

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 1, 2015

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>

e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

Фильтрация и идентификация

## Алгоритмы прогнозирования состояний в стохастических дифференциальных системах на основе моделирования специального ветвящегося процесса\*

К. А. Рыбаков

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)  
[rkoffice@mail.ru](mailto:rkoffice@mail.ru)

**Аннотация.** Предлагаются новые алгоритмы решения задачи прогнозирования для нелинейных стохастических дифференциальных систем методом статистических испытаний. Основу алгоритмов прогнозирования составляют алгоритмы оптимальной фильтрации, использующие моделирование специального случайного процесса с обрывами и ветвлениями траекторий. При решении задачи прогнозирования применяются методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков.

**Abstract.** New algorithms for solving the extrapolation problem for nonlinear stochastic differential systems by statistical modeling are given. These algorithms are based on optimal filtering algorithms by modeling the special random process with terminating and branching paths. The solution of extrapolation problem can be found by numerical methods for solving stochastic differential equations and methods for modeling inhomogeneous Poisson flows.

### Введение

На основе многих методов и алгоритмов решения задачи фильтрации в стохастических системах, т.е. задачи оценивания вектора состояния системы в текущий момент времени по результатам косвенных измерений с учетом случайных возмущений и помех, естественным образом могут быть сформированы методы и алгоритмы решения задачи прогнозирования, т.е. задачи оценивания вектора состояния системы в будущий момент времени по результатам косвенных измерений, имеющихся к текущему моменту.

Цель настоящей работы состоит в формировании алгоритмов прогнозирования в нелинейных стохастических дифференциальных системах [9, 12, 13] на основе рассмотренных

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-08-00323-а).

ранее алгоритмов оптимальной нелинейной фильтрации. В [10, 11] было предложено решать задачу оптимальной нелинейной фильтрации как задачу анализа вспомогательной стохастической системы с обрывами и ветвлениями траекторий. Такой подход к решению задачи фильтрации основан на интерпретации одного из слагаемых в уравнении Дункана – Мортенсена – Закаи как функции поглощения и восстановления траекторий случайного процесса. Напомним, что решением уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи является ненормированная плотность вероятности, характеризующая распределение вектора состояния объекта наблюдения при наличии косвенных измерений с начального и до текущего момента времени [8, 9, 12, 13].

Решение задачи анализа вспомогательной стохастической системы с обрывами и ветвлениями траекторий можно найти приближенно с помощью статистического моделирования, применяя методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков (обрывы и ветвления образуют неоднородные пуассоновские потоки событий с интенсивностями, зависящими от текущего измерения). По результатам моделирования траекторий вспомогательной стохастической системы можно оценить апостериорную плотность вероятности при фиксированных измерениях и найти оптимальную оценку вектора состояния объекта наблюдения, используя различные критерии оптимальности оценивания.

Например, при использовании критерия минимума среднеквадратической ошибки оценка текущего состояния может быть получена в результате усреднения по ансамблю траекторий системы, отличающейся от исходного объекта наблюдения только тем, что ее траектории обрываются и разветвляются в случайные моменты времени, распределение которых определяется результатами измерений оцениваемого вектора состояния. Прогноз состояния можно получить, если продолжить моделирование без обрывов и ветвлений траекторий, используя сформированную к текущему моменту времени выборку состояний вспомогательной стохастической системы и усредняя по полученному в результате ансамблю траекторий.

Для апробации предложенных алгоритмов прогнозирования состояний стохастических дифференциальных систем решены модельные задачи прогнозирования для одномерных стохастических систем наблюдения с фиксированным упреждением по времени и в фиксированный момент времени.

### Постановка задачи

Будем рассматривать модель объекта наблюдения, описываемую стохастическим дифференциальным уравнением Ито [7–9]

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

где  $X \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $t \in [t_0, T + \Delta(T)]$  — время;  $f(t, x): [t_0, T + \Delta(T)] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — вектор-функция размеров  $n \times 1$ ,  $\sigma(t, x): [t_0, T + \Delta(T)] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times s}$  — матричная функция размеров  $n \times s$ ;  $\Delta(t): [t_0, T] \rightarrow [0, +\infty)$  — величина опережения по времени:

$$\max_{t \in [t_0, T]} (t + \Delta(t)) = T + \Delta(T);$$

$W(t)$  —  $s$ -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального состояния  $X_0$ , заданного плотностью вероятности  $\varphi_0(x)$ .

Модель измерительной системы также записывается в форме стохастического дифференциального уравнения:

$$dY(t) = c(t, X(t))dt + \zeta(t)dV(t), \quad Y(t_0) = Y_0 = 0, \quad (2)$$

или

$$Z(t) = c(t, X(t)) + \zeta(t)N(t), \quad (3)$$

где  $Y, Z \in \mathbb{R}^m$  — векторы измерений,  $t \in [t_0, T]$ ;  $c(t, x): [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — вектор-функция размеров  $m \times 1$ ,  $\zeta(t): [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times d}$  — матричная функция размеров  $m \times d$ ,  $\det \zeta(t)\zeta^T(t) \neq 0$ ;  $V(t)$  —  $d$ -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от  $W(t)$  и  $X_0$ ;  $N(t)$  —  $d$ -мерный стандартный гауссовский белый шум [8, 9, 13].

Задача прогнозирования состоит в нахождении оценки  $\hat{X}(t + \Delta(t))$  по результатам измерений  $Y_0^t = \{Y(\tau), \tau \in [t_0, t]\}$ .

При формировании алгоритма будем исходить из несмещенности оценки и минимума среднеквадратического отклонения. Тогда

$$\hat{X}(t + \Delta(t)) = \mathbb{M}[X(t + \Delta(t)) | Y_0^t] = \int_{\mathbb{R}^n} xp(t + \Delta(t), x | Y_0^t) dx,$$

где  $\mathbb{M}$  — знак математического ожидания,  $p(t + \Delta(t), x | Y_0^t)$  — апостериорная плотность вероятности прогноза вектора состояния  $X$ .

Будем рассматривать два варианта задачи прогнозирования: прогнозирование с фиксированным упреждением, т.е.  $\Delta(t) = \Delta = \text{const}$ , и прогнозирование в фиксированный момент времени  $T' \geq T$ , т.е.  $\Delta(t) = T' - t$ .

Отметим, кроме того, что задачу прогнозирования можно сформулировать и в терминах измерений  $Z_0^t = \{Z(\tau), \tau \in [t_0, t]\}$ , в данном случае это не имеет принципиального значения, однако далее при записи необходимых соотношений для решения задачи прогнозирования будут использоваться как измерения  $Y(t)$ , так и  $Z(t)$ .

### Уравнения для апостериорной плотности вероятности

Задачу прогнозирования будем решать в два этапа. На первом этапе будем определять апостериорную плотность вероятности  $p(t, x | Y_0^t)$ , используя уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи [8, 12, 13], записанное в форме [10, 11]:

$$\frac{\partial \varphi(t, x | Y_0^t)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t, x | Y_0^t) - \lambda^-(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t) + \lambda^+(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t), \quad (4)$$

с начальным условием  $\varphi(t_0, x) = \varphi_0(x)$ , где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\varphi(t, x | Y_0^t) &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x)\varphi(t, x | Y_0^t)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x)\varphi(t, x | Y_0^t)]; \\ \lambda^-(t, x, z) &= \begin{cases} -\lambda(t, x, z), & \lambda(t, x, z) < 0, \\ 0, & \lambda(t, x, z) \geq 0, \end{cases} & \lambda^+(t, x, z) &= \begin{cases} \lambda(t, x, z), & \lambda(t, x, z) > 0, \\ 0, & \lambda(t, x, z) \leq 0, \end{cases} \\ \lambda(t, x, z) &= \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^m c_k(t, x) q_{kr}(t) \left( z_r - \frac{c_r(t, x)}{2} \right); \end{aligned}$$

$$g(t, x) = \sigma(t, x)\sigma^T(t, x), \quad g_{ij}(t, x) = \sum_{l=1}^s \sigma_{il}(t, x)\sigma_{jl}(t, x), \quad i, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$q(t) = \eta^{-1}(t), \quad \eta(t) = \zeta(t)\zeta^T(t), \quad \eta_{kr}(t) = \sum_{l=1}^d \zeta_{kl}(t)\zeta_{rl}(t), \quad k, r = 1, 2, \dots, m.$$

Уравнение (4) решается на промежутке  $[t_0, \theta]$ , где  $\theta \in [t_0, T]$  — некоторое текущее время. Затем его решение нормируется, результатом этой операции будет апостериорная плотность вероятности  $p(t, x|Y_0^t)$  вектора состояния  $X$ :

$$p(t, x|Y_0^t) = \frac{\varphi(t, x|Y_0^t)}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x|Y_0^t) dx}, \quad t \in [t_0, \theta], \quad (5)$$

причем предполагается, что измерения  $Y_0^t$  или  $Z_0^t$  фиксированы.

На втором этапе определяется апостериорная плотность вероятности  $p(t, x|Y_0^\theta)$  как решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\frac{\partial p(t, x|Y_0^\theta)}{\partial t} = \mathcal{A}p(t, x|Y_0^\theta) \quad (6)$$

на промежутке  $[\theta, \theta + \Delta(\theta)]$  с начальным условием  $p(\theta, x|Y_0^\theta)$ .

Заметим, что оба этапа можно объединить в один, а именно решать уравнение (4) на промежутке  $[t_0, \theta + \Delta(\theta)]$  при дополнительном условии  $\lambda(t, x, z) = 0$ , если  $t > \theta$ . Решением такой задачи будет ненормированная апостериорная плотность вероятности  $\varphi(t, x|Y_0^\theta)$  как функция текущего времени  $\theta \in [t_0, T]$  и будущего момента времени  $\theta \leq t \leq \theta + \Delta(\theta)$ , для которого оценивается вектор состояния. Для перехода к апостериорной плотности вероятности  $p(t, x|Y_0^\theta)$  нужна нормировка, аналогичная (5):

$$p(t, x|Y_0^\theta) = \frac{\varphi(t, x|Y_0^\theta)}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x|Y_0^\theta) dx}, \quad t \in [\theta, \theta + \Delta(\theta)], \quad \theta \in [t_0, T].$$

Уравнения вида (4) называются обобщенными уравнениями Фоккера–Планка–Колмогорова [2]. Для уравнения (4) слагаемое  $\lambda^-(t, x, Z(t))\varphi(t, x|Y_0^t)$  — это функция поглощения, а  $\lambda^+(t, x, Z(t))\varphi(t, x|Y_0^t)$  — функция восстановления. Это означает, что можно рассматривать специальный случайный процесс  $X(t)$ , который характеризуется коэффициентами сноса  $f(t, x)$  и диффузии  $g(t, x)$ , но в отличие от обычного диффузионного процесса его траектории могут дополнительно обрываться и обрывы образуют пуассоновский поток событий с интенсивностью  $\lambda^-(t) = \lambda^-(t, X(t), Z(t))$ , а могут появляться новые ветви и ветвления также образуют пуассоновский поток событий, но с другой интенсивностью  $\lambda^+(t) = \lambda^+(t, X(t), Z(t))$ .

К этому можно добавить, что вероятность  $\mathbb{P}^-(t, \Delta t)$  обрыва траектории и вероятность  $\mathbb{P}^+(t, \Delta t)$  ветвления траектории на промежутке времени  $[t, t + \Delta t]$  при  $X(t) = x$  и  $Z(t) = z$  удовлетворяют условию

$$\mathbb{P}^-(t, \Delta t) = \lambda^-(t, x, z)\Delta t + o(\Delta t), \quad \mathbb{P}^+(t, \Delta t) = \lambda^+(t, x, z)\Delta t + o(\Delta t).$$

Обрывы и ветвления траекторий случайного процесса  $X(t)$  могут быть только на промежутке  $[t_0, \theta]$ , а на промежутке  $(\theta, \theta + \Delta(\theta)]$  поведение траекторий определяется заданными коэффициентами сноса и диффузии. Таким образом, функция  $\varphi(t, x|Y_0^\theta)$  характеризует распределение вектора  $X$  — состояния объекта наблюдения, описываемого уравнением (1), — с учетом того, что траектории случайного процесса  $X(t)$  могут обрываться и разветвляться в случайные моменты времени. Распределением моментов времени появления обрывов и ветвлений управляет процесс  $Z(t)$ . При  $t = \theta$  функция  $\varphi(t, x|Y_0^\theta)$  определяет

распределение вектора состояния  $X$  с учетом всех имеющихся к текущему моменту времени косвенных измерений  $Y_0^\theta$ , по этой функции можно найти оптимальную оценку текущего вектора состояния объекта наблюдения, т.е. решить задачу фильтрации [10, 11]. При  $t > \theta$  функция  $\varphi(t, x|Y_0^\theta)$  задает распределение прогноза вектора состояния  $X$  с учетом имеющихся измерений к моменту времени  $\theta$ , т.е. с опережением по времени на  $(t - \theta)$ , по этой функции можно найти прогноз для вектора состояния объекта наблюдения, т.е. решить задачу прогнозирования. Структурная схема системы наблюдения, оценивания текущего состояния и прогнозирования изображена на рис. 1.

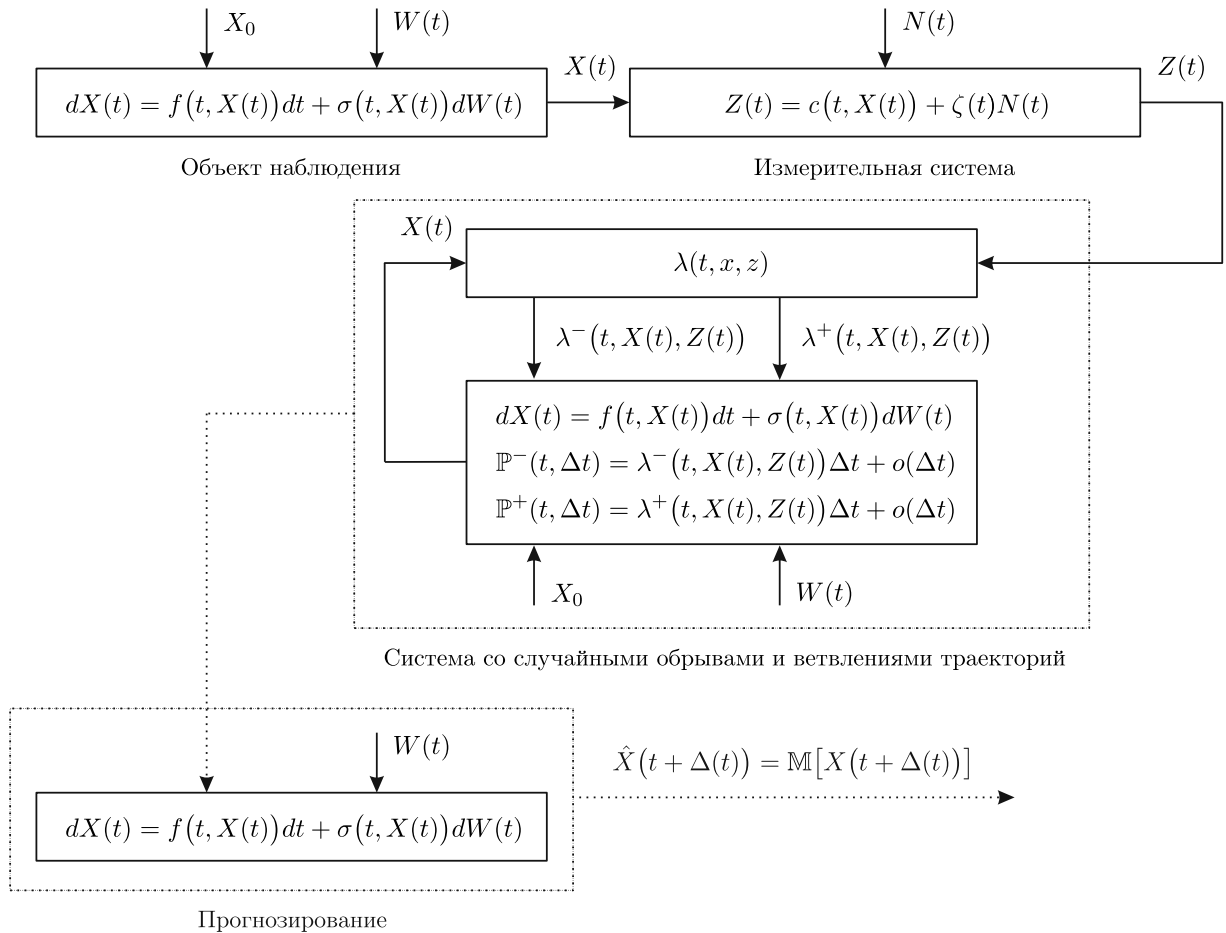


Рис. 1. Структурная схема системы наблюдения, оценивания текущего состояния и прогнозирования.

### Приближенный метод прогнозирования

Для приближенного определения прогноза вектора состояния  $\hat{X}(t + \Delta(t))$  предлагается модифицировать алгоритмы, предложенные в [10, 11] для приближенного решения задачи оптимальной фильтрации с помощью метода статистических испытаний (метода Монте-Карло). Алгоритмы базируются на моделировании траекторий специального случайного процесса  $X(t)$  с учетом обрывов и ветвлений при фиксированных измерениях  $Y_0^t$  или  $Z_0^t$ . При этом можно применять известные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков [1, 3, 5, 6, 8, 14–16].

В основу алгоритмов, как и в [10], положим наиболее простой метод численного решения стохастических дифференциальных уравнений — стохастический метод Эйлера (метод Эйлера–Маруямы) [3, 8, 16]:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= X_k + hf(t_k, X_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k)\Delta W_k, & Y_{k+1} &= Y_k + hc(t_k, X_k) + \sqrt{h}\zeta(t_k)\Delta V_k, \\ Z_k &= c(t_k, X_k) + \frac{\zeta(t_k)}{\sqrt{h}}\Delta V_k & (Y_{k+1} &= Y_k + hZ_k), & t_k &= t_0 + hk, & k &= 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\Delta W_k$  и  $\Delta V_k$  — случайные векторы размеров  $s \times 1$  и  $d \times 1$  соответственно, их координаты независимы и имеют стандартное нормальное распределение,  $h$  — шаг численного интегрирования.

Для моделирования моментов времени обрывов и ветвлений траекторий используется метод «максимального сечения» [1, 5, 15]: моделирование времени  $\tau$ , через которое произойдет обрыв или ветвление, осуществляется по правилу

$$\tau = \theta_N, \quad N = \min \left\{ \mu : \alpha_\mu \leq \frac{|\lambda(t_* + \theta_\mu)|}{\lambda^*} \right\}, \quad \theta_\mu = \sum_{i=1}^{\mu} \xi^i, \quad (8)$$

где  $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^\mu, \dots$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих показательное распределение с параметром  $\lambda^*$ :

$$\xi^i = -\frac{\ln \beta_i}{\lambda^*}, \quad \lambda^* : |\lambda(t)| \leq \lambda^* = \text{const};$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu, \dots$  — последовательности независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на интервале  $(0, 1)$ ;  $\lambda(t)$  — значение функции  $\lambda(t, x, z)$  на вспомогательных траекториях процесса  $X(t)$  и траектории  $Z(t)$ , полученной в результате измерений на оцениваемой траектории, т.е.  $\lambda(t) = \lambda(t, X(t), Z(t))$ ;  $t_*$  — начальный момент времени  $t_0$  или момент времени последнего ветвления траектории. При условии  $\lambda(t_* + \tau) < 0$  происходит обрыв (моделирование такой траектории прекращается), а при  $\lambda(t_* + \tau) > 0$  — ветвление (далее моделируются две траектории, имеющие как минимум одну общую точку — точку ветвления).

Возможны и другие варианты моделирования времени  $\tau$ , но наиболее эффективным, по-видимому, является метод «максимального сечения» или его модификации [1, 5, 6].

На основе результатов моделирования траекторий специального случайного процесса  $X(t)$  с обрывами и ветвлениями в каждый момент времени можно оценить функцию распределения и плотность вероятности, а также найти оценку вектора состояния как для текущего времени (фильтрация), так и для будущего (прогнозирование), например, усредняя по ансамблю траекторий с учетом того, что на этапе прогнозирования обрывы и ветвления не происходят.

### Алгоритмы совместного моделирования системы наблюдения и прогнозирования

Как и в [10], приведем два алгоритма совместного моделирования системы наблюдения и прогнозирования. В первом из них предполагается, что за время, равное шагу численного интегрирования, может произойти только одно событие типа обрыва или ветвления траектории. Такой алгоритм проще в реализации, однако неоднородный пуассоновский поток моделируется, вообще говоря, неточно. Во втором алгоритме таких ограничений на количество событий типа обрыва или ветвления траектории не накладывается, пуассоновский поток моделируется точно в рамках метода «максимального сечения».

### Алгоритм 1

Шаг 1. Задать  $M$  — число моделируемых вспомогательных траекторий;  $h$  — шаг численного интегрирования; величину  $\lambda^*$ . Получить реализации начальных состояний  $X_0$  и  $X_0^i$  согласно заданной плотности вероятности  $\varphi_0(x)$ , где  $X_0$  — начальное состояние для основной траектории (для которой проводятся измерение и оценивание),  $X_0^i$  — для вспомогательных траекторий, по которым приближенно вычисляется оптимальная оценка, и моменты времени  $\xi^i$ , через которые могут произойти обрывы или ветвления траекторий:

$$\xi^i = -\frac{\ln \beta}{\lambda^*}, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Здесь и далее  $\beta$  — различные реализации (для всех  $i$ ) случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале  $(0, 1)$ .

Положить  $Y_0 = 0$ ,  $k = 0$ ,  $t_*^i = t_0$ ,  $F_0^i = 1$  (в случае обрыва траектории с номером  $i$  при последующем моделировании  $F_k^i = 0$ ,  $k > 0$ ),  $i = 1, 2, \dots, M$ .

Шаг 2. Положить  $\kappa = k$  (запомнить текущее время),  $i = 1$ ,  $j = 0$  ( $j$  — количество новых ветвей на шаге  $k$ ),  $\Xi = 1$  (прогнозирование).

Шаг 3. Проверить условие  $t_\kappa + \Delta(t_\kappa) - t_k > 0$ . Если оно выполнено, то перейти к шагу 4. Иначе положить

$$M_\kappa = \sum_{i=1}^M F_\kappa^i \quad (M_0 = M)$$

и найти прогноз  $\hat{X}_k$  как выборочное среднее реализаций  $\mathbb{X}_k = \{X_k^i\}_{i=1, \dots, M; F_k^i=1}$ :

$$\hat{X}_k = \frac{1}{M_\kappa} \sum_{i=1, \dots, M; F_k^i=1} X_k^i.$$

Проверить условие  $T - t_\kappa = 0$ . Если оно выполнено, то завершить процесс, иначе положить  $k = \kappa$ ,  $i = 1$ ,  $\Xi = 0$  (фильтрация).

Далее, получить реализацию оцениваемого вектора состояния в следующем узле сетки  $\{t_k\}$ :

$$X_{k+1} = X_k + hf(t_k, X_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k)\Delta W,$$

и получить вектор измерений:

$$Z_k = c(t_k, X_k) + \frac{\zeta(t_k)}{\sqrt{h}}\Delta V, \quad Y_{k+1} = Y_k + hZ_k.$$

В этих формулах и далее  $\Delta W$  и  $\Delta V$  — различные для всех  $k$  и  $i$  (а также для промежуточных расчетов) реализации случайных векторов размеров  $s \times 1$  и  $d \times 1$  соответственно, координаты которых независимы и имеют стандартное нормальное распределение.

Шаг 4. Проверить условие  $F_\kappa^i = 0$ . Если оно выполнено, то перейти к последнему шагу, иначе: при  $\Xi = 1$  или  $t_*^i + \xi^i \geq t_k + h$  перейти к шагу 5, а при  $t_*^i + \xi^i < t_k + h$  — к шагу 6.

Шаг 5. Получить реализацию вектора состояния в следующем узле сетки  $\{t_k\}$ :

$$X_{k+1}^i = X_k^i + hf(t_k, X_k^i) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k^i)\Delta W.$$

Положить  $F_{k+1}^i = 1$  (если  $\Xi = 0$ ) и перейти к последнему шагу.

Шаг 6. Получить реализацию вектора состояния в дополнительном узле сетки:

$$\tilde{X} = X_k^i + h_{\triangleleft} f(t_k, X_k^i) + \sqrt{h_{\triangleleft}} \sigma(t_k, X_k^i) \Delta W, \quad h_{\triangleleft} = t_*^i + \xi^i - t_k.$$

Получить реализацию  $\alpha$  случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале  $(0, 1)$ . Проверить условие

$$\alpha \leq \frac{|\lambda(t_*^i + \xi^i)|}{\lambda^*},$$

где  $\lambda(t_*^i + \xi^i) = \lambda(t_*^i + \xi^i, \tilde{X}, Z_k)$ , и если оно выполнено, то перейти к шагу 7, иначе — к шагу 8.

Шаг 7. Проверить условия:

а) если  $\lambda(t_*^i + \xi^i) < 0$  ( $\lambda^-(t_*^i + \xi^i, \tilde{X}, Z_k) > 0$ , обрыв траектории), то положить  $F_{k+1}^i = 0$  (траектория далее не моделируется:  $F_r^i = 0, r > k$ ) и перейти к последнему шагу;

б) если  $\lambda(t_*^i + \xi^i) > 0$  ( $\lambda^+(t_*^i + \xi^i, \tilde{X}, Z_k) > 0$ , ветвление траектории), то положить  $j = j + 1$  и получить реализацию вектора состояния в следующем узле сетки  $\{t_k\}$  для новой траектории (точнее, «новой ветви» траектории с номером  $i$ , которая далее рассматривается как другая траектория с номером  $M + j$ ):

$$X_{k+1}^{M+j} = \tilde{X} + h_{\triangleright} f(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}) + \sqrt{h_{\triangleright}} \sigma(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}) \Delta W, \quad h_{\triangleright} = h - h_{\triangleleft} = t_k + h - t_*^i - \xi^i.$$

Положить  $F_{k+1}^{M+j} = 1$  ( $F_r^{M+j} = 0, r \leq k$ ),  $t_*^{M+j} = t_*^i + \xi^i$  и получить реализацию для промежутка времени, через который может произойти обрыв или новое ветвление:

$$\xi^{M+j} = -\frac{\ln \beta}{\lambda^*},$$

моделирование  $\xi^{M+j}$  проводится до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$t_*^{M+j} + \xi^{M+j} \geq t_k + h.$$

Шаг 8. Получить реализацию вектора состояния в следующем узле сетки  $\{t_k\}$ :

$$X_{k+1}^i = \tilde{X} + h_{\triangleright} f(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}) + \sqrt{h_{\triangleright}} \sigma(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}) \Delta W, \quad h_{\triangleright} = h - h_{\triangleleft}.$$

Положить  $F_{k+1}^i = 1$ ,  $t_*^i = t_*^i + \xi^i$  и получить новую реализацию для промежутка времени, через который может произойти обрыв или ветвление рассматриваемой траектории:

$$\xi^i = -\frac{\ln \beta}{\lambda^*},$$

моделирование  $\xi^i$  проводится до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$t_*^i + \xi^i \geq t_k + h.$$

Шаг 9. Проверить условия:

а) если  $i = M$ , то положить  $M = M + j$ ,  $t_{k+1} = t_k + h$ ,  $k = k + 1$  и перейти к шагу 3 при  $\Xi = 1$  или к шагу 2 при  $\Xi = 0$ ;

б) если  $i < M$ , то положить  $i = i + 1$  и перейти к шагу 4.



**Алгоритм 2**

Шаг 1–Шаг 5 из алгоритма 1.

Шаг 6. Проверить условие  $t_*^i + \xi^i \geq t_k + h$ . Если оно выполнено, то перейти к шагу 10, иначе: положить  $\tilde{X}^i = X_k^i$ ,  $\tau^i = t_k$  и перейти к шагу 7.

Шаг 7. Получить реализацию вектора состояния в дополнительном узле сетки:

$$\tilde{X}^i = \tilde{X}^i + h^i f(\tau^i, \tilde{X}^i) + \sqrt{h^i} \sigma(\tau^i, \tilde{X}^i) \Delta W, \quad h^i = t_*^i + \xi^i - \tau^i.$$

Положить  $\tau^i = \tau^i + h^i$  и получить реализацию  $\alpha$  случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале  $(0, 1)$ . Проверить условие

$$\alpha \leq \frac{|\lambda(\tau^i)|}{\lambda^*},$$

где  $\lambda(\tau^i) = \lambda(\tau^i, \tilde{X}^i, Z_k)$ , и если оно выполнено, то перейти к шагу 8, иначе — к шагу 9.

Шаг 8. Проверить условия:

а) если  $\lambda(\tau^i) < 0$  ( $\lambda^-(\tau^i, \tilde{X}^i, Z_k) > 0$ , обрыв траектории), то положить  $F_{k+1}^i = 0$  (траектория далее не моделируется:  $F_r^i = 0$ ,  $r > k$ ) и перейти к последнему шагу;

б) если  $\lambda(\tau^i) > 0$  ( $\lambda^+(\tau^i, \tilde{X}^i, Z_k) > 0$ , ветвление траектории), то положить  $j = j + 1$ ,  $F_{k+1}^{M+j} = 1$  ( $F_r^{M+j} = 0$ ,  $r \leq k$ ),  $t_*^{M+j} = t_*^i + \xi^i$ ,  $\tilde{X}^{M+j} = \tilde{X}^i$ ,  $\tau^{M+j} = \tau^i$  и получить реализацию для промежутка времени, через который может произойти обрыв или новое ветвление:

$$\xi^{M+j} = -\frac{\ln \beta}{\lambda^*}.$$

Шаг 9. Положить  $t_*^i = t_*^i + \xi^i$  и получить новую реализацию для промежутка времени, через который может произойти обрыв или ветвление рассматриваемой траектории:

$$\xi^i = -\frac{\ln \beta}{\lambda^*}.$$

Перейти к шагу 6.

Шаг 10. Получить реализацию вектора состояния в следующем узле сетки  $\{t_k\}$ :

$$X_{k+1}^i = \tilde{X}^i + h^i f(\tau^i, \tilde{X}^i) + \sqrt{h^i} \sigma(\tau^i, \tilde{X}^i) \Delta W, \quad h^i = t_k + h - \tau^i.$$

Положить  $F_{k+1}^i = 1$ .

Шаг 11. Проверить условия:

а) если  $i = M + j$ , то положить  $M = M + j$ ,  $t_{k+1} = t_k + h$ ,  $k = k + 1$  и перейти к шагу 3 при  $\Xi = 1$  или к шагу 2 при  $\Xi = 0$ ;

б) если  $i < M$ , то положить  $i = i + 1$  и перейти к шагу 4;

в) если  $M \leq i < M + j$  (новые ветви), то положить  $i = i + 1$  и перейти к шагу 6.

**Замечания.**

1. Величину  $\lambda^*$  можно оценить, например, по результатам пробного моделирования траекторий системы наблюдения.

2. Предполагается, что конечный момент времени  $T$  для построения текущей оценки и конечный момент времени  $t_\kappa + \Delta(t_\kappa)$  для нахождения прогноза согласованы с шагом интегрирования, т.е. найдутся такие целые числа  $K_1$  и  $K_2^\kappa$ , что  $t_0 + K_1 h = T$  и  $t_0 + K_2^\kappa h = t_\kappa + \Delta(t_\kappa)$ , иначе при нахождении вектора состояния в этот момент времени потребуется корректировать шаг численного интегрирования.

3. На шаге 3 можно получить ковариационную матрицу ошибки прогнозирования:

$$\hat{\Gamma}_\kappa = \frac{1}{M_\kappa - 1} \sum_{i=1, \dots, M; F_\kappa^i=1} (X_k^i - \hat{X}_k)(X_k^i - \hat{X}_k)^\top.$$

Индекс  $\kappa$  в обозначении  $\hat{X}_\kappa$  и  $\hat{\Gamma}_\kappa$  указывает на то, что эти характеристики соответствуют прогнозу в момент времени  $t_\kappa + \Delta(t_\kappa)$  при текущем времени  $\theta = t_\kappa$ .

На этом же шаге по выборке  $\mathbb{X}_k$  можно найти оценку апостериорной плотности вероятности  $p(t_\kappa + \Delta(t_\kappa), x | Y_0^{t_\kappa})$ , например, с помощью построения гистограммы. Это дает возможность использовать критерии при нахождении оценки вектора состояния, отличные от критерия минимума среднеквадратической ошибки оценивания.

4. На шагах 6 и 7 алгоритма 1 или шагах 7 и 8 алгоритма 2 подставляется значение  $Z_k$ , т.е. для момента времени  $t_k$ , поскольку других измерений  $Y(t)$  или  $Z(t)$  в рамках этих алгоритмов нет и при моделировании траектории процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  кусочно-линейные, а траектория процесса  $Z(t)$  кусочно-постоянная.

5. Если при моделировании количество обрывов существенно больше количества ветвлений траекторий, то выборка  $\mathbb{X}_k$  «вырождается» и в таком случае необходимо добавлять новые траектории, восполняя «потери» при обрывах. Это можно делать по оценке апостериорной функции распределения на основе выборки  $\mathbb{X}_k$ , генерируя новые векторы, или использовать «размножение» выборки. Если при моделировании количество ветвлений существенно больше количества обрывов траекторий, то траектории нужно «прореживать», например, случайным образом.

6. Для повышения точности расчетов могут применяться методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений, имеющие больший порядок точности, нежели стохастический метод Эйлера (7). Такие методы описаны, например, в [3, 8, 14, 16]. Однако точность оценивания определяется не только выбранным методом численного решения стохастических дифференциальных уравнений, но и методом моделирования неоднородных пуассоновских потоков, а также свойствами используемых генераторов псевдослучайных чисел.

При апробации алгоритма использовались следующие генераторы псевдослучайных чисел: *Mersenne Twister* [17] для величин, имеющих равномерное распределение; *Ziggurat* и генератор Бокса – Мюллера [16, 18] для величин, имеющих нормальное распределение.

Преимущества разработанных алгоритмов прогнозирования такие же, как и для алгоритмов оптимальной фильтрации [10, 11]. Поскольку их основу составляют методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков, реализация этих алгоритмов достаточно проста, при этом сложность решения задачи прогнозирования не зависит от модели объекта наблюдения или измерительной системы.

Далее приведем примеры моделирования и прогнозирования для линейных систем наблюдения. Выбор линейных систем обусловлен возможностью сравнения результатов с оценкой, полученной с помощью фильтра Калмана – Бьюси и уравнений метода моментов [4, 8, 12], т.е. с «точным» решением (с учетом того, что далее уравнения фильтра

Калмана–Бьюси и метода моментов решаются приближенно методом Эйлера), модели объекта наблюдения и измерительной системы такие же, как и в [10]. Решение осуществлялось с помощью алгоритма 1.

**Пример 1.** Система наблюдения описывается уравнениями

$$\begin{aligned} dX(t) &= -(2 - 2 \cos 10t)X(t)dt + 0.25dW(t), & X(0) &= X_0, \\ dY(t) &= \sin 20tX(t)dt + 0.1dV(t), & Y(0) &= 0, \end{aligned}$$

где  $t \in [0, 1]$ ,  $X, Y \in \mathbb{R}$ ,  $W(t)$  и  $V(t)$  — одномерные стандартные винеровские процессы ( $W(t)$ ,  $V(t)$  и  $X_0$  независимы), случайная величина  $X_0$  имеет нормальное распределение с математическим ожиданием  $-0.5$  и дисперсией  $0.01$ .

Шаг численного интегрирования  $h = 0.005$ , начальное число вспомогательных траекторий  $M = 10000$ . Прогнозирование осуществляется для фиксированного момента времени  $T' = 1$ , т.е.  $\Delta(t) = 1 - t$ .

На рис. 2 слева приведены результаты моделирования системы наблюдения (выборочная траектория  $X(t)$  показана синим цветом, траектория  $Y(t)$  — красным) и прогнозирования по критерию минимума среднеквадратичной ошибки (оценка текущего состояния и прогноз, полученные усреднением по пучку траекторий с обрывами и ветвлениями, показаны зеленым цветом, результат решения уравнений фильтра Калмана–Бьюси и метода моментов — пурпурным), а справа оценка апостериорной плотности вероятности текущего состояния (гистограмма, показана синим цветом) и прогноза в фиксированный момент времени  $T' = 1$  (гистограмма, показана красным цветом). Первая строка на рис. 2 соответствует начальному моменту времени  $t_0 = 0.00$ , поэтому оценка апостериорной плотности вероятности текущего состояния отсутствует: это начальная плотность вероятности  $\varphi_0(x)$ . Далее приведенные рисунки соответствуют моментам времени  $\theta = 0.25, 0.50, 0.75, 1.00$ . Для конечного момента времени  $\theta = 1.00$  показана только оценка апостериорной плотности вероятности текущего состояния. В процессе моделирования объем выборки  $\mathbb{X}_k$  менялся в пределах от 10000 до 21968.

**Пример 2.** Система наблюдения описывается уравнениями

$$\begin{aligned} dX(t) &= (10 \sin 100t - 5)X(t)dt + 0.05dW(t), & X(0) &= X_0, \\ dY(t) &= X(t)dt + 0.01dV(t), & Y(0) &= 0, \end{aligned}$$

где  $t \in [0, 1]$ ,  $X, Y \in \mathbb{R}$ ,  $W(t)$  и  $V(t)$  — одномерные стандартные винеровские процессы ( $W(t)$ ,  $V(t)$  и  $X_0$  независимы), случайная величина  $X_0$  имеет нормальное распределение с математическим ожиданием  $0.2$  и дисперсией  $0.0001$ .

Шаг численного интегрирования  $h = 0.005$ , начальное число вспомогательных траекторий  $M = 10000$ . Прогнозирование осуществляется с фиксированным упреждением  $\Delta = 0.25$  при  $t \in [0, 0.75]$ , а далее при  $t \in (0.75, 1]$  в фиксированный момент времени  $T' = 1$ , т.е.

$$\Delta(t) = \begin{cases} 0.25, & t \in [0, 0.75], \\ 1 - t, & t \in (0.75, 1]. \end{cases}$$

На рис. 3 слева приведены результаты моделирования системы наблюдения и прогнозирования по критерию минимума среднеквадратичной ошибки, а справа оценка апостериорной плотности вероятности текущего состояния и прогноза с фиксированным упреждением  $\Delta = 0.25$ , при этом принята такая же система цветовых обозначений и последовательность графиков. В процессе моделирования объем выборки  $\mathbb{X}_k$  менялся в пределах от 10000 до 60785.

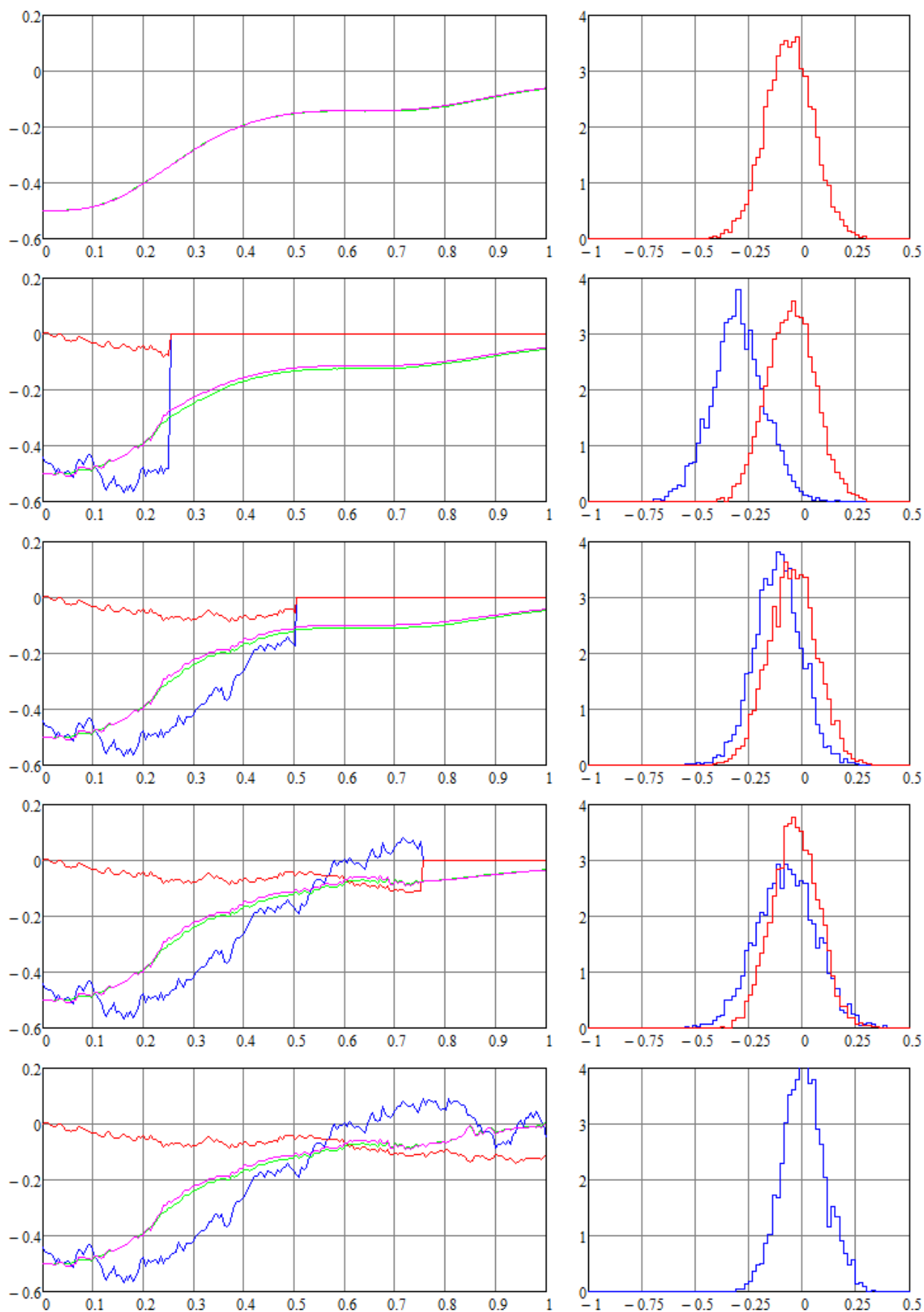


Рис. 2. Результаты моделирования системы наблюдения и прогнозирования.

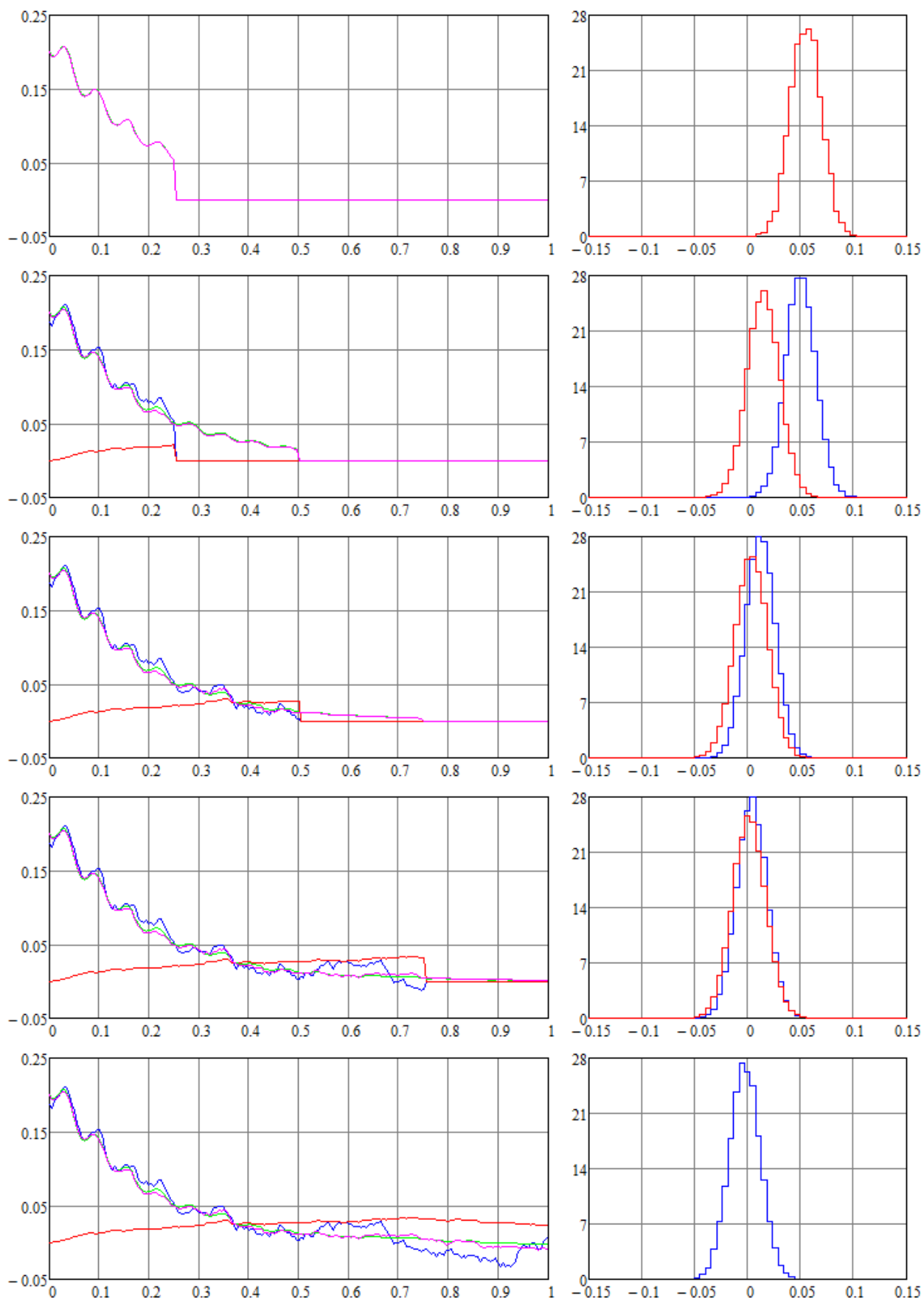


Рис. 3. Результаты моделирования системы наблюдения и прогнозирования.

## Список литературы

- [1] *Аверина Т.А.* Новые алгоритмы статистического моделирования неоднородных пуассоновских ансамблей // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2010. Т. 50. № 1. — С. 16–23.
- [2] *Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А.* Анализ систем случайной структуры. — М.: Физматлит, 1993.
- [3] *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010.
- [4] *Миллер Б.М., Панков А.Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах. — М.: Физматлит, 2002.
- [5] *Михайлов Г.А., Аверина Т.А.* Алгоритм «максимального сечения» в методе Монте-Карло // Доклады АН. — 2009. Т. 428. № 2. — С. 163–165.
- [6] *Михайлов Г.А., Рогачинский С.В.* Модифицированный метод «мажорантной частоты» для численного моделирования обобщенного экспоненциального распределения // Доклады АН. — 2012. Т. 444. № 1. — С. 28–30.
- [7] *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. — М.: Мир, 2003.
- [8] *Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С.* Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. — М.: Вузовская книга, 2008.
- [9] *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Теория стохастических систем. — М.: Логос, 2004.
- [10] *Рыбаков К.А.* Сведение задачи нелинейной фильтрации к задаче анализа стохастических систем с обрывами и ветвлениями траекторий // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2012. № 3. — С. 91–110. — <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>.
- [11] *Рыбаков К.А.* Модифицированный алгоритм оптимальной фильтрации сигналов на основе моделирования специального ветвящегося процесса // Авиакосмическое приборостроение. — 2013. № 3. — С. 15–20.
- [12] *Синицын И.Н.* Фильтры Калмана и Пугачева. — М.: Логос, 2007.
- [13] *Тихонов В.И., Кульман Н.К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. — М.: Советское радио, 1975.
- [14] *Artemiev S.S., Averina T.A.* Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. — VSP, 1997.
- [15] *Coleman W.A.* Mathematical Verification of a Certain Monte Carlo Sampling Technique and Applications of the Technique to Radiation Transport Problems // Nuclear Science and Engineering. — 1968. V. 32. — P. 76–81.
- [16] *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. — Springer, 1995.
- [17] *Matsumoto M., Nishimura T.* Mersenne Twister: A 623-Dimensionally Equidistributed Uniform Pseudo-Random Number Generator // ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation. — 1998. V. 8. No. 1. — P. 3–30.
- [18] *Thomas D.B., Luk W., Leong P.H.W., Villasenor J.D.* Gaussian Random Number Generators // ACM Computing Surveys. — 2007. V. 39. No. 4. — P. 11:1–11:38.