свойства интервальной матрицы предобусловленной системы [13]. Следует отметить, что данный подход напрямую не применим к оцениванию множеств решений $\Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b})$ ИСЛАУ.

При домножении интервальной матрицы и правой части ИСЛАУ слева и права на вещественную матрицу, множество решений не только расширяется, но может изменяться довольно сложным образом. Проиллюстрируем сказанное на простом примере. Пусть имеется линейная интервальная алгебраическая система [6]:

$$\begin{pmatrix}[2,4] & [-2,1]\\ [-2,1] & [2,4]\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}[1,2]\\ [1,2]\end{pmatrix}, \tag{204}$$

для которой

$$\text{mid }\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & 3\end{pmatrix},\ (\text{mid }\mathbf{A})^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{12}{37} & \dfrac{2}{37}\\ -\dfrac{2}{37} & \dfrac{12}{37}\end{pmatrix},$$

---

[2] В книге Г. Алефельда и Ю. Херцбергера [6] предобуславливание называется «методом Хансена»

где операция $\operatorname{mid}\mathbf{x}$ – взятие середины интервала, т.е. $\operatorname{mid}\mathbf{x} = 1/2\left[\overline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{x}}\right]$. [6] Интервальная ситсема (204) предобусловленная матрицей обратной средней, есть

$$\frac{2}{37}\begin{pmatrix} [11,26] & [-10,10] \\ [-10,10] & [11,26] \end{pmatrix} x = \frac{2}{37}\begin{pmatrix} [7,14] \\ [4,11] \end{pmatrix}. \tag{205}$$

Ниже на графиках представлено множество решений ИСЛАУ (204) и (205).

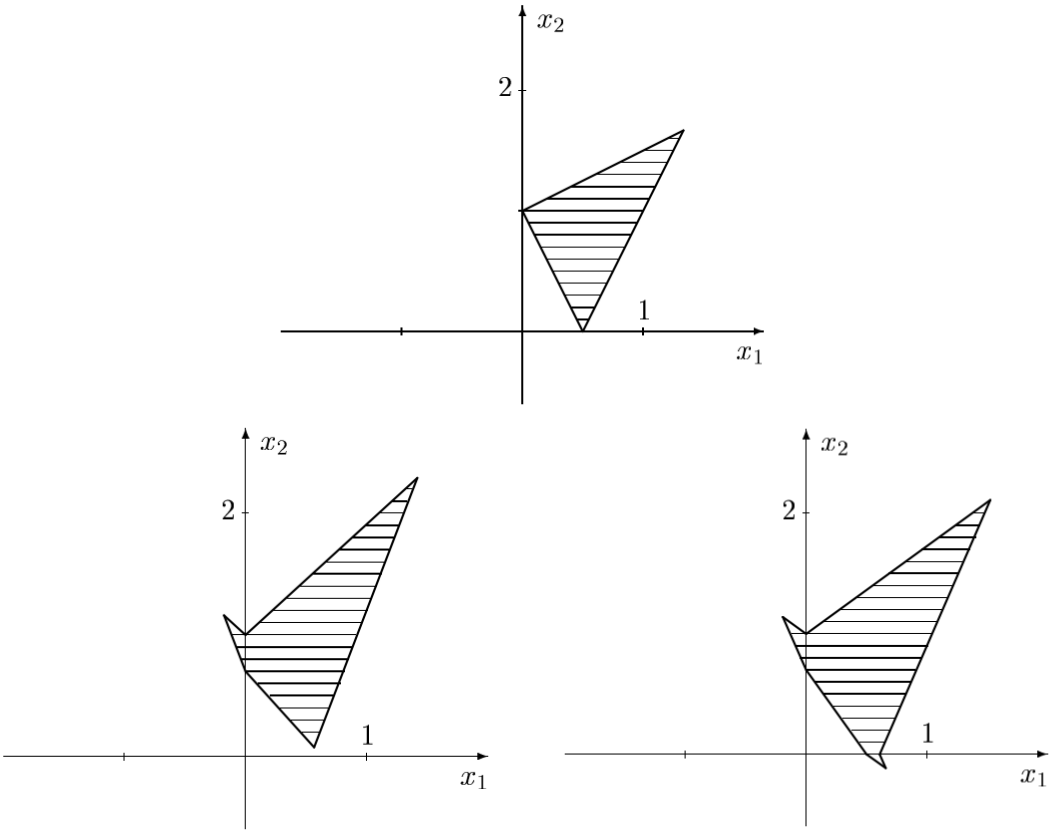

Рис. 1. Сверху на рисунке изображено множество решений ИСЛАУ (204), слева снизу изображено множество (205), справа снизу – множество решений, соответствующее характеритическим матрице и правой части (206).

Из рис. 1 видно, что из левого нижнего рисунка нетрудно увидеть, что множество предобусловленной системы (205) в первом ортанте не содержит вершину $(4/3, 5/3)$ и прилегающую к ней часть (например, точку $(1,1)^T$) множества решений исходной системы (204). Нижняя оценка второй координаты точек этого множества решений, которая для исходной системы равна нулю и достигается на вершине $(1/2, 0)$, при предобуславливании увеличивается [14].

Подведя итог, видно, что множество решений предобусловленной ИСЛАУ не обязательно содержит множество решений исходной ИСЛАУ, а оценка множества решений предобусловленной интервадльной алгебраической системы может и не быть этой оценкой соответствующего множества решений исходной системы. Отсюда следует, что необходимо проводить предобуславливание не исходной системы с исходными интервальными матрицами, а системы содержащую характеритическую матрицу и характеритический вектор правой части [см., например 14], соответствующей конкретному множеству решений.

Вновь обратимся к теореме 10, на основе этой теоремы, имеем:

$$x \in \Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b}) \;\leftrightarrow\; \mathbf{A}^c x \subseteq \mathbf{b}^c.$$

Пусть $\Lambda-$квадратная точечная матрица размерности $\dim\{\Lambda\} = n \times n$, то на основании выше указанного, имеем

$$\Lambda\left(\mathbf{A}^c x\right) \subseteq \Lambda \mathbf{b}^c.$$

Известно [6], что произведение интервальных матриц неассоциативно. Рассмотрим следующее предположение.

Предположение 2. Пусть $X \in R^{m\times l}$, $\mathbf{Y} \in KR^{l\times k}$, $Z \in R^{k\times n}$, тогда

$$(X\mathbf{Y})Z = X(\mathbf{Y}Z).$$

Действительно

$$\left((X\mathbf{Y})Z\right)_{ij} = \sum_{\nu}(X\mathbf{Y})_{i\nu} Z_{\nu j} = \sum_{\nu}\left(\sum_{\mu} X_{i\mu}\mathbf{Y}_{\mu\nu}\right)Z_{\nu j} =$$

$$= \sum_{\nu}\sum_{\mu}\left(X_{i\mu}\mathbf{Y}_{\mu\nu}\right)Z_{\nu j} = \sum_{\nu}\sum_{\mu} X_{i\mu}\left(\mathbf{Y}_{\mu\nu}Z_{\nu j}\right) = \sum_{\mu}\sum_{\nu} X_{i\mu}\left(\mathbf{Y}_{\mu\nu}Z_{\nu j}\right) =$$

$$= \sum_{\mu} X_{i\mu}\sum_{\nu}\left(\mathbf{Y}_{\mu\nu}Z_{\nu j}\right) = \sum_{\mu} X_{i\mu}(\mathbf{Y}Z)_{\mu j} = \left(X(\mathbf{Y}Z)\right)_{ij},$$

откуда следует доказательство предположения. Отметим, что для вынесения за оператор суммы общего множителя $X_{i\mu}$ в последнем выражении, было примененно свойство дистрибутивности, т.е. $X(\mathbf{Y}+Z) = X\mathbf{Y} + XZ$.

Для точечных матрицы Λ и вектора x с учетом предположения 2, имеет место равенство

$$\Lambda\left(\mathbf{A}^c x\right) = \left(\Lambda\mathbf{A}^c x\right).$$

В последнем случае, приходим к импликации

$$x \in \Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b}) \;\leftrightarrow\; \left(\Lambda\mathbf{A}^c\right)x \subseteq \Lambda\mathbf{b}^c,$$

которое можно выразить в виде теоремы.

Теорема 15. Пусть $\Lambda \in R^{n\times n}$ квадратная точечная матрица, тогда множество решений $\Theta_{\alpha\beta}\left(\mathbf{A}^c,\mathbf{b}^c\right)$ для ИСЛАУ (202), с характеристической матрицей $\mathbf{A}^c$ и правой части $\mathbf{b}^c$, содержится во множестве $\exists\forall-$решений ИСЛАУ, соответствующих характеритической матрице $\Lambda\mathbf{A}^c$ и вектору правых частей $\Lambda\mathbf{b}^c$, т.е. $\Theta_{\alpha\beta}\left(\Lambda\mathbf{A}^c,\Lambda\mathbf{b}^c\right)$.

Из этой теоремы видно, что результатом предобуславливания может быть расширение множества $\exists\forall-$решений, но для получающейся характеристической матрицы может оказаться выполнение условия, накладываемое на ограничение спектрального радиуса, т.е. $\rho\left(\left|I-\mathbf{A}^c\right|\right) < 1$, которое желательно для применения рассматриваемого подхода. Таким образом, задачу оценивания некоторого множества решений исходной системы, возможно заменить на эквивалентную задачу оценивания множества решений некоторой предобусловленной системы, с предобусловленной характеритической матрицей и вектором правой части ИСЛАУ.

Итак, переформулируем теорему 13, с учетом предобуславливания исходной ИСЛАУ.

Теорема 16. Предположим, что для некотрой системы (202) с ее множеством решений $\Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b})$, и соответствующими харектеритической матрицей $\mathbf{A}^c$ и вектором правой части $\mathbf{b}^c$, существует некоторая матрица Λ, такая что выполняется условие

$$\rho\left(\left|I-\mathbf{A}^c\right|\right)<1. \tag{206}$$

Тогда решение на основе метода ПРМР ИСЛАУ (202)

$$x=\left(I-\Lambda\mathbf{A}^c\right)x+\Lambda\mathbf{b}^c, \tag{207}$$

которое существует и единственно в KR. При условии, что множество решений $\Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b})\neq 0-$ непусто, то решение ИСЛАУ (207) является правильным интервальным вектором, содержащим в себе множество решений $\Theta_{\alpha\beta}(\mathbf{A},\mathbf{b})$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 13.

В заключение этого параграфа, отметим, что улучшение свойств интервальной системы за счет предобуславливания не достигается бесплатно. Как отмечалась, при обуславливании происходит увеличение множества решений предобусловленной системы (203) в сравнении с множеством решений исходной ИСЛАУ. Причем, это расширение тем больше, чем больше предобуславливающая матрица отличается от диагональной (см., например [6, 13]). По этой причине не рекомендуется брать марицу Λ сильно отличающейся от диагональной.

Преимущество невырожденной матрицы Λ состоит в том, что, независимо от того какова матрица или вектор $\mathbf{H}$ соответствующего размера, имеет место равенство $\Lambda\mathbf{H}=\left\{\Lambda\mathbf{H}\middle|\ \mathrm{H}\in\mathbf{H}\right\}$, т.е. результат матричного умножения на матрицу Λ совпадает с множеством поэлементных точечных произведений. Следовательно, для невырожденной диагональной матрицы Λ справедливо рассуждение: $\mathrm{H}\in\mathbf{H}$ эквивалентно $\Lambda\mathrm{H}\in\Lambda\mathbf{H}$, а предобуславливание такой матрицей не изменяет множество решений ИСЛАУ.

9.2. Практический подход к решению ИСЛАУ на основе ПРМР.

Вернемся к исходной постановке задачи. Имеется система интервальных алгебраических уравнений вида:

$$\mathbf{C}^{x_l}=\varpi\left(\mathbf{\Lambda}+\Delta\mathbf{\Lambda}\right)\mathbf{C}^{x_l}+\mathbf{C}^f, \tag{208}$$

необходимо получить оценку множества решений этой системы. На основе рассмотреного ПРМР ИСЛАУ воспользуемся разложением матрицы $\mathbf{A}=\mathbf{I}-\varpi\left(\mathbf{\Lambda}+\Delta\mathbf{\Lambda}\right)$ в ряд. Предположим, что спектральный радиус матрицы

$$\rho(\mathbf{A})=\rho\left(\mathbf{I}-\varpi\left(\mathbf{\Lambda}+\Delta\mathbf{\Lambda}\right)\right)<1.$$

Справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{A})^{-1}{}_{n\times n} = \left(\mathbf{I} - \varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right)^{-1}{}_{n\times n} = \\
&= \mathbf{I}_{n\times n} + \varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda}) + \left(\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right)^2 + \ldots + \left(\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right)^{\nu} + \ldots \qquad (209) \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right)^{\nu}.
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\mathbf{R}^m_{n\times n} = \mathbf{I} + \varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda}) + \left(\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right)^2 + \ldots + \left(\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right)^m, \qquad (210)$$

тогда имеет место неравенство

$$\left\|\left(\mathbf{I} - \varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right)^{-1} - \mathbf{R}^m_{n\times n}\right\| \le \frac{\left\|\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right\|}{\left(1 - \left\|\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right\|\right)} \le \frac{\left\|\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right\|^{m+1}}{\left(1 - \left\|\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right\|\right)} = \varepsilon^m_{n\times n}. \qquad (211)$$

Пусть $\mathbf{E}_m \in \mathbf{I}\left(R^{n\times n}\right)$ – матрица, все элементы которой равны $\left[-\varepsilon^m_{n\times n}, +\varepsilon^m_{n\times n}\right]$. Определим интервальную матрицу $\mathbf{R}_m$ соотношением

$$(43) \qquad \mathbf{R}_m = \left(\ldots\left(\left(\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda}) + \mathbf{I}\right)\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda}) + \mathbf{I}\right)\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda}) + \ldots\right) + \mathbf{I},$$

т.е. выполняется m сложений. Тогда обратная матрица $\left(\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right)^{-1} \in \left(\mathbf{R}_m + \mathbf{I}_m\right)$ для любой матрицы $\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})^k \in \varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})$.

Сходимость матричного ряда (209), можно оценить, исследуя сходимость ряда из собственных значений матрицы $\left(\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right)^{-1}{}_{n\times n}$:

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \lambda_j\left[\left(\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right)_{n\times n}\right]\right)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\lambda_j^{\nu}\left[\left(\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right)_{n\times n}\right] = \\
&= 1 - \lambda_j\left[\left(\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right)_{n\times n}\right] + \left(\lambda_j\left[\left(\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right)_{n\times n}\right]\right)^2 - \ldots. - \qquad (212) \\
&- \left(\lambda_j\left[\left(\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right)_{n\times n}\right]\right)^{\infty}, \ j = \overline{1,m},
\end{aligned}$$

где $\lambda_j\left[\left(\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right)_{n\times n}\right]$ – j-ое собственное значение матрицы $\left(\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right)_{n\times n}$, m ранг матрицы $\left(\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right)_{n\times n}$: $m = rank\left\{\left(\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right)_{n\times n}\right\}$. Таким образом, условием сходимости ряда из собственных значений (212), а значит и сходимость матричного ряда (209), является следующее:

$$\rho\left(\left(\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right)_{n\times n}\right) = \left|\lambda_j\left(\left(\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right)_{n\times n}\right)\right| \le N < 1, \ j = \overline{1,m}. \qquad (213)$$

где $\rho\left(\left(\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right)_{n\times n}\right)$ – спектральный радиус матрицы $\left(\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right)_{n\times n}$, N – некоторое действительное число.

Для выполнения условия (213), необходимо чтобы детерминированная матрица $\left(\varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda})\right)_{n\times n}$ была близка к единичной [15]. Если это условие не выполнено или плохо выполнено, то в данном случае необходимо систему (208)

$$\mathbf{C}^{x_l} = \varpi\left(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda}\right)\mathbf{C}^{x_l} + \mathbf{C}^{f}, \tag{214}$$

подготовить к разложению в сходящийся ряд (209), для этого последнюю систему необходимо слева и права домножить на некоторую неособенную матрицу $\mathbf{F}_{n\times n}$ (предобуславливатель), размерности $n\times n = \dim\left\{\mathbf{F}_{n\times n}\right\}$, тогда система (214) примет вид

$$\mathbf{F}_{n\times n}\left(\mathbf{I} - \varpi\left(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda}\right)\right)\mathbf{C}^{x_l} = \mathbf{F}_{n\times n}\mathbf{C}^{f} \tag{215}$$

Матрица $\mathbf{F}_{n\times n}$ выбирается из условия, чтобы матрица

$$\mathbf{F}_{n\times n}\left(\mathbf{I} - \varpi\left(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda}\right)\right) = \mathbf{F}_{n\times n}\mathbf{A}_{\Lambda_k\, n\times n}$$

была близка к единичной, где индекс k означает $k-$ый элемент из любого интервала интервальной матрицы $\Delta\mathbf{\Lambda}$. Для этого домножим систему (215) на транспонированную матрицу $\left(\mathbf{A}_{\Lambda_k\, n\times n}\right)^{T}$, получим

$$\mathbf{F}_{n\times n}\left(\mathbf{A}_{\Lambda_k\, n\times n}\right)^{T}\mathbf{A}_{\Lambda_k\, n\times n}\mathbf{C}^{x_l} = \mathbf{F}_{n\times n}\left(\mathbf{A}_{\Lambda_k\, n\times n}\right)^{T}\mathbf{C}^{f}, \tag{216}$$

и введем обозначение

$$\mathbf{H}_{\Lambda_k n\times n} = \left(\mathbf{A}_{\Lambda_k\, n\times n}\right)^{T}\mathbf{A}_{\Lambda_k\, n\times n}. \tag{217}$$

Матрица (217) является положительно определенной, тогда, согласно [15], обратная матрица системы может быть подготовлена к разложению в сходящийся матричный ряд.

Перейдем к эквивалентной системе

$$\mathbf{H}^{0}_{n\times n}\mathbf{H}_{n\times n\Lambda_k}\mathbf{C}^{x_l} = \mathbf{H}^{0}_{n\times n}\left(\mathbf{A}_{\Lambda_k\, n\times n}\right)^{T}\mathbf{C}^{f}, \tag{218}$$

где $\mathbf{H}^{0}_{n\times n}$ – матрица, определяемая следующим образом:

$$\mathbf{H}^{0}_{n\times n} = \exp\left(-\delta^2/\mu\right)\bar{\mathbf{H}}_{n\times n},\ \bar{\mathbf{H}}_{n\times n} = \left(\left(\mathbf{A}_{\Lambda_0}\right)^{T}_{pn\times pn}\left(\mathbf{A}_{\Lambda_0}\right)_{pn\times pn}\right)^{-1}, \tag{219}$$

где $\mu-$параметр оптимизации, $\delta-$интервальная неопределенность, а матрица $\left(\mathbf{A}_{\Lambda_0}\right)_{n\times n}$ определяется выражением

$$\left(\mathbf{A}_{\Lambda_0}\right)_{n\times n} = \left(\mathbf{I} - \varpi\left(\mathbf{\Lambda} + \Delta\mathbf{\Lambda}\right)\right)\Big|_{k=0} = \mathbf{I} - \varpi\mathbf{\Lambda} \tag{220}$$

т.е. в отсутствие интервальной неопределённости (при номинальных значениях параметров системы (208)).

Матрица $\tilde{\mathbf{H}}_{n\times n} = \mathbf{H}^{0}_{n\times n}\mathbf{H}_{\Lambda_k n\times n}$ также является положительно определенной и определяется выражением:

$$\tilde{\mathbf{H}}_{n\times n} = \exp\left(-\delta^2/\mu\right)\bar{\mathbf{H}}_{n\times n}\mathbf{D}_{n\times n}, \tag{221}$$

где $\mathbf{D}_{n\times n} = \left(\mathbf{D}_{n\times n}\right)^{T} \succ 0,$ тогда все собственные значения матрицы (219) принадлежат некоторому конечному неотрицательному промежутку [15], т.е.

$$\lambda_j\left(\tilde{\mathbf{H}}_{n\times n}\right) \in \left(r_1, r_2\right),\ j = \overline{1,m},\ 0 \le r_1 < r_2 < \infty. \tag{222}$$

Поскольку матрица (221) положительно определена, то систему (218) можно представить в виде:

$$\mathbf{F}_{n\times n}\mathbf{H}^0_{n\times n}\mathbf{H}_{\Lambda_k n\times n}\mathbf{C}^{x_l} = \mathbf{F}_{n\times n}\mathbf{H}^0_{n\times n}\left(\mathbf{A}_{\Lambda_k n\times n}\right)^T\mathbf{C}^f, \tag{223}$$

где

$$\mathbf{F}_{n\times n} = \frac{2}{\max\limits_j\left(\max\limits_\delta\left(\lambda_j\left(\tilde{\mathbf{H}}_{n\times n}\right)\right)\right) + \min\limits_j\left(\min\limits_\delta\left(\lambda_j\left(\tilde{\mathbf{H}}_{n\times n}\right)\right)\right)}\mathbf{I}_{n\times n}. \tag{224}$$

Перепишем систему (223) в виде

$$\left[\mathbf{I}_{n\times n} - \left(\mathbf{I}_{n\times n} - \mathbf{F}_{n\times n}\mathbf{H}^0_{n\times n}\mathbf{H}_{\Lambda_k n\times n}\right)\right]\mathbf{C}^{x_l} = \mathbf{F}_{n\times n}\mathbf{H}^0_{n\times n}\left(\mathbf{A}_{\Lambda_k n\times n}\right)^T\mathbf{C}^f, \tag{225}$$

и введем обозначение

$$\tilde{\mathbf{W}}_{n\times n} = \mathbf{I}_{n\times n} - \mathbf{F}_{n\times n}\mathbf{H}^0_{n\times n}\mathbf{H}_{\Lambda_k n\times n}, \tag{226}$$

тогда (225) примет следующий вид

$$\left[\mathbf{I}_{n\times n} - \tilde{\mathbf{W}}_{n\times n}\right]\mathbf{C}^{x_l} = \mathbf{F}_{n\times n}\mathbf{H}^0_{n\times n}\left(\mathbf{A}_{\Lambda_k n\times n}\right)^T\mathbf{C}^f, \tag{227}$$

Из (227) находим

$$\mathbf{C}^{x_l} = \left[\mathbf{I}_{n\times n} - \tilde{\mathbf{W}}_{n\times n}\right]^{-1}\mathbf{F}_{n\times n}\mathbf{H}^0_{n\times n}\left(\mathbf{A}_{\Lambda_k n\times n}\right)^T\mathbf{C}^f. \tag{228}$$

Тогда почти все собственные значения матрицы (226) будут заключены в открытом интервале $(-1,1)$ [15]. Поскольку для любого $\forall k \in (k_1, k_2)$ справедливо условие $\left|\lambda_j\left[\tilde{\mathbf{W}}_{n\times n}\right]\right| \le K < 1 \quad \forall j = \overline{1,m},$ за исключением, быть может, конечного числа $k_i,\, i = \overline{1,l}$ для которых $\left|\lambda_j\left[\tilde{\mathbf{W}}_{n\times n}\right]\right| = 1$, то из того, что $P(r_1 \le r \le r_2) = 1$, $P-$ вероятность, следует, что $P\left(\left|\lambda_j\left[\tilde{\mathbf{W}}_{n\times n}\right]\right| \le K < 1\right) = 1, \quad j = \overline{1,m}.$ А из последнего следует, что ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left(\lambda_j\left[\tilde{\mathbf{W}}_{n\times n}\right]\right)^i$ с вероятность равной 1 сходится равномерно [15], а это влечет за собой сходимость с вероятностью 1 матричного ряда

$$\left(\mathbf{I}_{n\times n} - \tilde{\mathbf{W}}_{n\times n}\right)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\tilde{\mathbf{W}}_{n\times n}\right)^i, \tag{229}$$

и ряда

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^{x_l} &= \left[\mathbf{I}_{n\times n} - \tilde{\mathbf{W}}_{n\times n}\right]^{-1}\mathbf{F}_{n\times n}\mathbf{H}^0_{n\times n}\left(\mathbf{A}_{\Lambda_k n\times n}\right)^T\mathbf{C}^f = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\tilde{\mathbf{W}}_{n\times n}\right)^i\mathbf{F}_{n\times n}\mathbf{H}^0_{n\times n}\left(\mathbf{A}_{\Lambda_k n\times n}\right)^T\mathbf{C}^f\end{aligned} \tag{230}$$

Рассмотрим подход для обращения интервальных матриц обеспечивающий более быструю сходимость.

Пусть теперь $\mathbf{A}_{\Lambda_k} \in R^{n\times n}$ – невырожденная вещественная матрица, а матрица $\mathbf{T}^{(0)} \in \mathbf{I}\left(R^{n\times n}\right)$ такова, что $\left(\mathbf{A}_{\Lambda_k}\right)^{-1} \in \mathbf{T}^{(0)}$. Рассмотрим предложенный Алефельдом и Херцбергером итеративный процесс получения более точных интервальных приближений к $\left(\mathbf{A}_{\Lambda_k}\right)^{-1}$:

$$\mathbf{T}^{(l+1)} = m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right) + m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\Lambda_k} m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\right) + \ldots + \\ + m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\Lambda_k} m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\right)^{k-2} + \left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\Lambda_k} m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\right)^{k-1},\ k > 1. \tag{240}$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 17 [6].

1. Каждый член последовательности $\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)_{l=0}^{\infty}$ содержит $\left(\mathbf{A}_{\Lambda_k}\right)^{-1}$.

2. Последовательность $\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)_{l=0}^{\infty}$ сходится к $\left(\mathbf{A}_{\Lambda_k}\right)^{-1}$ тогда и только тогда, когда спектральный радиус $r\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\Lambda_k} m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\right)$ матрицы $\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\Lambda_k} m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\right)$ меньше единицы:

$$r\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\Lambda_k} m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\right) < 1. \tag{241}$$

3. Если $\|\ \|$ – монотонная мультипликативная матричная норма[3], то для последовательности матриц $\left\{\varpi\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\right\}_{l=0}^{\infty}$ выполняется оценка

$$\left\|\varpi\left(\mathbf{T}^{(l+1)}\right)\right\| \le c\left\|\varpi\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\right\|^{k},\ c = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left\|\mathbf{A}_{\Lambda_k}\right\|^{k-1}, \tag{242}$$

где $\varpi(\mathbf{A})$ – матрица с элементами $\varpi\left(\mathbf{A}_{ij}\right)$.

Пусть опять что $\left(\mathbf{A}_{\Lambda_k}\right)^{-1} \in \mathbf{T}^{(0)}$. Определим последовательность $\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)_{l=0}^{\infty}$ равенствами

$$\mathbf{R}^{(l+1)} = m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right) + m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\Lambda_k} m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\right) + \ldots + \\ + m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\Lambda_k} m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\right)^{k-2} + \left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\Lambda_k} m\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\right)^{k-1}, \\ \mathbf{T}^{(l+1)} = \mathbf{R}^{(l+1)} \cap \mathbf{T}^{(l)}. \tag{243}$$

Теорема 18.

1. $\left(\mathbf{A}_{\Lambda_k}\right)^{-1} \in \mathbf{T}^{(l)}$ при всех $l = 0, 1, 2, \ldots$

---

[3] Норма $\|\ \|$ называется мультипликативной, если для $\forall\ \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{I}\left(R^{n\times n}\right)$ справедливо:

1. $|\mathbf{A}| \le |\mathbf{B}| \Rightarrow \|\mathbf{A}\| \le \|\mathbf{B}\|$;
2. $\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$ (см. например, [17])

2. Последовательность $\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)_{l=0}^{\infty}$ сходится к $\left(\mathbf{A}_{\Lambda_k}\right)^{-1}$, если при всех $\mathbf{A}_{\Lambda_k} \in \mathbf{T}^{(0)}$ спектральный радиус матрицы $\left(\mathbf{A}_{\Lambda_k}\right)^{-1}$ меньше единицы:

$$\left(\mathbf{A}_{\Lambda_k}\right)^{-1} < 1. \tag{244}$$

3. Если $\| \ \|$ – монотонная мультипликативная матричная норма, то

$$\left\|\varpi\left(\mathbf{T}^{(l+1)}\right)\right\| \le c\left\|\varpi\left(\mathbf{T}^{(l)}\right)\right\|^{k}, c=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left\|\mathbf{A}_{\Lambda_k}\right\|^{k-1}. \tag{49}$$

Для реализации методов, определяемых соотношениями (240), (243), необходимо знать начальное приближение $\mathbf{T}^{(0)}$, которое можно получить из условия (220) при номинальных значениях параметров системы.

10. Выводы

В статье рассмотрен методы проекционного типа решения слабо сингулярного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с возмущенным оператором. Выжным примером рассматриваемого класса уравнений является широко используемое уравнение в матетической теории управления, в задачах управления в условиях параметрических неопределенностей. В этом случае возмущения в ядре интегрального уравнения рассматривается как параметрическая неопределенность. В статье получены следующие результаты:

1. Для численного решения слабо сингулярного интегрального уравнения Фредгольма втрого рода с возмущенным оператором предложены варианты проекционного метода использующего пространство кусочно линейных и кусочно постоянных функций.

2. Получены оценки погрешности предложенных методов в нормах просранств $L_q(J)$ и $C(\bar{J})$ для задач с правой частью $f(\tau)$ гладкости функций из пространств $L_p(J)$, $C(\bar{J})$ и $W_p^1(J)$.

3. Предложены эффективные методы численной реализации конечномерной задачи.

Конечномерная задача представляет собой систему интервальных алгебраических уравнений. Доказано существование и единственность решений указанной задачи. Рассмотрен прямой регулярный метод решения ИСЛАУ, основанный на разложении обратной интервальной матрицы в матричный ряд.

Построен сходящийся матричный ряд и рассмотрена оптимизация скорости сходимости итерационных процессов, даны оценки быстроты сходимости этих итерационных процессов в терминах нормы.

При практических расчетах число членов этого ряда может достигать нескольких тысяч, причем многие из членов могут быть вычислены независимо друг от друга. Возможно объединение независимо вычисляемых членов в группы и параллельное вычисление этих групп на отдельных процессорах. Выбор Grid-систем в качестве вычислительной среды накладывает известные ограничения на характер распараллеливания алгоритмов, но алгоритмы, рассмотренные в данной работе, отличаются тем, что в них могут распараллеливаться не элементарные матричные операции, а относительно крупные части алгоритма, что позволяет, с одной стороны хорошо загрузить процессоры сетевых компьютеров, а с другой – избежать перегрузки сети частыми передачами больших объемов данных.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Егупов Н.Д., Пупков К.А., Рогоза А.А., Трофимов М.А. Алгоритмическая теория систем управления, основанная на спектральных методах. В двух томах. Том 2. Матрично-вычислительные технологии на базе интегральных уравнений. Под ред. Матвеева В.А. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. – 464 с.

[2] Шарый С.П. О характеризации объединенного множества решений интервальной линейной алгебраической системы. – Красноярск, 1990. – 20 с. – Депонировано в ВИНИТИ, № 726-И91.

[3] Kreinovich V., Lakeyev A., Rohn J., Kahi p. Computational Complexity and Feasibility of Data Processing and Interval Computations. Dordrecht: Kluwer, 1997.

[4] Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. Москва: Наука, 1972.

[5] Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – Москва: Мир, 1971.

[6] Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – Москва: Мир, 1987.

[7] Oettli W. On the solution set of a linear system with inaccurate coefficients. SIAM Jornal on Numerical Analysis. 1965 Vol. 2, №1 pp. 115-118.

[8] Лакеев А.В. Вычислительная сложность оценивания обобщенных множеств решений интервальных линейных систем. Труды XI международной Байкальской школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, Байкал, 5 – 12 июля 1998 г., секция 4. Иркутск: ИСЭМ, 1998. с. 115-118.

[9] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Москва: Мир, 1982.

[10] Kaucher E. Interval analysis in the extended interval space IR. Computing Supplement. – 1980. – Vol. 2. – p. 33-49.

[11] Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. Москва: Мир, 1969.

[12] Ортега Дж., Рейнболт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – Москва: Мир, 1975.

[13] Neumaer A. Interval methods for systems of equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[14] Шарый С.П. Внешнее оценивание обобщенных множеств решений интервальных линейных систем. Вычислительные технологии. 1999. Т.4, №4. – с. 82 – 110.

[15] Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматлит, 1960. – 656 с.

[16] Rutily B., Chevallier L. Why is so difficult to solve the radiative transfer equation? EAS Publications Series, 2006. Vol. 18, pp. 1-23.

[17] Ahues M., Largillier A., Titaud O. The roles of a week singularity and the grid uniformity in relative error bounds . Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 2001. Vol. 22, 7-8, pp. 789-814.

[18] Ahues M., d'Almeida F.D., Largillier A., Titaud O., Vasconcelos P. An L 1 refined projection approximate solution of the radiation transfer equation in stellar atmospheres. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2002, Vol. 140, 1-2, pp. 13-26.

[19] Panasenko G., Rutily B. Titaud O. Asymptotic analysis of integral equations for a great interval and its application to stellar radiative transfer. C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. Mecanique. 2002, Vol. 330, pp. 735-740.

[20] Amosov A., Panasenko G., Rutily B. An approximate solution to the integral radiative transfer equation in an optically thick slab. C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. Mecanique. 2003. Vol. 331, pp. 823-828.

[21] Rutily B. Multiple scattering theory and integral equations. Integral Methods in Science and Engineering (C. Constanda, M. Ahues, and A. Largillier, eds.). Birkhauser, Boston, pp. 211-232, 2004.

[22] Rutily B., Chevallier L. The nite Laplace transform for solving a weakly singular integral equation occurring in transfer theory. Journal of Integral Equations and Applications. 2004, Vol. 16, 4, pp. 389 409.

[23] Ahues M., Amosov A., Largillier A., Titaud O. L p error estimates for projection approximations. Applied Mathematics Letters. 2005. Vol. 18, pp. 381-386.

[24] Amosov A., Panasenko G. Asymptotic analysis and asymptotic domain decomposition for an integral equation of the radiative transfer type. J. Math. Pures Appl. 2005. Vol. 84, pp. 1813-1831.

[25] d'Almeida F., Titaud O., Vasconcelos P. B. A numerical study of iterative renement schemes for weakly singular integral equations. Applied Mathematics Letters. 2005, Vol. 18, 5, pp. 571 - 576.

[26] Amosov A., Panasenko G. An approximate solution to the integral radiative transfer equation in an optically thick slab. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2007. Vol. 30, pp. 1593-1608.

[27] Amosov A., Ahues M., Largillier A. Superconvergence of projection methods for weakly singular integral operators. Integral Methods in Science and Engineering: Techniques and Applications (Constanda C., Potapenko S. eds). Birthauser, Boston. 2008, pp. 17.

[28] Amosov A., Ahues M., Largillier A. Supercovergence of some projection approximations for weakly singular integral equations using general grids. Siam Journal on Numerical Analysis, 2009, Vol. 47, Issue 1, pp. 646-674.

[29] Ahues M., d' Almeida F., Fernandes R. Piecewise constant Galerkin approximations of weakly singular integral equations. Int. J. Pure Appl. Math. 2009. Vol. 55, 4, pp. 569-580.

[30] Nunes A. L., Vasconcelos P.B., Ahues M. Error Bounds for Low-Rank Approximations of the First Exponential Integral Kernel. Numerical Functional Analysis and Optimization. 2013. Vol. 34, 1, pp. 74 - 93.

[31] d'Almeida F.D., Ahues M., Fernandes R. Errors and grids for projected weakly singular integral equations. Int. J. Pure Appl. Math. 2013. Vol. 89, 2, pp. 203-213.

[32] Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. 416 с.

[33] Канторович Л.В. Функциональный анализ и прикладная математика. УМН. 1948. Т. 3, Вып. 6 (28), С. 89 – 185.

[34] Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. Физматлит. М.; 1962.