ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2008
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172

http://www.neva.ru/journal
http://www.math.spbu.ru/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

ПРОБЛЕМА ЦИКЛИЧНОСТИ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. Г. Романовский,[1] *A. S. Jarrah,* [2] *R. Laubenbacher* [3]

0. Введение. Рассмотрим двумерную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = P_n(u,v), \ \ \frac{dv}{dt} = Q_n(u,v), \tag{1}$$

где $P_n(u,v), Q_n(u,v)$ – многочлены степени n, u и v – вещественные неизвестные функции. Во второй части своей 16-й проблемы Гильберт поставил вопрос о числе и расположении предельных циклов *полиномиальной системы* (1). Именно, необходимо найти максимальное число – $H(n)$ – предельных циклов системы (1), правые части которой полиномы степени n, и их взаимное расположение. Несмотря на простоту постановки проблемы до настоящего времени она не решена даже в простейшем случае $n = 2$. Один из возможных подходов к ее исследованию – вначале детально изучить локальную проблему: бифуркации предельных циклов из особых точек и сепаратрисных циклов. В настоящее время значительное число исследований по данной проблеме Гильберта посвящено такому локальному анализу (см., например, [1, 2] и приведенную там библиографию).

[1] **Center for Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Maribor**, CAMTP, Krekova, 2, Maribor, SI-2000, Slovenia. **E-mail:** valery.romanovsky@uni-mb.si

[2] **New Mexico State University**, Department of Mathematical Sciences, New Mexico State University, Las Cruces, NM 88003, USA **E-mail:** ajarrah@nmsu.edu

[3] **Virginia Bioinformatics Institute**, 1880 Pratt Drive Blacksburg, VA 24061, USA **E-mail:** reinhard@almaren.bioinformatics.vt.edu

© *В. Г. Романовский, A. S. Jarrah, R. Laubenbacher*, 2008

В настоящей статье мы рассмотрим простейший случай локальных бифуркаций – бифуркации предельных циклов из элементарного центра или фокуса. Наш подход состоит в следующем. Полагая $x = u + iv$, введем на плоскости (u, v) комплексную структуру. В случае, когда начало координат элементарный центр или фокус систему (1) можно записать в виде

$$i\frac{dx}{dt} = x - \sum_{(p,q)\in S} a_{pq}x^{p+1}\bar{x}^q, \tag{2}$$

где a_{pq} – комплексные коэффициенты, $S = \{(m,k)|m+k \geqslant 1\}$ – подмножество из $\{-1 \cup \mathbf{N}\} \times \mathbf{N}$, $\mathbf{N}$ – множество неотрицательных целых чисел, и $|S| = l$, т.е. число элементов множества S равно l.

Удобно рассматривать вместо (2) систему более общего вида

$$i\frac{dx}{dt} = x - \sum_{(p,q)\in S} a_{pq}x^{p+1}y^q = X(x,y), \quad -i\frac{dy}{dt} = y - \sum_{(p,q)\in S} b_{qp}x^q y^{p+1} = -Y(x,y) \tag{3}$$

где x, y, a_{pq}, b_{qp} – комплексные переменные. Эта система эквивалентна уравнению (2) в случае, когда $y = \overline{x}, b_{ij} = \overline{a}_{ji}$. Обозначим через $E(a,b)(= \mathbf{C}^{2l})$ пространство параметров системы (3), через $E(a)(= \mathbf{C}^l)$ – пространство параметров системы (2), и через $\mathbf{C}[a,b]$ – кольцо многочленов над $\mathbf{C}$ от переменных a_{pq}, b_{qp}.

Как хорошо известно (см., например, [3]), можно найти формальный ряд (функцию Ляпунова)

$$\Psi(x,y) = xy + \sum_{\substack{l+j=3 \\ l,j\geqslant 0}}^{\infty} v_{lj}x^l y^j, \tag{4}$$

такой что

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial\Psi}{\partial x}X + \frac{\partial\Psi}{\partial y}Y = g_{11}(a,b)(xy)^2 + g_{22}(a,b)(xy)^3 + \cdots,$$

где g_{ii}, v_{lj} – многочлены от a_{pq}, b_{qp}. Мы называем полиномы g_{ii} *фокусными величинами* и идеал фокусных величин – $I = \langle g_{11}, g_{22}, \ldots\rangle$ – *идеалом Баутина.* Через I_k будем обозначать идеал, порожденный первыми k фокусными величинами, $I_k = \langle g_{11}, \ldots, g_{kk}\rangle$.

О п р е д е л е н и е 1. Система (3) с фиксированными значениями параметров $a = a^*, b = b^*$ имеет центр в начале координат если $g_{kk}(a^*, b^*) = 0$ для всех $k \geqslant 1$.

Таким образом, в случае центра существует формальный интеграл вида (4), и, более того, согласно теореме Пуанкаре-Ляпунова данный интеграл является аналитическим.

Обозначим через $\mathbf{V}(J)$ *(алгебраическое) многообразие* идеала $J \subset \mathbf{C}[a,b]$, т.е. $\mathbf{V}(J) = \{(a,b) \in \mathbf{C}^{2l} \mid f(a,b) = 0 \ \forall f \in J\}$.

Определение 2. Многообразие идеала Баутина

$$V = \mathbf{V}(\langle g_{11}, g_{22}, \ldots, g_{ii}, \ldots \rangle)$$

называется многообразием центра системы (3).

Подчеркнем, что не следует путать многообразие центра с так называемым центральным многообразием в фазовом пространстве. Многообразие центра это объект не в фазовом пространстве, а в пространстве параметров системы.

Согласно определению, каждой точке из V соответствует система имеющая центр в начале координат (т.е. интеграл (4)). Однако, в частном случае, когда $(a,b) \in V$ и $a_{pq} = \bar{b}_{qp}$ для всех $(p,q) \in S$, данная точка соответствует вещественной системе вида (2) с топологическим центром на вещественной плоскости $x = u + iv$.

Определение 3. Обозначим через $n_{a,\epsilon}$ число предельных циклов системы (2) в ϵ-окрестности начала координат. Мы говорим, что особая точка $x = 0$ системы (2) с фиксированными коэффициентами $a^* \in E(a)$ имеет цикличность k по отношению к пространству $E(a)$, если существуют δ_0, ϵ_0 такие что для любых $0 < \epsilon < \epsilon_0$ и $0 < \delta < \delta_0$

$$\max_{a \in U_\delta(a^*)} n_{a,\epsilon} = k.$$

Проблему *цикличности* элементарного центра или фокуса иногда называют *локальной 16-й проблемой Гильберта* [4].

Как показано в [5], функция последования для системы (2) может быть представлена в виде

$$\mathcal{P}(\rho) = \rho + g_{11}(a,\bar{a})(1 + \ldots)\rho^3 + g_{22}(a,\bar{a})(1 + \ldots)\rho^5 + \ldots . \tag{5}$$

Пусть $D_I = \langle g_{k_1k_2}, g_{k_2k_2}, \ldots, g_{k_mk_m} \rangle$ базис идеала Баутина I со следующим свойством: для любых $g_{k_ik_i}, g_{k_jk_j}$ из D_I $k_i < k_j$ при $i < j$, и для любого k_s, такого что $k_i < k_s < k_{i+1}$, многочлен $g_{k_sk_s}$ принадлежит идеалу I_{k_i}. С использованием (5) из результатов [6] (см. также [2, 7, 8]) легко заключить, что справедлива

Теорема 1. *Если D_I – определенный выше базис идеала $I \subset \mathbf{C}[a,b]$, то цикличность элементарного центра или фокуса $x=0$ любой системы $E_0 \in E(a)$ меньше или равна $m-1$ (где m – число элементов базиса D_I).*

Замечание 1. Хорошо известно (следует из результатов Баутина [6]), что если принять во внимание возмущение системы (2) линейными членами, то цикличность будет ровно на единицу больше, т.е. равна m. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением систем вида (2), что технически существенно проще, поскольку для системы (2) все фокусные величины являются многочленами, а в случае введения линейного возмущения первая фокусная величина становится степенным рядом от параметра.

Общий подход к исследованию проблемы был предложен Баутиным и состоит из двух шагов: 1) в начале находим многообразие центра, 2) затем находим базис идеала Баутина. Хотя в настоящее время нет общих методов позволяющих гарантированно найти многообразие центра произвольной полиномиальной системы, все же проблема 1) достаточно хорошо изучена и основная сложность с которой мы сталкиваемся в настоящее время – громоздкость фокусных величин. Вторая проблема – построения базиса идеала Баутина – исследована гораздо меньше. Один из результатов в этом направлении получен в нашей работе [9], где показано, что зная многообразие центра можно легко решить проблему цикличности с использованием алгоритмов вычислительной коммутативной алгебры в тех случаях, когда идеал Баутина является радикальным идеалом. Продемонстрируем это на примере системы с однородными кубическими нелинейностями, проблема цикличности для которой впервые была решена К.С.Сибирским [10]:

$$i\dot{x} = x - a_{20}x^3 - a_{11}x^2\bar{x} - a_{02}x\bar{x}^2 - a_{-13}\bar{x}^3. \tag{6}$$

Основное отличие нашего подхода от применявшегося Баутиным [6], Сибирским [10] и Яковенко [11] состоит в том, что для построения базиса идеала Баутина мы используем не многообразие центра вещественной системы, а многообразие центра более общей комплексной системы (3), в данном случае системы

$$\begin{aligned} i\dot{x} &= x - a_{20}x^3 - a_{11}x^2y - a_{02}xy^2 - a_{-13}y^3, \\ i\dot{y} &= -(y - b_{02}y^3 - b_{11}xy^2 - b_{20}x^2y - b_{3,-1}x^3). \end{aligned} \tag{7}$$

Вычисляя для данной системы пять первых фокусных величин (например, по алгоритму из [3]) и деля каждую следующую величину по идеалу предыдущих, находим

$$
\begin{aligned}
g_{11} &= a_{11} - b_{11};\\
g_{22} &= a_{20}a_{02} - b_{02}b_{20};\\
g_{33} &= (3a_{20}^2 a_{-13} + 8a_{20}a_{-13}b_{20} + 3a_{02}^2 b_{3,-1}\\
&\quad - 8a_{02}b_{02}b_{3,-1} - 3a_{-13}b_{20}^2 - 3b_{02}^2 b_{3,-1})/8;\\
g_{44} &= (-9a_{20}^2 a_{-13}b_{11} + a_{11}a_{-13}b_{20}^2 + 9a_{11}b_{02}^2 b_{3,-1} - a_{02}^2 b_{11}b_{3,-1})/16;\\
g_{55} &= (-9a_{20}^2 a_{-13}b_{02}b_{20} + a_{20}a_{02}a_{-13}b_{20}^2 + 9a_{20}a_{02}b_{02}^2 b_{3,-1} +\\
&\quad 18a_{20}a_{-13}^2 b_{20}b_{3,-1} + 6a_{02}^2 a_{-13}b_{3,-1}^2 - a_{02}^2 b_{02}b_{20}b_{3,-1}\\
&\quad -18a_{02}a_{-13}b_{02}b_{3,-1}^2 - 6a_{-13}^2 b_{20}^2 b_{3,-1})/36.
\end{aligned}
$$

Как впервые было доказано Сибирским [10] (и позднее Жолондеком [12]) имеет место

Теорема 2. *Цикличность состояния равновесия $x = 0$ системы (6) не превосходит 4.*

Наше доказательство теоремы 2 совершенно элементарно и является прямым следствием следующих двух утверждений.

Предложение 1. *Пусть $I^{(c)} = \langle g_{11}, g_{22}, \ldots, \rangle$ – идеал Баутина системы (7). Многообразие центра $\mathbf{V}(I^{(c)})$ системы (7) состоит из трех неприводимых компонент:*

$$\mathbf{V}(I^{(c)}) = \mathbf{V}(I_5^{(c)}) = \mathbf{V}(J_1) \cup \mathbf{V}(J_2) \cup \mathbf{V}(J_3),$$

где $J_1 = \langle a_{11} - b_{11}, 3a_{20} - b_{20}, 3b_{02} - a_{02}\rangle$, $J_2 = \langle a_{11}, b_{11}, a_{20} + 3b_{20}, b_{02} + 3a_{02}, a_{-13}b_{3,-1} - 4a_{02}b_{20}\rangle$ *и* $J_3 = \langle a_{20}^2 a_{-13} - b_{3,-1}b_{02}^2, a_{20}a_{02} - b_{20}b_{02}, a_{20}a_{-13}b_{20} - a_{02}b_{3,-1}b_{02}, a_{11} - b_{11}, a_{02}^2 b_{3,-1} - a_{-13}b_{20}^2\rangle$.

Необходимость приведенных в теореме условий центра легко устанавливается разложением фокусных величин на множители. Для доказательства достаточности можно заметить, что системы из $\mathbf{V}(J_1)$ – гамильтоновы, системы из $\mathbf{V}(J_3)$ – обратимы, и точки компоненты $\mathbf{V}(J_2)$ соответствуют системам с инвариантной коникой f_1 и инвариантной кубикой f_2, позволяющими построить первый интеграл типа Дарбу $f_1^3 f_2^{-2} \equiv c$ (подробнее см., например, [12], [9]). Неприводимость компонент $\mathbf{V}(J_1)$ и $\mathbf{V}(J_2)$ очевидна, а неприводимость $\mathbf{V}(J_3)$ следует из теоремы 9 в [9].

Предложение 2. *Идеал Баутина системы (7) порожден первыми пятью фокусными величинами.*

Доказательство. Покажем вначале, что идеал $I^{(c)}$ является радикальным идеалом кольца $\mathbf{C}[a_{20}, a_{11}, a_{02}, \ldots, b_{11}, b_{02}]$. Вычисляя пересечение идеалов J_k (об алгоритмических вычислениях в полиномиальных кольцах см., например, [13]), находим

$$I_5^{(c)} = J_1 \cap J_2 \cap J_3.$$

Следовательно, $I_5^{(c)}$ радикальный идеал, поскольку, как легко видеть, идеалы J_1, J_2 простые, а идеал J_3 прост по теоремам 2 и 9 из [9].

Таким образом, $\mathbf{V}(I^{(c)}) = \mathbf{V}(I_5^{(c)})$ и $I_5^{(c)}$ является радикальным идеалом. Значит, $I^{(c)} = I_5^{(c)}$. Предложение доказано.

Доказательство теоремы 2. Теорема 2 явлеется прямым следствием теоремы 1 и предложения 2.

Совершенно аналогично можно доказать известную теорему Баутина о цикличности квадратичной системы [6, 9, 11, 14].

В настоящей статье мы рассмотрим проблему цикличности для системы

$$i\dot{x} = x - a_{10}x^2 - a_{01}x\bar{x} - a_{-13}\bar{x}^3. \tag{8}$$

Выбор этой системы обусловлен тем, что хотя ее фокусные величины несколько сложнее, чем величины системы (7) и квадратичной системы, они все-таки не слишком громоздки и поддаютя анализу.

Как и выше, рассмотрим вместе с системой (8) более общую систему

$$\begin{aligned} i\dot{x} &= x - a_{10}x^2 - a_{01}xy - a_{-13}y^3, \\ i\dot{y} &= -(y - b_{01}y^2 - b_{10}xy - b_{3,-1}x^3). \end{aligned} \tag{9}$$

Мы показываем, что для системы (9) идеал Баутина не является радикальным. Тем не менее, используя моноидную структуру фокусных величин и вычислительные алгоритмы коммутативной алгебры нам удалось найти базис данного идеала (правда в несколько ином кольце) и получить верхнюю оценку цикличности для "почти всех" систем (8).

Обозначим через $\hat{H}(n)$ максимум цикличностей элементарных центров или фокусов системы (1). Возвращаясь к вопросу поставленному в локальной 16-й проблеме Гильберта следует отметить, что оценка цикличности $\hat{H}(n)$ (мы обозначаем через $\hat{H}(n)$ максимальную цикличность элементарного центра или фокуса системы (1) правые части которой – полиномы степени n) известна только в простейшем случае $n = 2$, $\hat{H}(2) = 3$ [6, 9, 11, 14], а проблема оценки $\hat{H}(3)$ все еще остается открытой. Более того, в настоящее время не видно причин полагать, что принципиально возможно найти $\hat{H}(n)$ как некоторую определенную функцию от n. Однако можно взглянуть на проблему с несколько иной точки зрения и поставить вопрос: возможно ли выполнить два отмеченных выше шага алгоритмически? Именно, для полиномиальной системы с особой точкой типа центра или фокуса можно поставить две проблемы:

1) Существует ли алгоритм, позволяющий найти многообразие центра в конечное число шагов?

2) Возможно ли найти базис идеала Баутина в конечное число шагов, если известно многообразие центра.

Положительный ответ на эти вопросы был бы, в некотором смысле, решением локальной 16-й проблемы Гильберта.

1. Многообразие центра системы (9). Рассмотрим вначале проблему центра для системы (9).

Теорема 3. *Многообразие центра системы (9) состоит из следующих неприводимых компонент:*
1) $a_{10} = a_{-13} = b_{10} = 3a_{01} - b_{01} = 0$,
2) $b_{01} = b_{3,-1} = a_{01} = 3b_{10} - a_{10} = 0$,
3) $a_{10} = a_{-13} = b_{10} = 3a_{01} + b_{01} = 0$,
4) $b_{01} = b_{3,-1} = a_{01} = 3b_{10} + a_{10} = 0$,
5) $a_{01} = a_{-13} = b_{10} = 0$,
6) $a_{01} = b_{3,-1} = b_{10} = 0$,
7) $a_{01} - 2b_{01} = b_{10} - 2a_{10} = 0$,
8) $a_{10}a_{01} - b_{01}b_{10} = a_{01}^4 b_{3,-1} - b_{10}^4 a_{-13} = a_{10}^4 a_{-13} - b_{01}^4 b_{3,-1} = a_{10}a_{-13}b_{10}^3 - a_{01}^3 b_{01} b_{3,-1} = a_{10}^2 a_{-13} b_{10}^2 - a_{01}^2 b_{01}^2 b_{3,-1} = a_{10}^3 a_{-13} b_{10} - a_{01} b_{01}^3 b_{3,-1} = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычисляя первые 9 фокусных величин получаем

$$
\begin{aligned}
g_{11} &= a_{10}a_{01} - b_{01}b_{10};\\
g_{22} &= g_{66} = g_{88} = 0;\\
g_{33} &= -(2a_{10}^3a_{-13}b_{10} - a_{10}^2a_{-13}b_{10}^2 - 18a_{10}a_{-13}b_{10}^3 - 9a_{01}^4b_{3,-1} +\\
&\quad 18a_{01}^3b_{01}b_{3,-1} + a_{01}^2b_{01}^2b_{3,-1} - 2a_{01}b_{01}^3b_{3,-1} + 9a_{-13}b_{10}^4)/8;\\
g_{44} &= -(14a_{10}b_{01}(2a_{10}a_{-13}b_{10}^3 + a_{01}^4b_{3,-1} - 2a_{01}^3b_{01}b_{3,-1} - a_{-13}b_{10}^4))/27;\\
g_{55} &= (a_{-13}b_{3,-1}(378a_{10}^4a_{-13} + 5771a_{10}^3a_{-13}b_{10} - 25462a_{10}^2a_{-13}b_{10}^2\\
&\quad +11241a_{10}a_{-13}b_{10}^3 - 11241a_{01}^3b_{01}b_{3,-1} + 25462a_{01}^2b_{01}^2b_{3,-1} -\\
&\quad 5771a_{01}b_{01}^3b_{3,-1} - 378b_{01}^4b_{3,-1}))/3240;\\
g_{77} &= -(a_{-13}^2b_{3,-1}^2(343834a_{10}^2a_{-13}b_{10}^2 - 1184919a_{10}a_{-13}b_{10}^3 + 506501a_{-13}b_{10}^4 -\\
&\quad 506501{a_{01}}^4b_{3,-1} + 1184919a_{01}^3b_{01}b_{3,-1} - 343834a_{01}^2b_{01}^2b_{3,-1}));\\
g_{99} &= -a_{-13}^3{b_{3,-1}}^3\left(2a_{10}a_{-13}{b_{10}}^3 - a_{-13}{b_{10}}^4 + {a_{01}}^4b_{3,-1} - 2{a_{01}}^3b_{01}b_{3,-1}\right),
\end{aligned}
$$

где, строго говоря, g_{kk} не фокусная величина, а ее остаток от деления по идеалу I_{k-1}, т.е. многочлен $g_{kk}-f_1g_{11}-\cdots-f_{k-1}g_{k-1,k-1}$, но мы снова обозначаем этот многочлен через g_{kk} (это же справедливо и для данных выше фокусных величин системы (7)).

Разлагая первые пять из вышеприведенных фокусных величин на множители нетрудно установить, что система уравнений $g_{11} = g_{33} = g_{44} = g_{55} = 0$ эквивалентна условиям 1)–8). Заметим, что для того чтобы проверить данное утверждение можно также вычислить пересечение идеалов, соответствующих компонентам 1)–8) из условия теоремы и, используя теорему Гильберта о корнях, проверить, что полученный в результате идеал имеет тот же радикал, что и $\langle g_{11}, \ldots, g_{55}\rangle$ (для вычислений можно использовать или обычные системы компьютерной алгебры или же специализированые системы типа [15]).

Таким образом, 1)–8) – необходимые условия наличия центра у системы (9). Покажем, что они являются также и достаточными условиями. Очевидно, достаточно рассмотреть случаи 2), 4), 6), 7) и 8).

Начнем с 2). В данном случае система имеет вид

$$\dot{x} = x - 3b_{10}x^2 - a_{-13}y^3,\ \dot{y} = -(y - b_{10}xy).$$

Для данной системы будем искать интеграл или интегрирующий множитель типа Дарбу. Как известно, чтобы построить такой интеграл или интегрирующий множитель нужно найти достаточное количество инвариантных алгебраических кривых. Очевидно, $y = 0$ – инвариантная кривая с кофактором $K = -1 + b_{10}x$ (мы называем многочлен $K(x,y)$ кофактором, соответствующим инвариантной алгебраической кривой $f(x,y) = 0$, если $\dot{f} = Kf$). Методом неопределенных коэффициентов находим также кривую

$$L = 1 - 6b_{10}x + 9b_{10}^2x^2 + 2a_{-13}b_{10}y^3.$$

Теперь нетрудно заметить, что система имеет интегрирующий множитель $\mu = L^{-5/6}$, с использованием которого находим первый интеграл

$$F = -\frac{y}{3b_{10}}L^{\frac{1}{6}} + \left(\frac{1}{3b_{10}} - x\right)\int L^{-\frac{5}{6}}dy,$$

который определен при $b_{01} \neq 0$. Если же $b_{01} = 0$, то выполнено условие 8).

Рассмотрим теперь случай 4). Тогда система (9) имеет вид

$$\dot{x} = x(1 + 3b_{10}x) - a_{-13}y^3, \quad \dot{y} = -y(1 - b_{10}x).$$

Можно предполагать, что b_{10} и a_{-13} – отличны от нуля. Тогда замена $x \to -b_{10}x, y \to (-b_{10}a_{-13})^{\frac{1}{3}}y$ приводит к системе

$$\dot{x} = x(1 - 3x) - y^3, \ \ \dot{y} = -y(1 + x). \tag{10}$$

Для данной системы мы не смогли найти достаточно инвариантных кривых, чтобы построить интеграл или интегрирующий множитель типа Дарбу, поэтому, чтобы доказать наличие центра используем метод предложенный в [16].

Разлагая уравнение траекторий системы (10) в степенной ряд, получаем

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{3n}}{b^n(x)}\right), \tag{11}$$

где $a(x) = \frac{-1-x}{x(1-3x)}$, $b(x) = x(1-3x)$.

Будем искать первый интеграл системы (11) в виде

$$H(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} H_{3i+1}(x)y^{3i+1}. \tag{12}$$

Тогда функции H_i удовлетворяют уравнениям

$$H_1' + a(x)H_1 = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$H_{3n+1}' + (3n+1)a(x)H_{3n+1} + \cdots +$$
$$(3(n-k)+1)\tfrac{a(x)}{b^k(x)}H_{3(n-k)+1} + \cdots + \tfrac{a(x)}{b^n(x)}H_1 = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Из первого уравнения получаем

$$H_1 = x(1-3x)^{-\frac{4}{3}}.$$

Покажем, что для всех $n \geqslant 0$

$$H_{3n+1}(x) = (1-3x)^{-4n-\frac{4}{3}} x^{1-n} P_{3n}(x), \tag{13}$$

где P_k – полиномы степени k. Используем индукцию по n. Как видно из приведенного выше, для $n = 0$ данное утверждение выполнено. Предположим, что (13) имеет место для всех $n < m$. Тогда для $n = m$ получаем

$$H_{3m+1}(x) =$$

$$-H_1(x)^{3m+1} \int^x (\sum_{k=1}^{m} (3(m-k)+1) \frac{a(u)}{b^k(u)} H_{3(m-k)+1}(u)) H_1^{-3m-1}(u) du.$$

k-ое слагаемое данной сумы с точностью до константы равняется

$$H_1(x)^{3m+1} \int^x \frac{a(u)}{b^k(u)} H_{3(m-k)+1}(u) H_1^{-3m-1}(u) du =$$

$$-H_1(x)^{3m+1} \int^x \frac{(1+u)(1-3u)^{3k-1}}{u^{4m+1}} P_{3m-3k}(u) du =$$

$$x^{3m+1}(1-3x)^{-4m-\frac{4}{3}} \int^x \frac{c_0}{u^{4m+1}} + \cdots + \frac{c_{3m}}{u^{m+1}} du = (1-3x)^{-4m-\frac{4}{3}} x^{1-m} P_{3m}(x).$$

Следовательно, (13) выполнено. Согласно результатам [16] наличие интеграла вида (12) влечет наличие голоморфного интеграла, т.е. система (10) имеет центр в начале координат.

Случаи 5) и 6) рассмотрены в [7]. В случае 7) система является гамильтоновой и, наконец, используя теорему 9 из [9] мы видим, что компонента 8) это компонента соответствующая обратимым системам (мы называем ее компонентой Сибирского многообразия центра [9]).

Легко видеть, что компоненты 1)–7) многообразия центра неприводимы и 8) неприводима согласно теореме 2 из [9]. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2 . В случае 2) существует также первый интеграл вида (12) с

$$H_{3n+1}(x) = (1+3x)^{-2n-\frac{2}{3}} x^{1-n} P_n(x).$$

2. Базис идеала Баутина и цикличность системы (8). Как мы показали выше, первые пять фокусных величин полностью определяют многообразие центра системы (9) и, следовательно, радикал идеала фокусных величин этой системы. Однако, в отличие от случая квадратичной системы и системы (7), имеет место следующее

П р е д л о ж е н и е 3. *Идеал*

$$I_5 = \langle g_{11}, g_{33}, g_{44}, g_{55} \rangle,$$

порожденный первыми пятью фокусными величинами системы (9), не является радикальным идеалом в кольце $\mathbf{C}[a_{10}, a_{01}, a_{-13}, b_{3,-1}, b_{10}, b_{01}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычисляя пересечение восьми идеалов, порожденных полиномами, выписанными в соответствующих восьми условиях 1)–8) теоремы 3, находим, что данное пересечение равняется идеалу $\mathcal{H}$, редуцированный базис Гребнера которого отличен от редуцированного базиса Гребнера идеала I_5. Следовательно, $I_5 \neq \mathcal{H}$. Используя алгоритм принадлежности радикальному идеалу, легко видеть, что $\sqrt{I}_5 = \mathcal{H}$. Идеал $\mathcal{H}$ является радикальным, поскольку идеалы J_i, $i = 1, \ldots, 8$ – простые (J_i порожден многочленами, выписанными в условии i) теоремы 3). Для $i = 1, \ldots, 7$ это утверждение очевидно, а к J_8 мы применяем теоремы 2 и 9 из [9]. Таким образом, I_5 не является радикальным идеалом. Предложение доказано.

Немедленным следствием полученной выше формулы $\sqrt{I}_5 = \mathcal{H}$ является следующее

П р е д л о ж е н и е 4. *Максимальный порядок фокуса* $x = u + iv = 0$ *системы (9) равен 5.*

Как показано выше, первые пять фокусных величин определяют многообразие центра системы (9), но соответствующий идеал не является радикальным. Более того, тем же методом можно проверить, что идеал I_9 порожденный первыми девятью фокусными величинами также не является радикальным. Тем не менее нам удалось найти базис идеала Баутина также и в этом случае, однако в несколько ином кольце.

Введем новые переменные s_1, s_2, полагая

$$a_{10} = s_1 b_{10}, \; b_{01} = s_2 a_{01}. \tag{14}$$

Через $\tilde{g}_{kk}$ будем обозначать фокусные величины, полученные из g_{kk} в результате подстановки (14).

П р е д л о ж е н и е 5. *Многочлены* $\tilde{g}_{11}, \tilde{g}_{33}, \tilde{g}_{44}, \tilde{g}_{55}, \tilde{g}_{77}, \tilde{g}_{99}$ *образуют базис идеала фокусных величин системы (9) в кольце* $\mathbf{C}[s_1, s_2, a_{01}, a_{-13}, b_{3,-1}, b_{10}]$.

Доказательство. Обозначим через $[\nu]$ моном

$$a_{10}^{\nu_1}a_{01}^{\nu_2}a_{-13}^{\nu_3}b_{3,-1}^{\nu_4}b_{10}^{\nu_5}b_{01}^{\nu_6}$$

(где $\nu = (\nu_1,..,\nu_6)$) и через $\bar{\nu}$ вектор $(\nu_6,\nu_5,\ldots,\nu_2,\nu_1)$. Фокусные величины являются многочленами кольца $\mathbf{Q}[a_{10},b_{01},a_{01},b_{10},a_{-13},b_{3,-1}]$ и имеют вид (см., например, [3])

$$g_{kk} = \sum_j \alpha_j([\nu^{(j)}] - [\bar{\nu}^{(j)}]) = \sum_j \alpha_j IM[\nu^{(j)}],$$

где $\alpha_j \in \mathbf{Q}$, $\nu^{(j)}$ – решения уравнения

$$L(\nu) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\nu_1 + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\nu_2 + \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\nu_3 + \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\nu_4 + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\nu_5 + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\nu_6 = \begin{pmatrix}k\\k\end{pmatrix}, \quad (15)$$

и мы используем обозначение

$$IM[\nu] = [\nu] - [\bar{\nu}],\ RE[\nu] = [\nu] + [\bar{\nu}].$$

Обозначим через M моноид всех решений уравнения (15), где k пробегает все множество неотрицательных целых чисел. В случае системы (9), согласно теореме 9 из [9], базис Гильберта моноида M образован векторами $\{(100\ 001),(110\ 000),\ (000\ 011),\ (010\ 010),\ (001\ 100),\ (040\ 100),$ $(001\ 040),(401\ 000),(000\ 104),\ (101\ 030),\ (030\ 101),\ (201\ 020),\ (020\ 102),$ $(301\ 010),(010\ 103)\}$.

Следовательно, фокусные величины в кольце $\mathbf{Q}[s_1,s_2,a_{01},a_{-13},b_{3,-1},b_{10}]$, имеют вид

$$\tilde{g}_{ii} = \sum_{\mu: L(\mu)=(i,i)^T} (f_\mu[\mu] - \bar{f}_\mu[\bar{\mu}]),$$

где $f_\mu \in \mathbf{Q}[s_1,s_2]$, $\mu \in \tilde{M}$ и $\tilde{M}$ – моноид решений уравнения

$$L(\nu) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\nu_1 + \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\nu_2 + \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\nu_3 + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\nu_4 = \begin{pmatrix}k\\k\end{pmatrix}$$

($k = 0,1,2,\ldots$). Будем обозначать через $\tilde{I}$ – идеал фокусных величин в $\mathbf{C}[s_1,s_2,a_{01},a_{-13},b_{3,-1},b_{10}]$, через $\tilde{I}_k$ – идеал первых k фокусных величин в этом кольце, и через $^-$ – инволюцию,

$$^- : \mathbf{C}[s_1,s_2][\tilde{M}] \mapsto \mathbf{C}[s_1,s_2][\tilde{M}]$$

(где $\mathbf{C}[s_1,s_2][\tilde{M}]$ – моноидное кольцо моноида $\tilde{M}$ над $\mathbf{C}[s_1,s_2]$), определенную формулой

$$\bar{a}_{kj} = b_{jk}, \quad \bar{s}_1 = s_2.$$

Например, если $f = s_1^u s_2^m a_{01}^5 b_{3,-1} b_{10}$, то $\bar{f} = s_1^m s_2^u b_{10}^5 a_{-13} a_{01}$.

Используя очевидное тождество

$$IM[f(\nu+\mu)] = \frac{1}{2}IM[f\nu]RE[\mu] + \frac{1}{2}IM[\mu]RE[f\nu], \tag{16}$$

где $f \in \mathbf{Q}[s_1, s_2, a_{01}, a_{-13}, b_{3,-1}, b_{10}], \nu, \mu \in \tilde{M}$, получаем

$$\tilde{g}_{ii} \equiv h^{(i)}(s_1, s_2, a_{01}, a_{-13}, b_{3,-1}, b_{10})a_{-13}b_{10}^4$$

$$-\bar{h}^{(i)}(s_1, s_2, a_{01}, a_{-13}, b_{3,-1}, b_{10})b_{3,-1}a_{01}^4 \bmod \langle\tilde{g}_{11}\rangle.$$

Заметим, что в действительности, принимая во внимание структуру моноида M, можно заключить, что $h^{(i)}, \bar{h}^{(i)}$ – многочлены от $s_1, s_2, z, v, w, \bar{w}$, где $v = a_{01}b_{10}$, $z = a_{-13}b_{3,-1}$, $w = a_{-13}b_{10}^4$, $\bar{w} = b_{3,-1}a_{01}^4$.

В случае $s_1 = s_2 = 1/2$ система (9) имеет центр в начале координат, следовательно,

$$\tilde{g}_{ii} \equiv ((2s_1-1)v_1^{(i)}w-(2s_2-1)\bar{v}_1^{(i)}\bar{w})+((2s_2-1)v_2^{(i)}w-(2s_1-1)\bar{v}_2^{(i)}\bar{w}) \bmod \langle\tilde{g}_{11}\rangle,$$

где $v_{1,2}^{(i)} \in \mathbf{Q}[s_1, s_2, v, z, w, \bar{w}]$.

Нетрудно видеть, что $\tilde{g}_{ii}$ можно представить в виде $\tilde{g}_{ii} = \tilde{g}_{ii}^{(1)} + \tilde{g}_{ii}^{(2)} + \tilde{g}_{ii}^{(3)}$, где $\tilde{g}_{ii}^{(1)}$ – сумма с рациональными коэффициентами полиномов вида

$$f_1 = v^c((2s_1-1)\alpha_i w - (2s_2-1)\bar{\alpha}_i\bar{w}) + v^c((2s_2-1)\beta_i w - (2s_1-1)\bar{\beta}_i\bar{w}),$$

с $\alpha_i, \beta_i \in \mathbf{Q}[s_1, s_2, w, z, v]$, $c \in \mathbf{N}, c > 0$, $\tilde{g}_{ii}^{(2)}$ – сумма полиномов

$$f_2 = z^c((2s_1-1)\gamma_i w - (2s_2-1)\bar{\gamma}_i\bar{w}),$$

где $\gamma_i, \in \mathbf{Q}[s_1, s_2, z, w]$, $c \in \mathbf{N}, c > 0$, и $\tilde{g}_{ii}^{(3)}$ – сумма полиномов вида

$$f_3 = ((2s_1-1)\theta_i w - (2s_2-1)\bar{\theta}_i\bar{w}),$$

где $\theta \in \mathbf{Q}[s_1, s_2, w]$ (т.е. $\tilde{g}_{ii}^{(1)}$ – все члены полинома $\tilde{g}_{ii}$, содержащие множитель v, $\tilde{g}_{ii}^{(2)}$ – остающиеся члены полинома $\tilde{g}_{ii}$, содержащие множитель z, и $\tilde{g}_{ii}^{(3)}$ – все оставшиеся члены).

Покажем, что

$$\tilde{f}_1 \equiv 0 \bmod \tilde{I}_5,\ \ \tilde{f}_2 \equiv 0 \bmod \tilde{I}_9,\ \ \tilde{f}_3 \equiv 0 \bmod \tilde{I}_5. \tag{17}$$

Для доказательство первого из этих сравнений достаточно установить, что

$$v(s_1^u s_2^m(2s_1-1)w^k - s_1^m s_2^u(2s_2-1)\bar{w}^k) \in \tilde{I}_5 \tag{18}$$

и

$$v(s_1^u s_2^m(2s_2-1)w^k - s_1^m s_2^u(2s_1-1)\bar{w}^k) \in \tilde{I}_5 \tag{19}$$

для всех $k, u, m \in \mathbf{N}$. Действительно, вычисляя редуцированный базис Гребнера идеала $\tilde{I}_5$ с использованием лексикографического упорядочения $s_1 > s_2 > a_{01} > b_{10} > a_{-13} > b_{3,-1}$ находим, что он содержит многочлены

$$u_1 = v(s_1 - s_2),\ u_2 = v(2s_2-1)(w-\bar{w}),$$

$$u_3 = -a_{01}z(2s_2-1)\left(w-\bar{w}\right),$$

$$u_4 = -b_{10}z\left((2s_1-1)w - (2s_2-1))\bar{w}\right),$$

$$u_5 = a_{01}w(2s_2-1)(s_2-3)(s_2+3),$$

$$u_6 = (2s_1-1)(s_1-3)(s_1+3)w - (2s_2-1)(s_2-3)(s_2+3)\bar{w}.$$

Легко проверить, что

$$v((2s_1-1)w^k - (2s_2-1)\bar{w}^k) - 2u_1w^k = v(2s_2-1)(w^k-\bar{w}^k) \equiv 0 \bmod \langle u_2\rangle,$$

$$v(s_1(2s_1-1)w^k - s_2(2s_2-1)\bar{w}^k) - (2s_1+2s_2-1)u_1w^k =$$
$$= vs_2(2s_2-1)(w^k-\bar{w}^k) \equiv 0 \bmod \langle u_2\rangle,$$
$$v(s_2(2s_1-1)w^k - s_1(2s_2-1)\bar{w}^k) - u_1(2s_2(w^k-\bar{w}^k)+\bar{w}^k) =$$
$$= vs_2(2s_2-1)(w^k-\bar{w}^k) \equiv 0 \bmod \langle u_2\rangle,$$

т.е. при $\gamma = 0, 1,\ i = 1, 2$ многочлены

$$(s_i^\gamma(2s_1-1)w^k - \bar{s}_i^\gamma(2s_2-1)\bar{w}^k)$$

– в идеале $\tilde{I}_5$. Принимая во внимание, что

$$(s_i^\gamma(2s_1-1)w^k - \bar{s}_i^\gamma(2s_2-1)\bar{w}^k) =$$

$$(s_i^{\gamma-1}(2s_1-1)w^k - \bar{s}_i^{\gamma-1}(2s_2-1)\bar{w}^k)(s_i+\bar{s}_i) - s_i\bar{s}_i(s_i^{\gamma-2}(2s_1-1)w^k - \bar{s}_i^{\gamma-2}(2s_2-1)\bar{w}^k)$$

и используя индукцию по γ заключаем, что (18) действительно имеет место. Подобным образом можно проверить (19). Таким образом, $f_1 \in \tilde{I}_5$.

Покажем теперь, что $f_2 \in \tilde{I}_9$.

Не умаляя общности, f_2 имеет вид

$$d_k(c) = z^c(s_1^u(2s_1-1)w^k - s_2^u(2s_2-1)\bar{w}^k)$$

с $k > 1$, или же вид

$$d_1(c) = z^c(s_1^u(2s_1-1)w - s_2^u(2s_2-1)\bar{w}).$$

Вначале докажем, что

$$d_k(c) \equiv 0 \mod \tilde{I}_5.$$

Достаточно рассмотреть случай $c = 1$. Покажем, используя индукцию по k, что для $k > 1$

$$d_k(1) \equiv 0 \mod \tilde{I}_5 \tag{20}$$

и

$$d_k^+(1) = z(w - \bar{w})(s_1^u(2s_1 - 1)w^k + s_2^u(2s_2 - 1)\bar{w}^k) \equiv 0 \mod \tilde{I}_5. \tag{21}$$

В случае $k = 2$ имеем

$$d_2(1) + u_3 b_{3,-1} a_{01}^3 s_2^u + u_4 a_{-13} b_{10}^3 s_1^u = (2s_2 - 1)(w\bar{w})^2 (s_1^u - s_2^u) \in \langle u_1 \rangle,$$

т.е. $d_2(1) \in \tilde{I}_5$. Также

$$d_2^+(1) + u_3 b_{3,-1} a_{01}^3 (s_1^u w + s_2^u \bar{w}) + u_4 a_{-13} b_{10}^3 s_1^u (w - \bar{w}) = 0.$$

Предположим, что для $2 \leqslant k < K$ утверждения (20), (21) имеют место. Тогда для $k = K$, используя (16) получаем

$$d_k(1) = zIM[s_1^u(2s_1 - 1)w^K] = \frac{z}{2} IM[s_1^u(2s_1 - 1)w^{K-1}]RE[w] +$$

$$+\frac{z}{2} RE[s_1^u(2s_1 - 1)w^{K-1}]IM[w].$$

Согласно индукционной гипотезе оба слагаемых в правой части – из идеала $\tilde{I}_5$. Следовательно, выполнено (20) с $k = K$. Справедливость (21) следует из формулы

$$z(w - \bar{w})(s_1^u(2s_1 - 1)w^j + s_2^u(2s_2 - 1)\bar{w}^j) =$$

$$= -u_3 b_{3,-1} a_{01}^3 (s_1^u w^{j-1} + s_2^u \bar{w}^{j-1}) + u_4 a_{-13} b_{10}^3 s_1^u w^{j-2} (w - \bar{w}).$$

Рассмотрим теперь второй случай, именно, полином

$$d_1(c) = z^c(s_1^u(2s_1 - 1)w - s_2^u(2s_2 - 1)\bar{w}).$$

В действительности, здесь u может равняться лишь 0, 1, 2 или 3. Находя остаток от деления $d_1(3)$ по базису Гребнера идеала $\tilde{I}_9$ видим, что все эти многочлены принадлежат идеалу $\tilde{I}_9$, следовательно, $d_1(c) \in \tilde{I}_9$ для $c > 2$. Если $c \leqslant 2$, то степень многочлена $d_1(c)$ меньше или равна 15, но степень интересующих нас многочленов начинается с 20 (именно, первый многочлен, который мы должны принять во внимание – $g_{10,10}$).

Остается рассмотреть многочлен f_3. Как следует из условий 1)–4) теоремы 3, f_3 имеет вид

$$p_k = s_1^u(s_1-3)(s_1+3)(2s_1-1)w^k - s_2^u(s_2-3)(s_2+3)(2s_2-1)\bar{w}^k.$$

Вначале заметим, что

$$p_2 - u_5 b_{3,-1} a_{01}^3 s_2^u + u_6 s_1^u w = w\bar{w}(s_1^u - s_2^u)(2s_2-1)(s_2-3)(s_2+3) \equiv 0 \bmod\langle u_1\rangle.$$

Для многочлена

$$p_k^+ = (w-\bar{w})\left(s_1^u(2s_1-1)(s_2-3)(s_2+3)w^k + s_2^u(2s_1-1)(s_2-3)(s_2+3)\bar{w}^k\right)$$

имеем

$$p_k^+ = -u_3 a_{01}^3 b_{10}^4 s_1^u w^{k-2}(s_2-3)(s_2+3) + u_5 a_{01}^3 b_{3,-1}\bar{w}^{k-1}s_2^u - u_6 s_1^u w^{k-1}(w-\bar{w}).$$

Следовательно, $p_2 \in \tilde{I}_5$ и $p_k^+ \in \tilde{I}_5$ для всех $k > 1$. Используя формулу (16) и индукцию по k, видим, что $p_k \in \tilde{I}_5$ для всех $k > 1$. Следовательно, $f_3 \in \tilde{I}_5$.

Таким образом мы доказали, что $\tilde{g}_{ii} \in \tilde{I}_9$ для всех $i > 9$. Теорема доказана.

Поскольку при $a_{01} = 0$, $a_{10}^4\, a_{-13} - \overline{a_{10}^4\, a_{-13}} \neq 0$ система (6) имеет фокус в начале координат, а при $|a_{01}| \neq 0$ подстановка (15) для системы (8) обратима, заключаем, что вместе с теоремой 1 предложение 5 влечет следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 5. *Цикличность начала координат системы (8) с $a_{01} \neq 0$ или $a_{01} = 0$, $a_{10}^4\, a_{-13} - \overline{a_{10}^4\, a_{-13}} \neq 0$ меньше или равна 5.*

Если вместо подстановки (14) сделать замену переменных

$$a_{01} = s_1 b_{01},\ b_{10} = s_2 a_{10},$$

то используя рассуждения, подобные приведенным выше, можно доказать аналог предложения 5. Поэтому имеет место

Т е о р е м а 4. *Цикличность начала координат системы (8) с $|a_{10}| + |a_{01}| \neq 0$ меньше или равна 5.*

В заключение отметим, что кроме оценки цикличности для случая $a_{10} = a_{01} = 0$ для системы (8) остаются открытыми следующие проблемы: (i) является ли оценка цикличности, данная в теореме 4 точной; (ii) оценить окрестность $U(a)$ начала координат системы (a), где расположены малые предельные циклы возмущенной системы; (iii) оценить цикличность систем, соответствующих различным компонентам многообразия центра.

Относительно (ii) можно отметить, что недавно были разработанны некоторые методы для оценки радиуса $U(a)$ (см., например, [4]). Однако они основаны на знании точного разложения функции последования,

$$\mathcal{P}(\rho) = \rho + u_2(2\pi)\rho^2 + u_3(2\pi)\rho^3 + u_4(2\pi)\rho^4 \dots,$$

а не несколько упрощенного представления этой функции в форме Баутина (5). В этой связи следует отметить, что свойства коэффициентов $u_k(2\pi)$ менее изучены, чем свойства фокусных величин g_{kk} и, к тому же, вычисление коэффициентов $u_k(2\pi)$ гораздо более трудоемкая проблема, чем вычисление g_{kk}.

Что касается (iii), то, насколько нам известно, в настоящее время нет эффективных вычислительных алгоритмов для исследования поведения фокусных величин и функции последования в окрестности различных компонент многообразия центра.

Первый автор благодарен министерству образования, науки и спорта Республики Словения и Новому Кредитному Банку Марибора за финансовую поддержку данной работы.

Литература

1. *Reyn J. W.* A bibliography of the qualitative theory of quadratic systems of differential equations in the plane. Third edition. Report 94-02, Delft University of Technology. 1994.

2. *Roussarie R.* Bifurcations of planar vector fields and Hilbert's sixteenth problem. Progress in mathematics. V. 164. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser. 1998.

3. *Romanovski V. G., Robnik M.* The center and isochronicity problems for some cubic systems // Journal of Physics A: Mathematical and General. 2001. V. 34, No 47. P. 10267–10292.

4. *Hauser H., Risler J.-J., Teissier B.* The reduced Bautin index of planar vector fields // Duke Mathematical Journal. 1999. V. 100. No.3. P. 425–445.

5. *Żołądek H.* Eleven small limit cycles in a cubic vector field // Nonlinearity. 1995. V. 8. P. 843–860.

6. *Баутин Н. Н.* О числе предельных циклов, рождающихся при изменении коэффициентов из состояния равеовесия типа фокуса или центра // Мат. сб. 1952. Т. 30. С. 181-196.

7. *Доличанин Ч., Романовский В. Г., Стефанович М.* Условия центра и цикличность некоторых кубических векторных полей. Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 12. С. 1587–1595.

8. *Romanovski V. G., Rauh A.* Local dynamics of some algebraic maps // Dynamic Systems and Applications. 1998. V. 7. No. 4. P. 529-552.

9. *Jarrah A. S., Laubenbacher R., Romanovski V.G.* The center variety of polynomial differential systems, submitted to Journal of Symbolic Computations, http://xxx.lanl.gov/abs/math.DS/0009061

10. *Сибирский К. С.* О числе предельных циклов в окрестности особой точки // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 1. С. 53–66.

11. *Yakovenko S.* A geometric proof of the Bautin theorem // Concerning the Hilbert Sixteenth Problem, (Adv. in Math. Sci. V. 23). 1995. AMS transl. Series 2. V. 165. P. 203–219.

12. *Żołądek H.* On a certain generalization of Bautin's theorem // Nonlinearity. 1994. V. 7. P. 273–279.

13. *Cox D, Little J, O'Shea D.* Ideals, Varieties, and Algorithms // Springer-Verlag: New York, 1992.

14. *Żołądek H.* Quadratic systems with center and their perturbations // J. Differential Equations. 1994. V. 109. P. 223-273.

15. *Greuel G.-M., Pfister G. Schönemann H.* Singular version 1.2 User Manual. In Reports on Computer Algebra. No.21. Centre for Computer Algebra. University of Kaiserslautern. June, 1998.

16. *Fronville A., Sadovski A.P., Żołądek H.* The solution of the 1:-2 resonant center problem in the quadratic case // Fundamenta Mathematicae. 1998. V. 157. P. 191–207.