*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ*
*И*
*ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ*
*N 2, 2019*
*Электронный журнал,*
*рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010*
*ISSN 1817-2172*

*http://diffjournal.spbu.ru/*
*e-mail: jodiff@mail.ru*

*Оптимальное управление*

# Методика точного и приближенного синтеза оптимальных непрерывных стохастических систем управления*

К. А. Рыбаков

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

rkoffice@mail.ru

**Аннотация.** На основе принципа расширения сформулированы достаточные условия оптимальности, позволяющие оценить точность приближенного решения задачи оптимального управления по величине функционала качества для непрерывных стохастических систем. Методика решения задач оптимального управления с помощью таких условий проиллюстрирована на примере нахождения программного управления и управления с обратной связью для линейной стохастической системы.

**Ключевые слова:** неполная информация, оптимальная синтезирующая функция, оптимальное управление, стохастическая система, принцип расширения, программное управление, управление с обратной связью, условия оптимальности.

**Abstract.** Based on the extension principle the sufficient optimality conditions are formulated to estimate the accuracy of the approximate solution for the optimal control problem with respect to the optimality criterion value for continuous-time stochastic systems. The technique for solving optimal control problems using such conditions is illustrated by the example of finding program control and feedback control for a linear stochastic system.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-07-00419-а).

**Key words:** extension principle, feedback control, incomplete information, optimal control, optimal synthesizing function, optimality conditions, program control, stochastic system.

## Введение

В теории оптимального управления динамическими системами фундаментальное значение имеют принципы оптимальности: принцип максимума Л.С. Понтрягина [24] и динамическое программирование Р. Беллмана [4]. Они с успехом применяются в задачах оптимального управления непрерывными, дискретными и непрерывно-дискретными динамическими системами при детерминированных и случайных воздействиях. Наряду с этими принципами используется принцип расширения В.Ф. Кротова [8,9]. Для каждого из принципов оптимальности характерен переход от оптимизации в функциональном пространстве при поиске оптимального управления к оптимизации в конечномерном пространстве значений управления. В принципе расширения это достигается за счет перехода к оптимизации на множестве допустимых состояний и управлений, несвязанных уравнением состояния.

Остановимся подробнее на задаче оптимального управления при неполной информации о векторе состояния, рассмотренной в работе У. Флеминга [37]. В этой задаче предполагается, что при управлении стохастической динамической системой используется информация не о всех координатах вектора состояния, а только о части этих координат. Такая постановка задачи актуальна, поскольку в сложных системах управления не всегда есть возможность измерять все координаты вектора состояния или же информация о некоторых координатах не дает существенного вклада в улучшение качества управления и тогда их измерение не имеет практического смысла.

На основе принципа расширения были получены достаточные условия оптимальности в задаче оптимального управления непрерывными стохастическими системами различных классов при неполной информации о векторе состояния: системах диффузионного [16, 21, 31] и диффузионно-скачкооообразного типа [28, 29], системах с обрывами траекторий [23], системах со случайной структурой [28–30], стохастических дифференциальных играх [33]. Теория оптимального управления непрерывными стохастическими системами при неполной информации о векторе состояния продолжает активно развиваться [25, 26, 29, 34].

На основе достаточных условий оптимальности можно сформулировать условия $\varepsilon$-оптимальности, позволяющие оценить точность приближенного решения задачи оптимального управления по величине функционала качества [20]. Применение таких условий, а также методики решения задач оптимального управления достаточно подробно проиллюстрировано на простых примерах, что и является основной целью статьи. В этих примерах последовательно показаны этапы нахождения оптимального и $\varepsilon$-оптимального управления стохастической системой диффузионного типа с применением оптимальных и $\varepsilon$-оптимальных синтезирующих функций вплоть до определения управления на траектории управляемого случайного процесса.

## Задачи оптимального и $\varepsilon$-оптимального управления при неполной информации о векторе состояния

Поведение модели объекта управления описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито:

$$dX(t) = f\big(t, X(t), U(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t), U(t)\big)dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

где $X = [X_1\ X_2\ \ldots\ X_n]^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^n$ — $n$-мерный вектор состояния, $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^q$ — $q$-мерный вектор управления, $\mathcal{U}$ — некоторое заданное множество допустимых значений управления; $t \in T = [t_0, t_1]$, $T$ — промежуток времени функционирования системы, моменты времени $t_0$ и $t_1$ заданы; $f(t, x, u)\colon T \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ — заданная $n$-мерная вектор-функция, $\sigma(t, x, u)\colon T \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n\times s}$ — заданная $(n \times s)$-мерная матричная функция; $W(t)$ — $s$-мерный стандартный винеровский процесс; $X_0$ — начальный вектор состояния ($X_0$ и $W(t)$ независимы).

Стохастические системы, описываемые уравнением (1), называют системами диффузионного типа.

Вектор состояния представим следующим образом: $X = [X_{(1)}^{\mathrm{т}}\ X_{(2)}^{\mathrm{т}}]^{\mathrm{т}}$, где $X_{(1)} = [X_1\ X_2\ \ldots\ X_m]^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^m$, $\quad X_{(2)} = [X_{m+1}\ \ldots\ X_n]^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^{n-m}$, $\quad 0 \leqslant m \leqslant n$, предполагая, что при управлении информация о координатах вектора $X_{(1)}$ известна, а о координатах вектора $X_{(2)}$ отсутствует. Наряду с $X_{(1)}$ при управлении используется информация о времени $t$. Таким образом, управление, применяемое в каждый момент времени $t \in T$, имеет вид управления с неполной обратной связью $U(t) = u(t, X_{(1)}(t))$. Число $m$ определяется условиями информированности. При $m = 0$ стохастическая система (1) — система, разомкнутая по вектору состояния, а $u(t)$ — программное управление (функции $U(t)$ и $u(t)$ совпадают), а при $m = n$ имеется информация о всех координатах вектора состояния (векторы $X_{(1)}$ и $X$ совпадают), т.е. стохастическая система (1) — система с полной обратной связью: $U(t) = u(t, X(t))$, а $u(t, x)$ — управление с полной обратной связью, или позиционное управление.

Будем предполагать, что $\varphi(t,x)\colon T\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$ — плотность вероятности случайного процесса $X(t)$ (плотность вероятности вектора состояния $X$), который является решением уравнения (1). Начальный вектор состояния $X_0$ определяется плотностью вероятности, удовлетворяющей условию:

$$\varphi(t_0,x)=\varphi_0(x)\in L_2(\mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Множество допустимых управлений с неполной обратной связью $\mathfrak{U}_m$ образуют функции $u(t,x_{(1)})\colon T\times\mathbb{R}^m\to\mathcal{U}$ такие, что для всех $i=1,2,\ldots,n$ и $l=1,2,\ldots,s$ функции

$$f_{i;u(\cdot)}(t,x)=f_i\big(t,x,u(t,x_{(1)})\big),\quad \sigma_{il;u(\cdot)}(t,x)=\sigma_{il}\big(t,x,u(t,x_{(1)})\big)$$

удовлетворяют условиям, при которых решение уравнения (1) существует, единственно и является непрерывным марковским процессом [10, 15, 40].

Обозначим через $\mathcal{A}_u$ и $\mathcal{A}_u^*$ прямой и обратный производящие операторы случайного процесса $X(t)$ соответственно:

$$\mathcal{A}_u\varphi(t,x)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\big[f_i(t,x,u)\varphi(t,x)\big]+\\
+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\big[g_{ij}(t,x,u)\varphi(t,x)\big],$$

$$\mathcal{A}_u^*\psi(t,x)=\sum_{i=1}^{n}f_i(t,x,u)\,\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}(t,x,u)\,\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x_i\partial x_j},$$

где

$$g_{ij}(t,x,u)=\sum_{l=1}^{s}\sigma_{il}(t,x,u)\sigma_{jl}(t,x,u).$$

Если плотность вероятности этого случайного процесса $\varphi(t,x)$ принадлежит пространству $W_2^{1,1}(\mathcal{Q})$, $\mathcal{Q}=T\times\mathbb{R}^n$, то она удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова [5, 31]:

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}=\mathcal{A}_{u(t,x_{(1)})}\varphi(t,x) \tag{3}$$

с начальным условием (2), т.е.

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\big[f_i\big(t,x,u(t,x_{(1)})\big)\varphi(t,x)\big]+\\
+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\big[g_{ij}\big(t,x,u(t,x_{(1)})\big)\varphi(t,x)\big],\quad \varphi(t_0,x)=\varphi_0(x).$$

Решение уравнения (3) понимается в обобщенном смысле из-за возможной негладкости коэффициентов уравнения (1). Это решение удовлетворяет условию нормировки, если

$$\varphi_0(x) \geqslant 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_0(x) dx = 1. \tag{4}$$

Если коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют соответствующим условиям гладкости, то решение уравнения (3) понимается в классическом смысле, т.е. $\varphi(t,x)$ принадлежит пространству $C^{1,2}(\mathcal{Q})$ при $\varphi_0(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

Дополнительно обозначим через $\mathfrak{F}$ линейное нормированное пространство $W_2^1(\mathbb{R}^n)$, а через $\mathfrak{F}_{\mathrm{norm}}$ — множество функций из $\mathfrak{F}$, удовлетворяющих условию (4). Если решение уравнения (3) понимается в классическом смысле, то $\mathfrak{F}$ совпадает с $C^2(\mathbb{R}^n)$.

Кроме того, $\mathfrak{D}_m$ — множество пар $d_m = (\varphi(t,x), u(t,x_{(1)}))$ таких, что $\varphi(t,x)$ и $u(t,x_{(1)}) \in \mathfrak{U}_m$ удовлетворяют уравнению (3), где $\varphi(t,x) \in \mathfrak{F}_{\mathrm{norm}}$ для любого фиксированного $t \in T$.

Определим на множестве $\mathfrak{D}_m$ функционал качества:

$$J\big(\varphi_0(x), d_m\big) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_0\big(t, \varphi(t,x), u(t,x_{(1)})\big) dt dx + \Psi_1\big(\varphi(t_1,x)\big), \tag{5}$$

где $\mathcal{F}_0(t,\varphi,u)\colon T \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ и $\Psi_1(\varphi(x))\colon \mathfrak{F}_{\mathrm{norm}} \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция и ограниченный функционал соответственно. Функция $\mathcal{F}_0(t,\varphi,u)$ и функционал $\Psi_1(\varphi(x))$ заданы.

На функцию $\mathcal{F}_0(t,\varphi(t,x),u)$ можно накладывать дополнительные условия, обеспечивающие конечность величины $J(\varphi_0(x), d_m)$.

Наиболее востребованный в практических приложениях вариант соответствует случаю

$$\mathcal{F}_0\big(t, \varphi(t,x), u(t,x_{(1)})\big) = f_0\big(t, x, u(t,x_{(1)})\big)\varphi(t,x),$$

$$\Psi_1\big(\varphi(t_1,x)\big) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_1(x)\varphi(t_1,x) dx,$$

когда функционал качества (5) характеризует среднее значение случайной величины

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0\big(t, X(t), U(t)\big) dt + \psi_1\big(X(t_1)\big),$$

определенной на траекториях стохастической системы (1), т.е.

$$J\big(\varphi_0(x), d_m\big) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{R}^n} f_0\big(t, x, u(t, x_{(1)})\big)\varphi(t, x)\,dt\,dx +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \psi_1(x)\varphi(t_1, x)\,dx = \mathrm{E}\left[\int_{t_0}^{t_1} f_0\big(t, X(t), U(t)\big)dt + \psi_1\big(X(t_1)\big)\right], \quad (6)$$

где E означает математическое ожидание.

Предполагается, что функции $f_0(t, x, u)\colon T \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ и $\psi_1(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условию конечности величины $J(\varphi_0(x), d_m)$ (см., например [21, 32]).

Далее сформулируем две задачи оптимального управления. В первой задаче начальная плотность вероятности $\varphi_0(x)$ считается заданной. Во второй — решение ищется сразу для всех допустимых начальных плотностей вероятности $\varphi_0(x)$ из $\mathfrak{F}_{\mathrm{norm}}$.

**Задача 1** Найти такой элемент $d_m^* = (\varphi^*(t, x), u^*(t, x_{(1)})) \in \mathfrak{D}_m$, что

$$J\big(\varphi_0(x), d_m^*\big) = \min_{d_m \in \mathfrak{D}_m} J\big(\varphi_0(x), d_m\big). \quad (7)$$

**Задача 2** Найти такую синтезирующую функцию $u^*(t, x_{(1)}; \varphi(x))\colon T \times \mathbb{R}^m \times \mathfrak{F}_{\mathrm{norm}} \to \mathcal{U}$, что

$$J\big(\varphi_0(x), d_m^*\big) = \min_{d_m \in \mathfrak{D}_m} J\big(\varphi_0(x), d_m\big) \quad \forall \varphi_0(x) \in \mathfrak{F}_{\mathrm{norm}}, \quad (8)$$

где $d_m^* = (\varphi^*(t, x), u^*(t, x_{(1)}) = u^*(t, x_{(1)}; \varphi^*(t, x))) \in \mathfrak{D}_m$.

Управление $u^*(t, x_{(1)})$ называется оптимальным управлением, а функция $u^*(t, x_{(1)}; \varphi(x))$ — оптимальной синтезирующей функцией на множестве $\mathfrak{F}_{\mathrm{norm}}$.

Фактически, проведена редукция исходной стохастической задачи к детерминированной задаче управления решением дифференциального уравнения с частными производными (3), т.е. системой с распределенными параметрами. Оптимальная синтезирующая функция $u^*(t, x_{(1)}; \varphi(x))$ — это управление с обратной связью с учетом того, что состоянием системы (3), которое содержит всю информацию в текущий момент времени $t$, является плотность вероятности $\varphi(x) = \varphi(t, x)$. При заданной начальной плотности вероятности $\varphi_0(x)$ она порождает оптимальное управление решением стохастического дифференциального уравнения (1) при неполной информации.

Здесь предполагается, что минимумы в (7) и (8), а также оптимальные синтезирующие функции вида $u^*(t, x_{(1)}; \varphi(x))$ существуют. При невыполнении этого предположения задачи 1 и 2 могут быть сформулированы в терминах минимизирующих последовательностей [6, 8, 31].

Наряду с задачами оптимального управления 1 и 2 сформулируем задачи поиска их приближенного решения.

**Задача 3** Найти такой элемент $d_m^\varepsilon = (\varphi^\varepsilon(t,x), u^\varepsilon(t,x_{(1)})) \in \mathfrak{D}_m$, что

$$\left|J\bigl(\varphi_0(x), d_m^*\bigr) - J\bigl(\varphi_0(x), d_m^\varepsilon\bigr)\right| \leqslant \varepsilon, \tag{9}$$

где $\varepsilon$ — малое положительное число.

**Задача 4** Найти такую синтезирующую функцию $u^\varepsilon(t, x_{(1)}; \varphi(x))\colon T\times\mathbb{R}^m \times \mathfrak{F}_{\mathrm{norm}} \to \mathcal{U}$, что

$$\left|J\bigl(\varphi_0(x), d_m^*\bigr) - J\bigl(\varphi_0(x), d_m^\varepsilon\bigr)\right| \leqslant \varepsilon \quad \forall \varphi_0(x) \in \mathfrak{F}_{\mathrm{norm}}, \tag{10}$$

где $d_m^\varepsilon = (\varphi^\varepsilon(t,x), u^\varepsilon(t,x_{(1)}) = u^\varepsilon(t, x_{(1)}; \varphi^\varepsilon(t,x))) \in \mathfrak{D}_m$, $\varepsilon$ — малое положительное число.

Управление $u^\varepsilon(t,x_{(1)})$ будем называть $\varepsilon$-оптимальным управлением, а функцию $u^\varepsilon(t,x_{(1)};\varphi(x))$ — $\varepsilon$-оптимальной синтезирующей функцией на множестве $\mathfrak{F}_{\mathrm{norm}}$.

## Достаточные условия оптимальности и $\varepsilon$-оптимальности

Введем в рассмотрение множество $\mathfrak{S}$ функций $S(t,\varphi(x))\colon T\times\mathfrak{F}\to\mathbb{R}$, непрерывных на $T\times\mathfrak{F}$, кусочно-дифференцируемых по переменной $t\in T$ и имеющих непрерывную вариационную (функциональную) производную по аргументу $\varphi(x)$, причем $\frac{\delta S(t,\varphi(x))}{\delta\varphi(x)} \in \mathfrak{F}_{\mathrm{loc}}$ при фиксированной переменной $t$, а также конструкции

$$R\bigl(t,\varphi(x),u\bigr) = \frac{\partial S\bigl(t,\varphi(x)\bigr)}{\partial t} + \\ + \int_{\mathbb{R}^n} \left\{\varphi(x)\mathcal{A}_u^*\left[\frac{\delta S\bigl(t,\varphi(\cdot)\bigr)}{\delta\varphi(x)}\right] - \mathcal{F}_0\bigl(t,\varphi(x),u\bigr)\right\}dx,$$

$$G\bigl(t_1,\varphi(x)\bigr) = S\bigl(t_1,\varphi(x)\bigr) + \Psi_1\bigl(\varphi(x)\bigr).$$

Через $\mathfrak{F}_{\mathrm{loc}}$ обозначено линейное пространство функций вектора $x$ с теми же условиями гладкости, что и функции из $\mathfrak{F}$, но которые выполняются локально. Определение вариационных производных и правила их вычисления можно найти в работах [1, 2].

Сформулируем условия оптимальности в задачах 1 и 2.

Предположим, что при фиксированном $m$, $0 \leqslant m \leqslant n$, выполняются равенства

$$\max_{\varphi(x)\in\mathfrak{F}_{\mathrm{norm}}} \left\{ \frac{\partial S\big(t,\varphi(x)\big)}{\partial t} + \int_{\mathbb{R}^m} \left[ \max_{u\in\mathcal{U}} \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \left\{ \varphi(x)\mathcal{A}_u^* \left[ \frac{\delta S\big(t,\varphi(\cdot)\big)}{\delta\varphi(x)} \right] - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \mathcal{F}_0(t,\varphi(x),u) \right\} dx_{(2)} \right] dx_{(1)} \right\} = 0, \quad (11)$$

$$\min_{\varphi(x)\in\mathfrak{F}_{\mathrm{norm}}} G\big(t_1,\varphi(x)\big) = 0. \quad (12)$$

**Теорема 1 (достаточные условия оптимальности в задаче 1)**
*Если существует функция $S(t,\varphi(x)) \in \mathfrak{S}$ такая, что элемент $d_m^* = (\varphi^*(t,x), u^*(t,x_{(1)})) \in \mathfrak{D}_m$ при почти всех $t \in T$ удовлетворяет условиям*

$$R\big(t,\varphi^*(t,x),u^*(t,x_{(1)})\big) = 0, \quad G\big(t_1,\varphi^*(t_1,x)\big) = 0,$$

*то справедливо условие (7) и при этом*

$$J\big(\varphi_0(x),d_m^*\big) = -S\big(t_0,\varphi_0(x)\big). \quad (13)$$

В работах [16, 19, 21] вместо условий (11) и (12) формулируются следующие условия:

$$r_m(t) = \max_{\varphi(x)\in\mathfrak{F}_{\mathrm{norm}}} \left\{ \frac{\partial S\big(t,\varphi(x)\big)}{\partial t} + \right.$$
$$\left. + \int_{\mathbb{R}^m} \left[ \max_{u\in\mathcal{U}} \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \left\{ \varphi(x)\mathcal{A}_u^* \left[ \frac{\delta S\big(t,\varphi(\cdot)\big)}{\delta\varphi(x)} \right] - \mathcal{F}_0\big(t,\varphi(x),u\big) \right\} dx_{(2)} \right] dx_{(1)} \right\},$$
$$g = \min_{\varphi(x)\in\mathfrak{F}_{\mathrm{norm}}} G\big(t_1,\varphi(x)\big),$$

где функция $r_m(t)$ кусочно-непрерывна на $T$, и указывается, что функцию $r_m(t)$ и величину $g$ можно без ограничения общности положить равными нулю. Такой подход был заложен в работах В.Ф. Кротова [7–9]. Однако здесь и далее в соответсвующих условиях функция $r_m(t)$ и величина $g$ сразу полагаются равными нулю для упрощения записи условий оптимальности.

Если для некоторой функции $S(t,\varphi(x)) \in \mathfrak{S}$ условия (11) и (12) не выполняются, то можно рассмотреть функцию $S(t,\varphi(x)) + \gamma(t) \in \mathfrak{S}$, где $\gamma(t)$ выбирается исходя из выполнения условий (11) и (12), а именно

$$\gamma(t) = \int_t^{t_1} r_m(\tau)\,d\tau - g.$$

Пусть далее в выражениях (11) и (12) отсутствуют операции максимизации и минимизации по $\varphi(x) \in \mathfrak{F}_{\mathrm{norm}}$ соответственно:

$$\frac{\partial S\big(t,\varphi(x)\big)}{\partial t} + \int_{\mathbb{R}^m} \left[ \max_{u\in\mathcal{U}} \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \left\{ \varphi(x)\mathcal{A}_u^* \left[ \frac{\delta S\big(t,\varphi(\cdot)\big)}{\delta\varphi(x)} \right] - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \mathcal{F}_0(t,\varphi(x),u) \right\} dx_{(2)} \right] dx_{(1)} = 0, \quad (14)$$

$$S\big(t_1,\varphi(x)\big) + \Psi_1\big(\varphi(x)\big) = 0. \quad (15)$$

**Теорема 2 (достаточные условия оптимальности в задаче 2)** *Если существуют функции $S(t,\varphi(x)) \in \mathfrak{S}$ и $u^*(t,x_{(1)};\varphi(x))$ такие, что при почти всех $t \in T$ и при любых $\varphi(x) \in \mathfrak{F}_{\mathrm{norm}}$ выполняются условия*

$$R\big(t,\varphi(x),u^*\big(t,x_{(1)};\varphi(x)\big)\big) = 0, \quad G\big(t_1,\varphi(x)\big) = 0,$$

*то справедливо условие* (8).

Доказательства условий оптимальности не приводятся, они есть в работах [16, 19, 21].

Перейдем к условиям $\varepsilon$-оптимальности в задачах 3 и 4.

**Теорема 3 (достаточные условия $\varepsilon$-оптимальности в задаче 3)** *Если существует функция $S(t,\varphi(x)) \in \mathfrak{S}$, суммируемая функция $\varepsilon_1(t)$, принимающая малые положительные значения при $t \in T$, и малое положительное число $\varepsilon_2$ такие, что элемент $d_m^\varepsilon = (\varphi^\varepsilon(t,x),u^\varepsilon(t,x_{(1)})) \in \mathfrak{D}_m$ при почти всех $t \in T$ удовлетворяет условиям*

$$\Big|R\big(t,\varphi^\varepsilon(t,x),u^\varepsilon(t,x_{(1)})\big)\Big| \leqslant \varepsilon_1(t), \quad \Big|G\big(t_1,\varphi^\varepsilon(t_1,x)\big)\Big| \leqslant \varepsilon_2,$$

*то справедливо условие* (9), *т.е. управление $u^\varepsilon(t,x_{(1)})$ является $\varepsilon$-оптимальным, и при этом*

$$\varepsilon = \int_{t_0}^{t_1} \varepsilon_1(t)\,dt + \varepsilon_2. \quad (16)$$

**Теорема 4 (достаточные условия $\varepsilon$-оптимальности в задаче 4)** *Если существуют функции $S(t,\varphi(x)) \in \mathfrak{S}$ и $u^\varepsilon(t,x_{(1)};\varphi(x))$, суммируемая функция $\varepsilon_1(t)$, принимающая малые положительные значения при $t \in T$, и малое положительное число $\varepsilon_2$ такие, что при почти всех $t \in T$ и при любых $\varphi(x) \in \mathfrak{F}_{\mathrm{norm}}$ выполняются условия*

$$\Big|R\big(t,\varphi(x),u^\varepsilon\big(t,x_{(1)};\varphi(x)\big)\big)\Big| \leqslant \varepsilon_1(t), \quad \Big|G\big(t_1,\varphi(x)\big)\Big| \leqslant \varepsilon_2,$$

*то справедливо условие* (10), *т.е. $u^*(t,x_{(1)};\varphi(x))$ является $\varepsilon$-оптимальной синтезирующей функцией с учетом* (16).

Отметим, что в ряде случаев условия $\varepsilon$-оптимальности целесообразно формулировать для сужения множества $\mathfrak{F}_{\mathrm{norm}}$. Это сужение строится для каждой конкретной задачи, например, ниже для линейной стохастической системы с квадратичным по состоянию функционалом качества вводятся дополнительные ограничения на первые два момента: математическое ожидание и второй начальный момент. Доказательства условий $\varepsilon$-оптимальности приведены в статье [20].

## Соотношения для нахождения оптимального и $\varepsilon$-оптимального управления

Приведем соотношения для нахождения оптимального и $\varepsilon$-оптимального управления, которые являются следствием достаточных условий оптимальности и $\varepsilon$-оптимальности, сформулированных выше, а именно структуру оптимального управления:

$$u^*(t,x_{(1)}) = \arg\max_{u\in\mathcal{U}}\Bigg\{\int_{\mathbb{R}^{n-m}}\Bigg[\varphi^*(t,x)\mathcal{A}_u^*\Bigg[\frac{\delta S\big(t,\varphi^*(t,x)\big)}{\delta\varphi(x)}\Bigg] - \mathcal{F}_0\big(t,\varphi^*(t,x),u\big)\Bigg]dx_{(2)}\Bigg\}, \tag{17}$$

а также уравнения

$$\frac{\delta S_t\big(t,\varphi^*(t,x)\big)}{\delta\varphi(x)} = -\frac{\delta H\big(t,\varphi^*(t,x),u^*(t,x_{(1)})\big)}{\delta\varphi(x)}, \tag{18}$$

$$\frac{\delta S\big(t_1,\varphi^*(t_1,x)\big)}{\delta\varphi(x)} = -\frac{\delta\Psi_1\big(\varphi^*(t_1,x)\big)}{\delta\varphi(x)}, \tag{19}$$

где

$$S_t\big(t,\varphi(x)\big) = \frac{\partial S\big(t,\varphi(x)\big)}{\partial t},$$

$$H\big(t,\varphi(x),u\big) = \int_{\mathbb{R}^n}\Bigg[\varphi(x)\mathcal{A}_u^*\Bigg[\frac{\delta S\big(t,\varphi(\cdot)\big)}{\delta\varphi(x)}\Bigg] - \mathcal{F}_0\big(t,\varphi(x),u\big)\Bigg]dx.$$

Отметим, что в соотношениях (17)–(19) плотность вероятности $\varphi^*(t,x)$ является решением уравнения (3) с управлением (17).

Приведенные уравнения (18) и (19) получены с помощью необходимых условий экстремума. Поэтому если найдено решение системы (18) и (19) с учетом (17), то это еще не означает, что пара $(\varphi^*(t,x),u^*(t,x_{(1)}))$ удовлетворяет условию (7), и могут потребоваться дополнительные исследования.

Рассмотрим предельные случаи информированности о векторе состояния.

1. Информация о векторе состояния отсутствует ($m = 0$).

Структура оптимального программного управления:

$$u^*(t) = \arg\max_{u\in\mathcal{U}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \varphi^*(t,x) \mathcal{A}_u^* \left[ \frac{\delta S\big(t, \varphi^*(t,x)\big)}{\delta \varphi(x)} \right] - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \mathcal{F}_0\big(t, \varphi^*(t,x), u\big) \right] dx \right\}. \quad (20)$$

2. Имеется полная информация о векторе состояния ($m = n$).

Структура оптимального управления с полной обратной связью:

$$u^*(t,x) = \arg\max_{u\in\mathcal{U}} \left\{ \varphi^*(t,x) \mathcal{A}_u^* \left[ \frac{\delta S\big(t, \varphi^*(t,x)\big)}{\delta \varphi(x)} \right] - \mathcal{F}_0\big(t, \varphi^*(t,x), u\big) \right\}. \quad (21)$$

Соотношения для нахождения оптимальной синтезирующей функции следуют из условий теоремы 2 и должны выполняться при почти всех $t \in T$ и при любых $\varphi(x) \in \mathfrak{F}_{\mathrm{norm}}$:

$$\frac{\partial S\big(t, \varphi(x)\big)}{\partial t} + \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \varphi(x) \mathcal{A}^*_{u^*(t, x_{(1)}; \varphi(x))} \left[ \frac{\delta S\big(t, \varphi(\cdot)\big)}{\delta \varphi(x)} \right] - \right.$$
$$\left. - \mathcal{F}_0\Big(t, \varphi(x), u^*\big(t, x_{(1)}; \varphi(x)\big)\Big) \right] dx = 0, \quad (22)$$

$$S\big(t_1, \varphi(x)\big) + \Psi_1\big(\varphi(x)\big) = 0, \quad (23)$$

а структура оптимальной синтезирующей функции имеет вид

$$u^*\big(t, x_{(1)}; \varphi(x)\big) = \arg\max_{u\in\mathcal{U}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \left[ \varphi(x) \mathcal{A}_u^* \left[ \frac{\delta S\big(t, \varphi(\cdot)\big)}{\delta \varphi(x)} \right] - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \mathcal{F}_0\big(t, \varphi(x), u\big) \right] dx_{(2)} \right\}, \quad (24)$$

что следует из соотношения (14).

В предельных случаях информированности о векторе состояния структура оптимальной синтезирующей функции записывается аналогично (20) и (21).

Далее приведем соотношения для нахождения $\varepsilon$-оптимального управления для элемента $d_m^\varepsilon = (\varphi^\varepsilon(t,x), u^\varepsilon(t, x_{(1)})) \in \mathfrak{D}_m$. Для этого воспользуемся условиями теоремы 3. Тогда

$$\left|\frac{\partial S\big(t,\varphi^\varepsilon(t,x)\big)}{\partial t}+\int_{\mathbb{R}^n}\left\{\varphi^\varepsilon(t,x)\mathcal{A}^*_{u^\varepsilon(t,x_{(1)})}\left[\frac{\delta S\big(t,\varphi^\varepsilon(t,x)\big)}{\delta\varphi(x)}\right]-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\mathcal{F}_0\big(t,\varphi^\varepsilon(t,x),u^\varepsilon(t,x_{(1)})\big)\right\}dx\right|\leqslant\varepsilon_1(t),\quad(25)$$

$$\Big|S\big(t_1,\varphi^\varepsilon(t_1,x)\big)+\Psi_1\big(\varphi^\varepsilon(t_1,x)\big)\Big|\leqslant\varepsilon_2.\qquad(26)$$

Наконец, запишем соотношения для нахождения $\varepsilon$-оптимальной синтезирующей функции, которые нетрудно получить из условий теоремы 4. Они должны выполняться при почти всех $t\in T$ и при любых $\varphi(x)\in\mathfrak{F}_{\mathrm{norm}}$:

$$\left|\frac{\partial S\big(t,\varphi(x)\big)}{\partial t}+\int_{\mathbb{R}^n}\left\{\varphi(x)\mathcal{A}^*_{u^\varepsilon(t,x_{(1)};\varphi(x))}\left[\frac{\delta S\big(t,\varphi(\cdot)\big)}{\delta\varphi(x)}\right]-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\mathcal{F}_0\Big(t,\varphi(x),u^\varepsilon\big(t,x_{(1)};\varphi(x)\big)\Big)\right\}dx\right|\leqslant\varepsilon_1(t),\quad(27)$$

$$\Big|S\big(t_1,\varphi(x)\big)+\Psi_1\big(\varphi(x)\big)\Big|\leqslant\varepsilon_2.\qquad(28)$$

Здесь справедливо такое же замечание, как и выше: в соотношениях (25) и (26) функция $\varphi^\varepsilon(t,x)$ является решением уравнения (3) с управлением $u^\varepsilon(t,x_{(1)})$. Кроме того, окончательный вид всех приведенных в этом разделе соотношений для нахождения как оптимального управления, так и $\varepsilon$-оптимального управления зависит от решаемой задачи и, следовательно, от задания функции $S(t,\varphi(x))\in\mathfrak{S}$.

## Соотношения для нахождения оптимального и $\varepsilon$-оптимального в среднем управления

Соотношения для нахождения оптимального и $\varepsilon$-оптимального управления в случае линейного функционала качества (6) следуют из соотношений (17)–(19) при условии, что функция $S(t,\varphi(t,x))$ определена в виде

$$S\big(t,\varphi(x)\big)=\int_{\mathbb{R}^n}\psi(t,x)\varphi(x)\,dx=\mathrm{E}\Big[\psi\big(t,X(t)\big)\Big],\qquad(29)$$

где $\psi(t,x)\colon T\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

Запишем структуру оптимального управления (17), используя определение оператора $\mathcal{A}^*_u$ и учитывая (29):

$$u^*(t,x_{(1)})=\arg\max_{u\in\mathcal{U}}\left\{\int_{\mathbb{R}^{n-m}}\left[\sum_{i=1}^n f_i(t,x,u)\,\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x_i}+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}(t,x,u)\,\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}-f_0(t,x,u)\Bigg]\varphi^*(t,x)\,dx_{(2)}\Bigg\}=$$

$$=\arg\max_{u\in\mathcal{U}}\Bigg\{\int_{\mathbb{R}^{n-m}}\Bigg[\sum_{i=1}^{n}f_i(t,x,u)\,\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x_i}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}(t,x,u)\,\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}-f_0(t,x,u)\Bigg]\varphi^*(t,x_{(2)}|x_{(1)})\,dx_{(2)}\Bigg\},\quad(30)$$

где

$$\varphi^*_{(2|1)}(t,x_{(2)}|x_{(1)})=\frac{\varphi^*(t,x)}{\varphi^*_{(1)}(t,x_{(1)})},\quad \varphi^*_{(1)}(t,x_{(1)})=\int_{\mathbb{R}^{n-m}}\varphi^*(t,x)\,dx_{(2)}.$$

Здесь $\varphi^*_{(1)}(t,x_{(1)})$ — маргинальная плотность вероятности вектора $X_{(1)}$, информация о координатах которого при управлении известна, а $\varphi^*_{(2|1)}(t,x_{(2)}|x_{(1)})$ — условная плотность вероятности вектора $X_{(2)}$, о координатах которого информация отсутствует, при условии $X_{(1)}(t)=x_{(1)}$. Такое управление $u^*(t,x_{(1)})$ называют оптимальным в среднем управлением.

Принимая во внимание определения операторов $\mathcal{A}_u$ и $\mathcal{A}^*_u$, запишем уравнения (3), а также (18) и (19) с учетом (29):

$$\frac{\partial\varphi^*(t,x)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\big[f_i\big(t,x,u^*(t,x_{(1)})\big)\varphi^*(t,x)\big]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\big[g_{ij}\big(t,x,u^*(t,x_{(1)})\big)\varphi^*(t,x)\big],\quad \varphi^*(t_0,x)=\varphi_0(x);\quad(31)$$

$$\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}f_i\big(t,x,u^*(t,x_{(1)})\big)\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x_i}-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}\big(t,x,u^*(t,x_{(1)})\big)\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}+$$

$$+f_0\big(t,x,u^*(t,x_{(1)})\big),\quad \psi(t_1,x)=-\psi_1(x).\quad(32)$$

Таким образом, для определения оптимального управления необходимо решить систему (31) и (32) с учетом (30). Минимум функционала качества (6) вычисляется по формуле (13), которую согласно (29) можно представить в форме

$$J\big(\varphi_0(x),d^*_m\big)=-\int_{\mathbb{R}^n}\psi(t_0,x)\varphi_0(x)\,dx=-\mathrm{E}\big[\psi(t_0,X_0)\big].\quad(33)$$

Рассмотрим предельные случаи информированности о векторе состояния.

1. Информация о векторе состояния отсутствует ($m = 0$).

Структура оптимального программного управления:

$$u^*(t) = \arg\max_{u\in\mathcal{U}}\Bigg\{\int_{\mathbb{R}^n}\Bigg[\sum_{i=1}^n f_i(t,x,u)\,\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x_i} + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n g_{ij}(t,x,u)\,\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x_i\partial x_j} - f_0(t,x,u)\Bigg]\varphi^*(t,x)dx\Bigg\}, \quad (34)$$

а соотношения (31) и (32) с учетом (34) — уравнения стохастического принципа максимума [16, 21, 31, 32].

2. Имеется полная информация о векторе состояния ($m = n$).

Структура оптимального управления с полной обратной связью:

$$u^*(t,x) = \arg\max_{u\in\mathcal{U}}\Bigg\{\sum_{i=1}^n f_i(t,x,u)\,\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x_i} + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n g_{ij}(t,x,u)\,\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x_i\partial x_j} - f_0(t,x,u)\Bigg\}. \quad (35)$$

В последнем случае в структуру оптимального управления не входит плотность вероятности вектора состояния, поэтому уравнения (31) и (32) могут быть решены по отдельности. Кроме того, уравнение (32) с учетом (35) можно записать в виде уравнения Беллмана для стохастических систем диффузионного типа [16, 21, 31, 32]:

$$\max_{u\in\mathcal{U}}\Bigg\{\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n f_i(t,x,u)\,\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n g_{ij}(t,x,u)\,\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x_i\partial x_j} - \\ - f_0(t,x,u)\Bigg\} = 0, \quad \psi(t_1,x) = -\psi_1(x). \quad (36)$$

Далее перейдем к соотношениям для нахождения $\varepsilon$-оптимального управления, т.е. для элемента $d_m^\varepsilon = (\varphi^\varepsilon(t,x), u^\varepsilon(t,x_{(1)})) \in \mathfrak{D}_m$:

$$\Bigg|\int_{\mathbb{R}^n}\Bigg[\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n f_i\big(t,x,u^\varepsilon(t,x_{(1)})\big)\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x_i} + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n g_{ij}\big(t,x,u^\varepsilon(t,x_{(1)})\big)\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x_i\partial x_j} -$$

$$- f_0\big(t, x, u^\varepsilon(t, x_{(1)})\big)\Big]\varphi^\varepsilon(t, x)dx\Bigg| \leqslant \varepsilon_1(t), \tag{37}$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \big[\psi(t_1, x) + \psi_1(x)\big]\varphi^\varepsilon(t_1, x)dx\right| \leqslant \varepsilon_2. \tag{38}$$

Отметим, что если обозначить $\psi_*(t,x) = -\psi(t,x)$ и использовать вероятностное представление [11] решения уравнения (32), то получим

$$\psi_*(t,x) = \mathrm{E}\left[\int_t^{t_1} f_0\big(\tau, X(\tau), U^*(\tau)\big)d\tau + \psi_1\big(X(t_1)\big)\right],$$

где случайный процесс $X(t)$ удовлетворяет уравнению (1) с начальным условием $X(t) = x$. Эта функция характеризует оставшиеся потери и называется функцией Беллмана [35]. В частности, при полной информации о векторе состояния $(m = n)$ получаем уравнение Беллмана в виде

$$\min_{u \in \mathcal{U}}\Bigg\{\frac{\partial \psi_*(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n f_i(t,x,u)\,\frac{\partial \psi_*(t,x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n g_{ij}(t,x,u)\,\frac{\partial^2 \psi_*(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + f_0(t,x,u)\Bigg\} = 0, \quad \psi_*(t_1,x) = \psi_1(x),$$

и для любого допустимого управления $U(t)$

$$\psi_*(t,x) \leqslant \mathrm{E}\left[\int_t^{t_1} f_0\big(\tau, X(\tau), U(\tau)\big)d\tau + \psi_1\big(X(t_1)\big)\right].$$

## Методика нахождения оптимального и $\varepsilon$-оптимального управления. Примеры

Приведем методику нахождения оптимального и $\varepsilon$-оптимального управления стохастической системой (1) с применением оптимальных синтезирующих функций.

*Первый этап* состоит в применении методики нахождения оптимального управления системой с распределенными параметрами, описываемой уравнением (3).

1. Решить уравнение (22) с краевым условием (23) с учетом определения обратного производящего оператора $\mathcal{A}_u^*$ и структуры оптимальной синтезирующей функции (24). В результате получим функцию $S(t, \varphi(x))$ и $u^*(t, x_{(1)}; \varphi(x))$ — решение задачи 2.

2. Задать начальную плотность вероятности $\varphi_0(x) \in \mathfrak{F}_{\mathrm{norm}}$.

3. Решить уравнение (3) с начальной плотностью вероятности $\varphi_0(x)$ совместно с оптимальной синтезирующей функцией $u^*(t, x_{(1)}; \varphi(x))$, найденной в п. 1 данного этапа. В результате определяется пара

$$d_m^* = \big(\varphi^*(t,x), u^*(t, x_{(1)}) = u^*\big(t, x_{(1)}; \varphi^*(t,x)\big)\big)$$

– решение задачи 1 для фиксированной начальной плотности вероятности.

4. Для получения решения другой задачи 1 перейти к п. 2, задав новую начальную плотность вероятности $\varphi_0(x) \in \mathfrak{F}_{\rm norm}$. Если этого не требуется, перейти к этапу использования синтезированного оптимального управления $u^*(t, x_{(1)})$ при управлении исходной стохастической системой (1).

*Второй этап* состоит в применении оптимального управления $u^*(t, x_{(1)})$ для нахождения траекторий системы, описываемой уравнением (1).

1. Получить реализацию начального состояния $X(t_0) = X_0$ в соответствии с заданной в п. 2 первого этапа плотностью вероятности $\varphi_0(x)$.

2. Получить реализацию случайного процесса $X(t)$, используя методы аналитического [14, 15] или численного [3, 12, 13, 36, 39] решения стохастических дифференциальных уравнений. При этом уравнение (1) имеет вид

$$dX(t) = f\big(t, X(t), U^*(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t), U^*(t)\big)dW(t).$$

В результате получим пару $(X(t), U^*(t))$, где $X(t)$ – траектория, а $U^*(t) = u^*(t, X_{(1)}(t))$ — управление.

3. Для получения другой пары $\big(X(t), U^*(t)\big)$ перейти к п. 1 данного этапа.

Второй этап методики описывает процедуру моделирования системы (1) совместно с найденным управлением. Он иллюстрирует применимость результатов решения редуцированной задачи 1 к исходной стохастической задаче.

Таким образом, оптимальная синтезирующая функция $u^*(t, x_{(1)}; \varphi(x))$ порождает для каждой начальной плотности вероятности $\varphi_0(x)$ соответствующее оптимальное на множестве $\mathfrak{D}_m$ управление $u^*(t, x_{(1)})$, которое, в свою очередь, служит для получения траекторий исходной управляемой системы (1), так что применяемое в текущий момент времени управление имеет вид $U^*(t) = u^*(t, X_{(1)}(t))$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\varphi_0(x) & \overset{(3)}{\dashrightarrow} & \varphi(t,x) & \longrightarrow & u^*\big(t, x_{(1)}; \varphi(x)\big) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
X_0 & \overset{(1)}{\dashrightarrow} & X^*(t) & \xrightarrow{X^*_{(1)}(t)} & u^*(t, x_{(1)}) & \longrightarrow & U^*(t).
\end{array}$$

Методика нахождения $\varepsilon$-оптимального управления стохастической системой с применением $\varepsilon$-оптимальных синтезирующих функций аналогична методике нахождения оптимального управления. Уравнение (22) с краевым условием (23) решается приближенно, далее точно либо приближенно решается уравнение (3), а уравнение (1) записывается следующим образом:

$$dX(t) = f\big(t, X(t), U^{\varepsilon}(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t), U^{\varepsilon}(t)\big)dW(t),$$

где $U^{\varepsilon}(t) = u^{\varepsilon}(t, X_1(t))$.

Проиллюстрируем методику нахождения оптимального управления и $\varepsilon$-оптимального управления на примере линейной стохастической системы с квадратичным по состоянию функционалом качества. Это классическая задача аналитического конструирования оптимальных регуляторов, решение которой не представляет трудностей, но даже для нее последовательное выполнение всех этапов методики выглядит достаточно объемным.

Для рассмотренной линейной системы найдены оптимальная синтезирующая функция, оптимальное программное управление и оптимальное управление с обратной связью. При приближенном решении задачи выбран метод интегрирования дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов, это обусловлено простотой нахождения оценок точности приближенного решения задачи оптимального управления по величине функционала качества. В результате получены $\varepsilon$-оптимальные синтезирующие функции, $\varepsilon$-оптимальное программное управление и $\varepsilon$-оптимальные управления с обратной связью.

**Пример 1** Найти соотношения для оптимальной синтезирующей функции $u^*(t;\varphi(x))$ для одномерной стохастической системы, описываемой линейным стохастическим дифференциальным уравнением:

$$dX(t) = \big(AX(t) + BU(t) + C\big)dt + DdW(t), \quad X(0) = X_0, \tag{39}$$

где $t \in T = [0,1]$, $X \in \mathbb{R}$, $U \in \mathbb{R}$; $A$, $B$, $C$ и $D$ — константы; $W(t)$ — одномерный стандартный винеровский процесс. Начальное состояние $X_0$ задается плотностью вероятности $\varphi_0(x) \in \mathfrak{F}_{\mathrm{norm}}$.

Функционал качества:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \big(Rx^2 + Qu^2(t)\big)\varphi(t,x)dtdx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} Vx^2\varphi(1,x)dx =$$
$$= \mathrm{E}\left[\frac{1}{2}\int_0^1 \big(RX^2(t) + QU^2(t)\big)dt + \frac{1}{2}VX^2(1)\right], \tag{40}$$

где $R \geqslant 0$, $Q > 0$ и $V \geqslant 0$ — константы.

Сравнивая с постановкой задачи, получаем $n = 1$, $m = 0$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$. Соответствующее уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова для плотности вероятности $\varphi(t, x)$ вектора состояния $X$ имеет вид

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\Big[\big(Ax + Bu(t) + C\big)\varphi(t,x)\Big] + \frac{D^2}{2}\,\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2},$$
$$\varphi(0,x) = \varphi_0(x), \quad (41)$$

т.е.

$$\mathcal{A}_u\varphi(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x}\big[(Ax + Bu + C)\varphi(t,x)\big] + \frac{D^2}{2}\,\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2},$$
$$\mathcal{A}_u^*\psi(t,x) = (Ax + Bu + C)\,\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x} + \frac{D^2}{2}\,\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2}.$$

Далее,

$$f_0(t,x,u) = \frac{1}{2}\,(Rx^2 + Qu^2), \quad \psi_1(x) = \frac{1}{2}\,Vx^2.$$

Запишем соотношения (22) и (23) для рассматриваемой задачи:

$$\frac{\partial S\big(t,\varphi(x)\big)}{\partial t} + \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\Bigg(\Big(Ax + Bu^*\big(t;\varphi(x)\big) + C\Big)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\delta S\big(t,\varphi(\cdot)\big)}{\delta\varphi(x)}\right] + \\ + \frac{D^2}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\delta S\big(t,\varphi(\cdot)\big)}{\delta\varphi(x)}\right] - \frac{1}{2}\Big(Rx^2 + Q\big[u^*\big(t;\varphi(x)\big)\big]^2\Big)\Bigg)dx = 0, \quad (42)$$

$$S\big(1,\varphi(x)\big) + \frac{1}{2}\,V\int_{\mathbb{R}} x^2\varphi(x)\,dx = 0, \quad (43)$$

а также структуру оптимальной синтезирующей функции:

$$u^*\big(t;\varphi(x)\big) = \arg\max_{u\in\mathbb{R}}\Bigg\{\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\Bigg((Ax + Bu + C)\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\delta S\big(t,\varphi(\cdot)\big)}{\delta\varphi(x)}\right] + \\ + \frac{D^2}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\delta S\big(t,\varphi(\cdot)\big)}{\delta\varphi(x)}\right] - \frac{1}{2}\,(Rx^2 + Qu^2)\Bigg)dx\Bigg\}. \quad (44)$$

Ограничения на управление отсутствуют, поэтому применим в (44) необходимые условия экстремума [17]:

$$\frac{\partial}{\partial u}\Bigg[\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\Bigg((Ax + Bu + C)\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\delta S\big(t,\varphi(\cdot)\big)}{\delta\varphi(x)}\right] + \\ + \frac{D^2}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\delta S\big(t,\varphi(\cdot)\big)}{\delta\varphi(x)}\right] - \frac{1}{2}\,(Rx^2 + Qu^2)\Bigg)dx\Bigg] = 0,$$

или

$$B\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\delta S\big(t,\varphi(\cdot)\big)}{\delta\varphi(x)}\right]\varphi(x)dx-Qu\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)dx=0.$$

Интеграл во втором слагаемом равен единице, так как $\varphi(x)\in\mathfrak{F}_{\mathrm{norm}}$. Следовательно,

$$u^*\big(t;\varphi(x)\big)=\frac{B}{Q}\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\delta S\big(t,\varphi(\cdot)\big)}{\delta\varphi(x)}\right]\varphi(x)dx.$$

Проверим достаточные условия того, что на элементе $u^*(t;\varphi(x))$ достигается максимум в (44):

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left[\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\Bigg((Ax+Bu+C)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\delta S\big(t,\varphi(\cdot)\big)}{\delta\varphi(x)}\right]+\frac{D^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\delta S\big(t,\varphi(\cdot)\big)}{\delta\varphi(x)}\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(Rx^2+Qu^2\right)\Bigg)dx\right]=-Q\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)dx=-Q<0.$$

Будем искать решение уравнения (42) с краевым условием (43) в виде

$$S\big(t,\varphi(x)\big)=\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{1}{2}\xi(t)x^2+\eta(t)x+\zeta(t)\right]\varphi(x)dx+\frac{1}{2}\chi(t)\left[\int_{\mathbb{R}}x\varphi(x)dx\right]^2,\quad(45)$$

где $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ и $\chi(t)$ — неизвестные дифференцируемые функции.

Применяя правила вычисления вариационных производных [1], находим

$$\frac{\partial S\big(t,\varphi(x)\big)}{\partial t}=\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{1}{2}\dot\xi(t)x^2+\dot\eta(t)x+\dot\zeta(t)\right]\varphi(x)dx+\frac{1}{2}\dot\chi(t)\left[\int_{\mathbb{R}}x\varphi(x)dx\right]^2,$$

$$\frac{\delta S\big(t,\varphi(\cdot)\big)}{\delta\varphi(x)}=\frac{1}{2}\xi(t)x^2+\eta(t)x+\zeta(t)+\chi(t)x\int_{\mathbb{R}}x\varphi(x)dx,\qquad(46)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\delta S\big(t,\varphi(\cdot)\big)}{\delta\varphi(x)}\right]=\xi(t)x+\eta(t)+\chi(t)\int_{\mathbb{R}}x\varphi(x)dx,\quad\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\delta S\big(t,\varphi(\cdot)\big)}{\delta\varphi(x)}\right]=\xi(t).$$

Подставим выражения (46) в (42) с учетом обозначений для моментов

$$M_1=\int_{\mathbb{R}}x\varphi(x)dx,\quad M_2=\int_{\mathbb{R}}x^2\varphi(x)dx$$

и структуры оптимальной синтезирующей функции

$$u^*\big(t;\varphi(x)\big)=\frac{B}{Q}\left(\big[\xi(t)+\chi(t)\big]\int_{\mathbb{R}}x\varphi(x)dx+\eta(t)\right)=$$
$$=\frac{B}{Q}\big(\big[\xi(t)+\chi(t)\big]M_1+\eta(t)\big),\quad(47)$$

тогда

$$\frac{1}{2}\,\dot{\xi}(t)\,M_2 + \dot{\eta}(t)\,M_1 + \dot{\zeta}(t) + \frac{1}{2}\,\dot{\chi}(t)\,M_1^2 + \\ + A\bigl(\xi(t)M_2 + \eta(t)M_1 + \chi(t)M_1^2\bigr) + \frac{1}{2}\,\frac{B^2}{Q}\Bigl(\bigl[\xi(t)+\chi(t)\bigr]M_1 + \eta(t)\Bigr)^2 + \\ + C\Bigl(\bigl[\xi(t)+\chi(t)\bigr]M_1 + \eta(t)\Bigr) + \frac{1}{2}\,D^2\xi(t) - \frac{1}{2}\,RM_2 = 0, \quad (48)$$

$$\frac{1}{2}\,\xi(1)\,M_2 + \eta(1)\,M_1 + \zeta(1) + \frac{1}{2}\chi(1)\,M_1^2 + \frac{1}{2}V M_2 = 0. \quad (49)$$

Соотношения (42) и (43) должны выполняться при любых $\varphi(x) \in \mathfrak{F}_{\mathrm{norm}}$, поэтому соотношения (48) и (49) должны выполняться при любых $M_1 \in \mathbb{R}$ и $M_2 \geqslant 0$, при этом все перечисленные соотношения останутся такими же, если считать, что в (39) и (40) вместо констант $A$, $B$, $C$, $D$, а также $R \geqslant 0$, $Q > 0$ и $V \geqslant 0$ используются соответствующие функции переменной $t$. Далее приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $M_1$ и $M_2$ в левой и правой частях соотношений (48) и (49):

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}(t) + 2A\xi(t) - R = 0, \quad \xi(1) = -V; \\ &\dot{\eta}(t) + A\eta(t) + \frac{B^2}{Q}\bigl[\xi(t)+\chi(t)\bigr]\bigl(\eta(t)+C\bigr) = 0, \quad \eta(1) = 0; \\ &2\dot{\zeta}(t) + \frac{B^2}{Q}\,\eta^2(t) + 2C\eta(t) + D^2\xi(t) = 0, \quad \zeta(1) = 0; \\ &\dot{\chi}(t) + 2A\chi(t) + \frac{B^2}{Q}\bigl[\xi(t)+\chi(t)\bigr]^2 = 0, \quad \chi(1) = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Таким образом, для получения оптимальной синтезирующей функции требуется найти решение задачи Коши (50), затем подставить найденные функции $\xi(t)$, $\eta(t)$ и $\chi(t)$ в формулу (47).

Первое уравнение системы (50) является линейным и независимым от других, его решение при $A \neq 0$ имеет вид

$$\xi(t) = \frac{1}{2A}\bigl(R - \gamma \mathrm{e}^{2A(1-t)}\bigr), \quad \gamma = R + 2AV.$$

Второе и четвертое уравнение системы (50) требуется решать совместно, причем последнее — это уравнение Риккати при $B \neq 0$ [22].

Упростим задачу и рассмотрим частный случай $C = 0$. Тогда второе уравнение имеет тривиальное решение $\eta(t) = 0$ (линейное однородное уравнение с нулевым условием). Решение оставшейся части системы можно записать следующим образом:

$$\zeta(t) = \frac{D^2}{8A^2}\big(\gamma(1 - \mathrm{e}^{2A(1-t)}) + 2AR(1-t)\big),$$
$$\chi(t) = \frac{1}{\vartheta}\left(\frac{\mu \mathrm{e}^{\mu(1-t)}}{\frac{\mu/2+A-\vartheta V}{\mu/2-A+\vartheta V} + \mathrm{e}^{\mu(1-t)}} + A + \frac{\vartheta}{2A}\,(R - \gamma \mathrm{e}^{2A(1-t)}) - \frac{\mu}{2}\right),$$
$$\mu = 2\sqrt{A^2 + \vartheta R}, \quad \vartheta = \frac{B^2}{Q}.$$

При $A = 0$ нужно рассмотреть два варианта: $R = 0$ и $R \neq 0$. Ограничимся первым из них, т.е. $A = R = 0$. Тогда

$$\xi(t) = -V, \quad \eta(t) = 0, \quad \zeta(t) = \frac{D^2 V}{2}\,(t-1), \quad \chi(t) = V\,\frac{t-1}{t-1-1/(\vartheta V)}.$$

Например (см. [19, 21]), при $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 1$, $R = 0$, $Q = 1$ и $V = 1$ имеем

$$\xi(t) = -1, \quad \eta(t) = 0, \quad \zeta(t) = \frac{t-1}{2}, \quad \chi(t) = \frac{t-1}{t-2}$$

и

$$S\big(t, \varphi(x)\big) = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} x^2 \varphi(x)dx + \frac{t-1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{t-1}{t-2}\left[\int_{\mathbb{R}} x\varphi(x)dx\right]^2,$$
$$u^*\big(t; \varphi(x)\big) = \frac{1}{t-2}\int_{\mathbb{R}} x\varphi(x)dx.$$

**Пример 2** Найти соотношения для оптимального программного управления $u^*(t)$ стохастической системой из примера 1.

*Первый способ.* Воспользуемся результатом, полученным в примере 1, а именно выражением (47) для оптимальной синтезирующей функции. Она порождает оптимальное программное управление при заданной начальной плотности вероятности $\varphi_0(x)$: $U^*(t) = u^*(t) = u^*(t; \varphi^*(t,x))$, причем достаточно первого момента (математического ожидания):

$$M_1(t) = \int_{\mathbb{R}} x\varphi(t,x)x = \mathrm{E}X(t),$$

для которого справедливо дифференциальное уравнение

$$\dot{M}_1(t) = AM_1(t) + Bu(t) + C, \quad M_1(0) = M_{10} = \mathrm{E}X_0.$$

Подставим в последнее уравнение вместо $u(t)$ структуру оптимального управления

$$u^*(t) = \frac{B}{Q}\big(\big[\xi(t)+\chi(t)\big]M_1^*(t)+\eta(t)\big),$$

тогда

$$\dot{M}_1^*(t) = AM_1^*(t) + \frac{B^2}{Q}\big(\big[\xi(t)+\chi(t)\big]M_1^*(t)+\eta(t)\big) + C, \quad M_1^*(0) = M_{10}. \quad (51)$$

Искомое оптимальное управление $u^*(t)$ можно найти для заданной начальной плотности вероятности $\varphi_0(x)$ и, следовательно, для заданной величины $M_{10}$, решив задачу Коши (51).

Для того чтобы подсчитать минимум функционала качества (40), требуется найти второй начальный момент

$$M_2(t) = \int_{\mathbb{R}} x^2\varphi(t,x)x = \mathrm{E}X^2(t),$$

дифференциальное уравнение для которого имеет вид

$$\dot{M}_2(t) = 2\big(AM_2(t) + \big(Bu(t)+C\big)M_1(t)\big) + D^2, \quad M_2(0) = M_{20} = \mathrm{E}X_0^2.$$

Тогда

$$\dot{M}_2^*(t) = 2\Bigg(AM_2^*(t) + \left[\frac{B^2}{Q}\big(\big[\xi(t)+\chi(t)\big]M_1^*(t)+\eta(t)\big)+C\right]M_1^*(t)\Bigg) + D^2,$$
$$M_2^*(0) = M_{20}, \quad (52)$$

и

$$\min J = \frac{1}{2}\int_0^1\int_{\mathbb{R}}\big(Rx^2 + Q\big[u^*(t)\big]^2\big)\varphi^*(t,x)\,dt\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} Vx^2\varphi^*(1,x)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left[RM_2^*(t) + \frac{B^2}{Q}\big(\big[\xi(t)+\chi(t)\big]M_1^*(t)+\eta(t)\big)^2\right]dt + \frac{1}{2}VM_2^*(1).$$

Кроме того, минимум функционала качества (40) можно найти по формуле (13), в которую следует подставить функцию $S(t,\varphi(x))$ из примера 1, т.е.

$$\min J = -\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{1}{2}\xi(0)x^2 + \eta(0)x + \zeta(0)\right]\varphi_0(x)dx - \frac{1}{2}\chi(0)\left[\int_{\mathbb{R}} x\varphi_0(x)dx\right]^2 =$$
$$= -\left[\frac{1}{2}\xi(0)M_{20} + \eta(0)M_{10} + \zeta(0) + \frac{1}{2}\chi(0)M_{10}^2\right].$$

Зададим, как и в примере 1, значения параметров: $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 1$, $R = 0$, $Q = 1$ и $V = 1$. Тогда решение задачи Коши (51) записывается в форме

$$M_1^*(t) = \frac{M_{10}}{2}\,(2 - t).$$

В результате при заданных числовых параметрах находим оптимальное программное управление $u^*(t)$ стохастической системой, модель которой задается уравнением (39), а функционал качества — соотношением (40):

$$u^*(t) = \frac{1}{t-2}\,M_1^*(t) = -\frac{M_{10}}{2} = \text{const}.$$

Решение задачи Коши (52) имеет вид

$$M_2^*(t) = M_{20} + (M_{10}^2 + 1)t - \frac{M_{10}^3}{4}\,t^2.$$

Приведенные выше формулы для минимального значения функционала качества (40) дают один и тот же результат, а именно

$$\min J = \frac{1}{2}\biggl(1 - \frac{1}{2}\,M_{10}^2 + M_{20}\biggr).$$

*Второй способ*. Поскольку функционал качества (40) является линейным относительно плотности вероятности $\varphi(t,x)$, найдем оптимальное программное управление $u^*(t)$, применяя соотношения (31) и (32) с учетом (34).

Запишем соотношение (32) для рассматриваемой задачи:

$$\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t} = -\bigl(Ax + Bu^*(t) + C\bigr)\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x} - \frac{D^2}{2}\,\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2} + \\ + \frac{1}{2}\bigl(Rx^2 + Q\bigl[u^*(t)\bigr]^2\bigr), \quad \psi(t_1,x) = -\frac{1}{2}\,Vx^2, \quad (53)$$

а также структуру оптимального программного управления:

$$u^*(t) = \arg\max_{u\in\mathbb{R}}\biggl\{\int_{\mathbb{R}}\biggl[(Ax + Bu + C)\,\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x} + \frac{D^2}{2}\,\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2} - \\ - \frac{1}{2}\,(Rx^2 + Qu^2)\biggr]\varphi^*(t,x)dx\biggr\}. \quad (54)$$

Ограничения на управление отсутствуют, поэтому применим в (54) необходимые условия экстремума [17]:

$$\frac{\partial}{\partial u}\biggl[\int_{\mathbb{R}}\biggl((Ax + Bu + C)\,\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x} + \frac{D^2}{2}\,\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2} -$$

$$-\frac{1}{2}\left(Rx^2+Qu^2\right)\Bigg)\varphi^*(t,x)dx\Bigg]=0,$$

или

$$B\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x}\,\varphi^*(t,x)dx-Qu\int_{\mathbb{R}}\varphi^*(t,x)dx=0.$$

Интеграл во втором слагаемом равен единице, так как $\varphi^*(t,x)$ — плотность вероятности. Таким образом,

$$u^*(t)=\frac{B}{Q}\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x}\,\varphi^*(t,x)dx.$$

Достаточные условия того, что на элементе $u^*(t)$ достигается максимум в (54), здесь выполняются, как и в примере 1, поскольку

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\Bigg[\int_{\mathbb{R}}\Bigg((Ax+Bu+C)\,\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x}+\frac{D^2}{2}\,\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2}-$$

$$-\frac{1}{2}\left(Rx^2+Qu^2\right)\Bigg)\varphi^*(t,x)dx\Bigg]=-Q\int_{\mathbb{R}}\varphi^*(t,x)dx=-Q<0.$$

Будем искать решение уравнения (53) в виде

$$\psi(t,x)=\frac{1}{2}\,\xi(t)x^2+\eta(t)x+\zeta(t), \tag{55}$$

где $\xi(t)$, $\eta(t)$ и $\zeta(t)$ — неизвестные дифференцируемые функции. Тогда

$$\begin{gathered}\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t}=\frac{1}{2}\,\dot\xi(t)x^2+\dot\eta(t)x+\dot\zeta(t),\\ \frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x}=\xi(t)x+\eta(t),\quad \frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2}=\xi(t)\end{gathered} \tag{56}$$

и

$$u^*(t)=\frac{B}{Q}\int_{\mathbb{R}}\big(\xi(t)x+\eta(t)\big)\varphi^*(t,x)dx=\frac{B}{Q}\big(\xi(t)M_1^*(t)+\eta(t)\big). \tag{57}$$

Подставим выражения (56) и (57) в (53):

$$\frac{1}{2}\,\dot\xi(t)x^2+\dot\eta(t)x+\dot\zeta(t)=-\left[Ax+\frac{B^2}{Q}\big(\xi(t)M_1^*(t)+\eta(t)\big)+C\right]\big(\xi(t)x+\eta(t)\big)-$$

$$-\frac{D^2}{2}\,\xi(t)+\frac{1}{2}\left(Rx^2+\frac{B^2}{Q}\big[\xi(t)M_1^*(t)+\eta(t)\big]^2\right),$$

$$\frac{1}{2}\,\xi(1)x^2+\eta(1)x+\zeta(1)=-\frac{1}{2}\,Vx^2,$$

и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной $x$ в левой и правой частях полученных соотношений:

$$\begin{gathered}
\dot{\xi}(t) + 2A\xi(t) - R = 0, \quad \xi(1) = -V; \\
\dot{\eta}(t) + A\eta(t) + \left[\frac{B^2}{Q}\big(\xi(t)M_1^*(t) + \eta(t)\big) + C\right]\xi(t) = 0, \quad \eta(1) = 0; \\
2\dot{\zeta}(t) - \frac{B^2}{Q}\big(\xi^2(t)\left[M_1^*(t)\right]^2 - \eta^2(t)\big) + 2C\eta(t) + D^2\xi(t) = 0, \quad \zeta(1) = 0.
\end{gathered} \tag{58}$$

Кроме того, запишем дифференциальное уравнение для математического ожидания $M_1^*(t)$, применяя тот же подход, что и при записи уравнения (51), но используя выражение (57):

$$\dot{M}_1^*(t) = AM_1^*(t) + \frac{B^2}{Q}\big(\xi(t)M_1^*(t) + \eta(t)\big) + C, \quad M_1^*(0) = M_{10}. \tag{59}$$

Следовательно, для нахождения оптимального программного управления $u^*(t)$ требуется найти решение двухточечной краевой задачи (59) и (58), затем подставить найденные функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ в соотношение (57).

Первое уравнение системы (58) является линейным и независимым от других, его решение было найдено в примере 1. Второе уравнение системы (58) требуется решать совместно с (59), после чего получить решение третьего уравнения системы (58) в квадратурах не составляет труда [22].

Опять зададим значения параметров (см. [21]): $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 1$, $R = 0$, $Q = 1$ и $V = 1$, и найдем решение двухточечной краевой задачи (59) и (58):

$$\begin{gathered}
M_1^*(t) = \frac{M_{10}}{2}\,(2 - t), \quad \xi(t) = -1, \quad \eta(t) = \frac{M_{10}}{2}\,(1 - t), \\
\zeta(t) = -M_{10}^2\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8}\,t + \frac{1}{8}\,t^2\right) - \frac{1}{2}\,(1 - t)
\end{gathered}$$

и

$$\psi(t, x) = -\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{M_{10}}{2}\,(1 - t)x + M_{10}^2\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8}\,t + \frac{1}{8}\,t^2\right) - \frac{1}{2}\,(1 - t).$$

В результате при заданных числовых параметрах находим оптимальное программное управление $u^*(t)$ стохастической системой, модель которой задается уравнением (39), а функционал качества — соотношением (40):

$$u^*(t) = \xi(t)M_1^*(t) + \eta(t) = -\frac{M_{10}}{2} = \text{const},$$

оно совпадает с управлением, которое было найдено с помощью оптимальной синтезирующей функции.

Минимум функционала качества (40) можно найти по формуле (33), в которую следует подставить функцию $\psi(t,x)$ с учетом найденных функций $\xi(t)$, $\eta(t)$ и $\zeta(t)$:

$$\min J = -\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2}\,\xi(0)x^2 + \eta(0)x + \zeta(0)\right]\varphi_0(x)dx =$$
$$= -\left[\frac{1}{2}\,\xi(0)M_{20} + \eta(0)M_{10} + \zeta(0)\right] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\,M_{10}^2 + M_{20}\right).$$

Здесь вместо пары $d_0^* = (\varphi^*(t,x), u^*(t))$ найдена пара $(M_1^*(t), u^*(t))$, поскольку информация о математическом ожидании $M_1^*(t)$ оказалась достаточной. Плотность вероятности $\varphi^*(t,x)$ может быть получена как решение уравнения (41) при $u(t) = u^*(t)$. Если случайная величина $X_0$ имеет нормальное распределение, то $\varphi^*(t,x)$ — гауссовская плотность, определяемая математическим ожиданием $M_1^*(t)$ и дисперсией $D^*(t) = M_2^*(t) - [M_1^*(t)]^2$.

При оптимальном программном управлении уравнение стохастической системы (39) записывается следующим образом:

$$dX(t) = -\frac{M_{10}}{2}\,dt + dW(t), \quad X(0) = X_0,$$

его аналитическое решение несложно найти:

$$X(t) = X_0 - \frac{M_{10}}{2}\,t + W(t).$$

Тогда с учетом определения стандартного винеровского процесса имеем

$$\min J = \mathrm{E}\left[\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{M_{10}^2}{4}\,dt + \frac{1}{2}\left(X_0 - \frac{M_{10}}{2} + W(1)\right)^2\right] =$$
$$= \frac{M_{10}^2}{8} + \mathrm{E}\left[\frac{1}{2}\left(X_0^2 + \frac{M_{10}^2}{4} + W^2(1) - X_0M_{10} + 2X_0W(1) - M_{10}W(1)\right)\right] =$$
$$= \frac{M_{10}^2}{8} + \frac{M_{20}}{2} + \frac{M_{10}^2}{8} + \frac{1}{2} - \frac{M_{10}^2}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\,M_{10}^2 + M_{20}\right).$$

**Пример 3** Найти соотношения для оптимального управления с обратной связью $u^*(t,x)$ для стохастической системы из примера 1.

В этом примере, в отличие от предыдущего, при управлении используется информация о состоянии $x$, поэтому $m = 1$ и функционал качества следует переписать следующим образом:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \big(Rx^2 + Qu^2(t,x)\big)\varphi(t,x)dtdx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} Vx^2\varphi(1,x)dx =$$
$$= \mathrm{E}\left[\frac{1}{2}\int_0^1 \big(RX^2(t) + QU^2\big(t,X(t)\big)\big)dt + \frac{1}{2}VX^2(1)\right], \quad (60)$$

т.е. $U^*(t) = u^*(t, X(t))$.

Поскольку функционал качества (60) является линейным относительно функции $\varphi(t,x)$, найдем оптимальное управление $u^*(t,x)$, применяя соотношение (32) с учетом (35):

$$\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t} = -\big(Ax + Bu^*(t,x) + C\big)\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x} - \frac{D^2}{2}\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2} +$$
$$+\frac{1}{2}\Big(Rx^2 + Q\big[u^*(t,x)\big]^2\Big), \quad \psi(t_1,x) = -\frac{1}{2}Vx^2, \quad (61)$$

где

$$u^*(t,x) = \arg\max_{u\in\mathbb{R}}\left\{(Ax + Bu + C)\,\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x} + \frac{D^2}{2}\,\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2} -\right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\,(Rx^2 + Qu^2)\right\}. \quad (62)$$

Соотношения (61) и (62) можно также записать в виде уравнения Беллмана (36):

$$\max_{u\in\mathbb{R}}\left\{\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t} + (Ax + Bu + C)\,\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x} + \frac{D^2}{2}\,\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2} -\right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\,(Rx^2 + Qu^2) = 0\right\}, \quad \psi(t_1,x) = -\frac{1}{2}Vx^2.$$

Ограничения на управление отсутствуют, поэтому, как и ранее в примерах 1 и 2, применим в (62) необходимые условия экстремума и проверим выполнение достаточных условий [17]:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[(Ax + Bu + C)\,\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x} + \frac{D^2}{2}\,\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\,(Rx^2 + Qu^2)\right] = 0,$$

т.е.

$$B\,\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x} - Qu = 0 \quad \text{и} \quad u^*(t,x) = \frac{B}{Q}\,\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x}.$$

Достаточные условия того, что на элементе $u^*(t,x)$ достигается максимум в (62), выполнены:

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left[(Ax+Bu+C)\,\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x}+\frac{D^2}{2}\,\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\,(Rx^2+Qu^2)\right]=-Q<0.$$

Будем искать решение уравнения (61) в виде (55). Тогда остаются справедливыми формулы (56), следовательно,

$$u^*(t,x)=\frac{B}{Q}\big(\xi(t)x+\eta(t)\big). \tag{63}$$

Подставим выражения (56) и (63) в (61):

$$\frac{1}{2}\,\dot{\xi}(t)x^2+\dot{\eta}(t)x+\dot{\zeta}(t)=-\left[Ax+\frac{B^2}{Q}\big(\xi(t)x+\eta(t)\big)+C\right]\big(\xi(t)x+\eta(t)\big)-\\
-\frac{D^2}{2}\,\xi(t)+\frac{1}{2}\left[Rx^2+\frac{B^2}{Q}\big(\xi(t)x+\eta(t)\big)^2\right], \tag{64}$$

$$\frac{1}{2}\,\xi(1)x^2+\eta(1)x+\zeta(1)=-\frac{1}{2}\,Vx^2, \tag{65}$$

и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной $x$ в левой и правой частях полученных соотношений:

$$\begin{aligned}
&\dot{\xi}(t)+2A\xi(t)+\frac{B^2}{Q}\,\xi^2(t)-R=0,\quad \xi(1)=-V;\\
&\dot{\eta}(t)+A\eta(t)+\frac{B^2}{Q}\,\eta(t)\xi(t)+C\xi(t)=0,\quad \eta(1)=0;\\
&2\dot{\zeta}(t)+\frac{B^2}{Q}\,\eta^2(t)+2C\eta(t)+D^2\xi(t)=0,\quad \zeta(1)=0.
\end{aligned} \tag{66}$$

Таким образом, для нахождения оптимального управления с обратной связью $u^*(t,x)$ требуется получить решение задачи Коши (66), затем подставить найденные функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ в соотношение (63).

Первое уравнение системы (66) является уравнением Риккати, а при $A=R=0$ — уравнением с разделяющимися переменными [22], оно не зависит от других уравнений. Второе уравнение системы (66) — линейное, оно имеет нулевое решение при $C=0$. Решение третьего уравнения системы (66) можно получить в квадратурах при найденных функциях $\xi(t)$ и $\eta(t)$, это уравнение не отличается от уравнения для функции $\zeta(t)$ в системе (50).

Зададим значения параметров так же, как и в примерах 1 и 2: $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 1$, $R = 0$, $Q = 1$ и $V = 1$, и найдем решение задачи Коши (66):

$$\xi(t) = \frac{1}{t-2}, \quad \eta(t) = 0, \quad \zeta(t) = -\frac{\ln(2-t)}{2},$$

т.е.

$$\psi(t,x) = \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{t-2} - \frac{\ln(2-t)}{2}.$$

Следовательно, при заданных числовых параметрах получаем оптимальное управление с обратной связью $u^*(t,x)$ для стохастической системы, модель которой задается уравнением (39), а функционал качества — соотношением (60):

$$u^*(t,x) = \frac{x}{t-2}.$$

Минимум функционала качества (60) можно найти по формуле (33), в которую следует подставить функцию $\psi(t,x)$ с учетом найденных функций $\xi(t)$, $\eta(t)$ и $\zeta(t)$:

$$\min J = -\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2}\,\xi(0)x^2 + \eta(0)x + \zeta(0)\right]\varphi_0(x)dx =$$

$$= -\left[\frac{1}{2}\,\xi(0)M_{20} + \eta(0)M_{10} + \zeta(0)\right] = \frac{1}{4}\,M_{20} + \frac{\ln 2}{2},$$

где $M_{10}$ и $M_{20}$ — начальные значения для моментов, которые были введены в примере 2.

Для моментов $M_1(t)$ и $M_2(t)$ — математического ожидания и второго начального момента — нужно решить дифференциальные уравнения (для нахождения оптимального управления они не требуются, но с их помощью можно подсчитать минимальное значение функционала качества (60) другим способом):

$$\begin{aligned} &\dot{M}_1^*(t) = \left[A + \frac{B^2}{Q}\,\xi(t)\right]M_1^*(t) + \frac{B^2}{Q}\,\eta(t) + C, \quad M_1^*(0) = M_{10}; \\ &\dot{M}_2^*(t) = 2\left[A + \frac{B^2}{Q}\,\xi(t)\right]M_2^*(t) + 2\left[\frac{B^2}{Q}\,\eta(t) + C\right]M_1^*(t) + D^2, \quad M_2^*(0) = M_{20}. \end{aligned} \tag{67}$$

По моментам $M_1^*(t)$ и $M_2^*(t)$ можно вычислить минимум функционала качества (60), не применяя формулу (33):

$$\min J = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \left(Rx^2 + Q\left[u^*(t,x)\right]^2\right)\varphi^*(t,x)dtdx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} Vx^2\varphi^*(1,x)dx =$$

$$
= \frac{1}{2} \int_0^1 \Big[ R M_2^*(t) + \frac{B^2}{Q} \big( \xi^2(t) M_2^*(t) + 2\eta(t)\xi(t) M_1^*(t) + \eta^2(t) \big) dt + \frac{1}{2} V M_2^*(1).
$$

При заданных числовых параметрах решение задачи Коши (67) записывается следующим образом:

$$
M_1^*(t) = \frac{M_{10}}{2}(2-t), \quad M_2^*(t) = M_{20} + (1 - M_{20})t + \frac{1}{4}\left( M_{20} - \frac{1}{2} \right) t^2,
$$

и в результате интегрирования получаем такое же значение минимального значения функционала качества (40):

$$
\min J = \frac{1}{4} M_{20} + \frac{\ln 2}{2}.
$$

Найденное оптимальное управление $u^*(t,x)$ минимизирует функционал качества (60) при любой начальной плотности вероятности $\varphi_0(x)$, следовательно, и при любых $M_{10} \in \mathbb{R}$ и $M_{20} \geqslant 0$. Разность

$$
\frac{1}{2}\left( 1 - \frac{1}{2} M_{10}^2 + M_{20} \right) - \left( \frac{1}{4} M_{20} + \frac{\ln 2}{2} \right) = \frac{1 - \ln 2}{2} + \frac{1}{4}(M_{20} - M_{10}^2)
$$

положительна, так как $M_{20} \geqslant M_{10}^2$, т.е. оптимальное управление с обратной связью $u^*(t,x)$ обеспечивает меньшее значение функционала качества, чем оптимальное программное управление $u^*(t)$, найденное в примере 2.

При найденном оптимальном управлении уравнение стохастической системы (39) записывается в виде

$$
dX(t) = \frac{X(t)}{t-2} dt + dW(t), \quad X(0) = X_0,
$$

а его решение выражается формулой

$$
X(t) = (2-t)\frac{X_0}{2} + (2-t)\int_0^t \frac{dW(\tau)}{2-\tau},
$$

в которой последнее слагаемое называется броуновским мостом [15] — гауссовским случайным процессом, принимающим нулевое значение на концах отрезка $[0,2]$. Этот процесс имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию, равную $t(2-t)/2$, которая достигает максимального значения в середине отрезка $[0,2]$, т.е. на правом конце промежутка времени функционирования стохастической системы (39).

Оптимальное управление на траектории записывается форме

$$
U^*(t) = u^*\big(t, X(t)\big) = -\frac{X_0}{2} - \int_0^t \frac{dW(\tau)}{2-\tau},
$$

следовательно, с учетом свойств интегралов, понимаемых в среднеквадратическом смысле [15], получаем

$$
\begin{aligned}
\min J = \mathrm{E}\bigg[\frac{1}{2}\int_0^1 \left(-\frac{X_0}{2} - \int_0^t \frac{dW(\tau)}{2-\tau}\right)^2 dt + \frac{1}{2}\bigg(\frac{X_0}{2} + \int_0^1 \frac{dW(\tau)}{2-\tau}\bigg)^2\bigg] = \\
= \mathrm{E}\bigg[\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{X_0^2}{4} + X_0\int_0^t \frac{dW(\tau)}{2-\tau} + \left[\int_0^t \frac{dW(\tau)}{2-\tau}\right]^2\right) dt + \\
+ \frac{1}{2}\bigg(\frac{X_0^2}{4} + X_0\int_0^1 \frac{dW(\tau)}{2-\tau} + \left[\int_0^1 \frac{dW(\tau)}{2-\tau}\right]^2\bigg)\bigg] = \\
= \frac{M_{10}^2}{8} - \frac{1}{4} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{M_{10}^2}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}M_{10}^2 + \frac{\ln 2}{2}.
\end{aligned}
$$

**Пример 4** Найти соотношения для $\varepsilon$-оптимальной синтезирующей функции $u^\varepsilon(t;\varphi(x))$ для стохастической системы из примера 1.

В примере 1 были найдены соотношения для нахождения оптимальной синтезирующей функции $u^*(t;\varphi(x))$. Это структура оптимальной синтезирующей функции (44) и система дифференциальных уравнений (50) для функций, определяющих функцию $S(t,\varphi(x))$ согласно (45).

Запишем соотношения (27) и (28) для рассматриваемой задачи:

$$
\begin{aligned}
\bigg|\frac{\partial S\big(t,\varphi(x)\big)}{\partial t} + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\bigg[\Big(Ax + Bu^*\big(t;\varphi(x)\big) + C\Big)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\delta S\big(t,\varphi(\cdot)\big)}{\delta\varphi(x)}\right] + \\
+ \frac{D^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\delta S\big(t,\varphi(\cdot)\big)}{\delta\varphi(x)}\right] - \frac{1}{2}\Big(Rx^2 + Q\big[u^*\big(t;\varphi(x)\big)\big]^2\Big)\bigg]dx\bigg| \leqslant \varepsilon_1(t),
\end{aligned}
$$

$$
\left|S\big(t_1,\varphi(x)\big) + \frac{1}{2}V\int_{\mathbb{R}} x^2\varphi(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon_2.
$$

Структуру $\varepsilon$-оптимальной синтезирующей функции $u^\varepsilon(t;\varphi(x))$ определим на основе оптимальной синтезирующей функции (44):

$$
\begin{aligned}
u^\varepsilon\big(t;\varphi(x)\big) = \arg\max_{u\in\mathbb{R}}\bigg\{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\bigg[(Ax + Bu + C)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\delta S\big(t,\varphi(\cdot)\big)}{\delta\varphi(x)}\right] + \\
+ \frac{D^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\delta S\big(t,\varphi(\cdot)\big)}{\delta\varphi(x)}\right] - \frac{1}{2}(Rx^2 + Qu^2)\bigg]dx\bigg\},
\end{aligned}
$$

и зададим функцию $S(t,\varphi(x))$ в виде (45), т.е. остаются справедливыми соотношения (46)–(50).

Найдем приближенное решение задачи Коши (50) с помощью метода степенных рядов, ограничившись линейным приближением:

$$\xi(t) = -V + (R + 2AV)(t-1), \quad \eta(t) = \frac{B^2}{Q}\, CV(t-1),$$
$$\zeta(t) = \frac{1}{2}\, D^2 V(t-1), \quad \chi(t) = -\frac{B^2}{Q}\, V^2(t-1),$$

или с учетом обозначений из примера 1:

$$\xi(t) = -V + \gamma(t-1), \quad \eta(t) = \vartheta CV(t-1),$$
$$\zeta(t) = \frac{1}{2}\, D^2 V(t-1), \quad \chi(t) = -\vartheta V^2(t-1).$$

Далее подставим найденные функции $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ и $\chi(t)$ в левую часть уравнения (48):

$$\begin{aligned} &A\gamma(t-1)M_2 + \\ &\quad + \big(\vartheta C(AV - 2\vartheta V^2 + \gamma)(t-1) + \vartheta^2 CV(\gamma - \vartheta V^2)(t-1)^2\big)M_1 + \\ &\quad\quad + \frac{1}{2}\,(2\vartheta C^2 V + D^2\gamma)(t-1) + \frac{\vartheta^3 C^2 V^2}{2}\,(t-1)^2 + \\ &\quad + \left(-\vartheta V(AV - \vartheta V^2 + \gamma)(t-1) + \frac{\vartheta}{2}\,(\gamma - \vartheta V^2)^2(t-1)^2\right)M_1^2, \end{aligned} \tag{68}$$

ограничим моменты: $|M_1| < C_1$, $M_2 < C_2$, и оценим полученное выражение:

$$\begin{aligned} &\Bigg|A\gamma(t-1)M_2 + \Big(\vartheta C(AV - 2\vartheta V^2 + \gamma)(t-1) + \vartheta^2 CV(\gamma - \vartheta V^2)(t-1)^2\Big)M_1 + \\ &\quad + \frac{2\vartheta C^2 V + D^2\gamma}{2}\,(t-1) + \frac{\vartheta^3 C^2 V^2}{2}\,(t-1)^2 + \\ &\quad + \left(-\vartheta V(AV - \vartheta V^2 + \gamma)(t-1) + \frac{\vartheta(\gamma - \vartheta V^2)^2}{2}\,(t-1)^2\right)M_1^2\Bigg| \leqslant \\ &\leqslant \Bigg(|A\gamma|C_2 + \vartheta^2|C|V^2 C_1 + \vartheta|AV - \vartheta V^2 + \gamma|(|C|C_1 + VC_1^2) + \\ &\quad + \frac{|2\vartheta C^2 V + D^2\gamma|}{2}\Bigg)|t-1| + \\ &\quad + \left(\vartheta|\gamma - \vartheta V^2|\left[\vartheta|C|VC_1 + \frac{C_1^2}{2}\right] + \frac{\vartheta^3 C^2 V^2}{2}\right)(t-1)^2 = \varepsilon_1(t). \end{aligned}$$

При применении метода степенных рядов соотношение (43) справедливо при любых $\varphi(x) \in \mathfrak{F}_{\mathrm{norm}}$, поэтому $\varepsilon_2 = 0$. Таким образом, $\varepsilon$-оптимальная синтезирующая функция задается в виде

$$u^\varepsilon\bigl(t;\varphi(x)\bigr) = \\ = \frac{B}{Q}\biggl(\bigl[-V+(\gamma-\vartheta V^2)(t-1)\bigr]\int_{\mathbb{R}} x\varphi(x)dx + \vartheta CV(t-1)\biggr), \quad (69)$$

она обеспечивает приближенное решение задачи оптимального управления при отклонении значения функционала качества от минимального значения на величину, не превышающую

$$\varepsilon = \int_{t_0}^{t_1} \varepsilon_1(t)dt + \varepsilon_2 = \\ = \frac{1}{2}\biggl(|A\gamma|C_2 + \vartheta^2|C|V^2C_1 + \vartheta|AV-\vartheta V^2+\gamma|(|C|C_1+VC_1^2) + \\ + \frac{|2\vartheta C^2V+D^2\gamma|}{2}\biggr) + \frac{1}{3}\biggl(\vartheta|\gamma-\vartheta V^2|\biggl[\vartheta|C|VC_1+\frac{C_1^2}{2}\biggr] + \frac{\vartheta^3C^2V^2}{2}\biggr)$$

при любых $\varphi(x) \in \mathfrak{F}_{\mathrm{norm}}$, удовлетворяющих условиям

$$\left|\int_{\mathbb{R}} x\varphi(x)dx\right| \leqslant C_1, \quad \int_{\mathbb{R}} x^2\varphi(x)dx \leqslant C_2.$$

При $A=0$, $B=1$, $C=0$, $D=1$, $R=0$, $Q=1$ и $V=1$ (см. пример 1) имеем

$$\xi(t) = -1, \quad \eta(t) = 0, \quad \zeta(t) = \frac{t-1}{2}, \quad \chi(t) = 1-t$$

и

$$u^\varepsilon\bigl(t;\varphi(x)\bigr) = -t\int_{\mathbb{R}} x\varphi(x)dx, \quad \varepsilon = \frac{2}{3}C_1^2.$$

Отметим, что при заданных числовых параметрах модели величина $\varepsilon$ не зависит от $C_2$, т.е. в этом случае нет явных ограничений на момент $M_2$.

Применяя такой же подход, можно получить квадратичное приближение к решению системы (50). Соответствующие формулы слишком громоздки, поэтому ограничимся частным случаем $A=0$, $B=1$, $C=0$, $D=1$, $R=0$, $Q=1$, $V=1$ и получим $\chi(t) = -(t-1)-(t-1)^2$ (функции $\xi(t)$, $\eta(t)$ и $\zeta(t)$ не меняются, они найдены точно). Тогда

$$u^\varepsilon\bigl(t;\varphi(x)\bigr) = \bigl[-t-(t-1)^2\bigr]\int_{\mathbb{R}} x\varphi(x)dx, \quad \varepsilon = \frac{17}{20}C_1^2.$$

При приближении полиномом третьей степени $\chi(t) = 1 - t - (t-1)^2 - (t-1)^3$ и

$$u^\varepsilon\big(t;\varphi(x)\big) = \big[-t-(t-1)^2-(t-1)^3\big]\int_{\mathbb{R}} x\varphi(x)dx, \quad \varepsilon = \frac{109}{105}C_1^2$$

и т.д.

Нетрудно видеть, что коэффициенты в $\varepsilon$-оптимальной синтезирующей функции $-t$, $-t-(t-1)^2$ и $-t-(t-1)^2-(t-1)^3$ — это частичные суммы ряда Тейлора функции $\xi(t)+\chi(t) = 1/(t-2)$, которая задает оптимальную синтезирующую функцию $u^*(t;\varphi(x))$ в примере 1.

**Пример 5** Найти соотношения для $\varepsilon$-оптимального программного управления $u^\varepsilon(t)$ стохастической системой из примера 1.

Воспользуемся результатом, полученным в примере 4, ограничившись одной из $\varepsilon$-оптимальных синтезирующих функций, которая была найдена на основе приближенного решения задачи Коши (50) с помощью метода степенных рядов (линейное приближение). Эта $\varepsilon$-оптимальная синтезирующая функция задается соотношением (69). Она порождает $\varepsilon$-оптимальное программное управление при заданной начальной плотности вероятности $\varphi_0(x)$: $u^\varepsilon(t) = u^\varepsilon(t;\varphi^\varepsilon(t,x))$, используя информацию о математическом ожидании $M_1(t)$, дифференциальное уравнение для которого было записано в примере 2.

Подставим вместо $u(t)$ в это уравнение структуру $\varepsilon$-оптимального управления

$$u^\varepsilon(t) = \frac{B}{Q}\Big(\big[-V+(\gamma-\vartheta V^2)(t-1)\big]M_1^\varepsilon(t) + \vartheta CV(t-1)\Big),$$

тогда

$$\dot{M}_1^\varepsilon(t) = AM_1^\varepsilon(t) + \vartheta\Big(\big[-V+(\gamma-\vartheta V^2)(t-1)\big]M_1^\varepsilon(t) + \\ + \vartheta CV(t-1)\Big) + C, \quad M_1^\varepsilon(0) = M_{10}; \quad M_1^\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} x\varphi^\varepsilon(t,x)dx. \quad (70)$$

Искомое $\varepsilon$-оптимальное программное управление $u^\varepsilon(t)$ можно найти для заданной начальной плотности вероятности $\varphi_0(x)$ и, следовательно, для заданной величины $M_{10}$, решив задачу Коши (70). Применяя другие $\varepsilon$-оптимальные синтезирующие функции (из примера 4 или какие-либо другие), можно получить различные $\varepsilon$-оптимальные управления.

Также можно записать дифференциальное уравнение для второго начального момента $M_2(t)$:

$$\dot{M}_2^\varepsilon(t) = 2\Big(AM_2^\varepsilon(t) +$$
$$+ \Big[\vartheta\Big(\big[-V + (\gamma - \vartheta V^2)(t-1)\big]M_1^\varepsilon(t) + \vartheta CV(t-1)\Big) + C\Big]M_1^\varepsilon(t)\Big) + D^2,$$
$$M_2^\varepsilon(0) = M_{20}; \quad M_2^\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} x^2\varphi^\varepsilon(t,x)dx, \quad (71)$$

который нужен для подсчета значения функционала качества (40), а именно

$$J^\varepsilon = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[RM_2^\varepsilon(t) + \vartheta\Big(\big[-V + (\gamma - \vartheta V^2)(t-1)\big]M_1^\varepsilon(t) +$$
$$+ \vartheta CV(t-1)\Big)^2\Big]dt + \frac{V}{2}\,M_2^\varepsilon(t_1).$$

Зададим, как и в примерах 1 и 4, значения параметров: $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 1$, $R = 0$, $Q = 1$ и $V = 1$. Тогда решение уравнений (70) и (71) записывается в форме

$$M_1^\varepsilon(t) = M_{10}\mathrm{e}^{-t^2/2}, \quad M_2^\varepsilon(t) = M_{20} + t + M_{10}^2(\mathrm{e}^{-t^2} - 1).$$

В результате при заданных числовых параметрах находим $\varepsilon$-оптимальное программное управление $u^\varepsilon(t)$ стохастической системой, модель которой задается уравнением (39), а функционал качества — соотношением (40):

$$u^\varepsilon(t) = -tM_1^\varepsilon(t) = -M_{10}t\mathrm{e}^{-t^2/2}.$$

Функционал качества для найденного $\varepsilon$-оптимального управления $u^\varepsilon(t)$ принимает значение

$$J^\varepsilon = \frac{1}{2}\left(1 + \left[\frac{1}{2\mathrm{e}} + \frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\,1}{4} - 1\right]M_{10}^2 + M_{20}\right),$$

где $\mathrm{erf}\,t$ — функция ошибок. Это значение отличается от минимального значения функционала качества, найденного в примере 2, на величину

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}} - 1\right) + \frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\,1}{4}\right]M_{10}^2,$$

или приближенно $0.028676M_{10}^2$. Отметим, что в примере 4 была получена оценка $\varepsilon = \frac{2}{3}\,C_1^2$ для отклонения значения функционала качества от минимального при заданных числовых параметрах при выполнении условий

$|M_1| \leqslant C_1$ и $|M_1^\varepsilon(t)| \leqslant |M_{10}|$, т.е. $C_1 = |M_{10}|$. Следовательно,

$$J^\varepsilon - \min J = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}} - 1\right) + \frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\,1}{4}\right] C_1^2 < \frac{2}{3}\,C_1^2.$$

Однако такая оценка слишком грубая, поэтому получим более точную оценку. Запишем результат подстановки числовых параметров $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 1$, $R = 0$, $Q = 1$ и $V = 1$ в выражение (68) (см. пример 4):

$$\left(t - 1 + \frac{1}{2}\,(t-1)^2\right) M_1^2,$$

далее подставим математическое ожидание $M_1^\varepsilon(t) = M_{10}\mathrm{e}^{-t^2/2}$ вместо $M_1$ и проинтегрируем модуль полученного выражения, т.е. функцию $\varepsilon_1(t)$:

$$\varepsilon_1(t) = M_{10}^2 \left| t - 1 + \frac{1}{2}\,(t-1)^2 \right| \mathrm{e}^{-t^2},$$

тогда

$$\varepsilon = M_{10}^2 \int_0^1 \left| t - 1 + \frac{1}{2}\,(t-1)^2 \right| \mathrm{e}^{-t^2} dt = \frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\,1}{2} + \frac{1}{\mathrm{e}}\right] M_{10}^2,$$

или приближенно $0.278676 M_{10}^2$, $J^\varepsilon - \min J \approx 0.028676 M_{10}^2 < \varepsilon$.

Отметим, что в этой задаче вместо пары $d_0^\varepsilon = (\varphi^\varepsilon(t,x), u^\varepsilon(t))$ найдена пара $(M_1^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t))$, поскольку информация о математическом ожидании $M_1^\varepsilon(t)$ оказалась достаточной (см. также пример 2).

**Пример 6** Найти соотношения для $\varepsilon$-оптимального управления с обратной связью $u^\varepsilon(t,x)$ для стохастической системы из примера 1.

В примере 3 были найдены соотношения для нахождения оптимального управления с обратной связью $u^*(t,x)$ для стохастической системы из примера 1, а именно структура оптимального управления (62) и система дифференциальных уравнений (66), решение которой определяет функцию $\psi(t,x)$ согласно (55) и минимальное значение функционала качества (60).

Запишем соотношения (37) и (38) для рассматриваемой задачи:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \frac{\partial \psi(t,x)}{\partial t} + \big(Ax + Bu^\varepsilon(t,x) + C\big) \frac{\partial \psi(t,x)}{\partial x} + \frac{D^2}{2}\,\frac{\partial^2 \psi(t,x)}{\partial x^2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{2}\left(Rx^2 + Q\big[u^\varepsilon(t,x)\big]^2\right) \right] \varphi^\varepsilon(t,x)dx \right| \leqslant \varepsilon_1(t), \quad (72)$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \psi(t_1,x) + \frac{1}{2}\,Vx^2 \right] \varphi^\varepsilon(t_1,x)dx \right| \leqslant \varepsilon_2. \quad (73)$$

Структуру $\varepsilon$-оптимального управления с обратной связью $u^\varepsilon(t,x)$ определим на основе структуры оптимального управления (62):

$$u^\varepsilon(t,x) = \arg\max_{u\in\mathbb{R}}\left\{(Ax+Bu+C)\,\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x} + \frac{D^2}{2}\,\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\,(Rx^2+Qu^2)\right\},$$

и зададим функцию $\psi(t,x)$ в виде (55), т.е. остаются справедливыми соотношения (56), (63)–(66), в частности

$$u^\varepsilon(t,x) = \frac{B}{Q}\big(\xi(t)x+\eta(t)\big).$$

Найдем приближенное решение задачи Коши (66) с помощью метода степенных рядов, ограничившись линейным приближением:

$$\xi(t) = -V + \left(R + 2AV - \frac{B^2V^2}{Q}\right)(t-1), \quad \eta(t) = CV(t-1),$$
$$\zeta(t) = \frac{1}{2}\,D^2V(t-1),$$

или с учетом обозначений из примера 1:

$$\xi(t) = -V + (\gamma - \vartheta V^2)(t-1), \quad \eta(t) = CV(t-1), \quad \zeta(t) = \frac{1}{2}\,D^2V(t-1).$$

Далее подставим найденные функции $\xi(t)$, $\eta(t)$ и $\zeta(t)$ в выражение под знаком модуля в левую часть неравенства (72):

$$\left((\gamma-\vartheta V^2)(A-\vartheta V)(t-1) + \frac{\vartheta(\gamma-\vartheta V^2)^2}{2}\,(t-1)^2\right)M_2^\varepsilon(t) +$$
$$+ \big(C(AV - 2\vartheta V^2 + \gamma)(t-1) + \vartheta CV(\gamma-\vartheta V^2)(t-1)^2\big)M_1^\varepsilon(t) +$$
$$+ \frac{2C^2V + (\gamma-\vartheta V^2)D^2}{2}\,(t-1) + \frac{\vartheta C^2V^2}{2}\,(t-1)^2, \quad (74)$$

где моменты $M_1^\varepsilon(t)$ и $M_2^\varepsilon(t)$ определены в примере 5 (см. соотношения (70) и (71)). Ограничим моменты: $|M_1^\varepsilon(t)| < C_1$, $M_2^\varepsilon(t) < C_2$, и оценим полученное выражение:

$$\left|(\gamma-\vartheta V^2)(A-\vartheta V)(t-1) + \frac{\vartheta(\gamma-\vartheta V^2)^2}{2}\,(t-1)^2\right)M_2^\varepsilon(t) +$$
$$+ \big(C(AV - 2\vartheta V^2 + \gamma)(t-1) + \vartheta CV(\gamma-\vartheta V^2)(t-1)^2\big)M_1^\varepsilon(t) +$$

$$+\frac{2C^2V+(\gamma-\vartheta V^2)D^2}{2}(t-1)+\frac{\vartheta C^2V^2}{2}(t-1)^2\Bigg|\leqslant$$
$$\leqslant\Bigg(|(\gamma-\vartheta V^2)(A-\vartheta V)|C_2+|C(AV-2\vartheta V^2+\gamma)|C_1+$$
$$+\frac{2C^2V+|\gamma-\vartheta V^2|D^2}{2}\Bigg)|t-1|+\Bigg(\frac{|\vartheta(\gamma-\vartheta V^2)^2|}{2}C_2+$$
$$+|\vartheta CV(\gamma-\vartheta V^2)|C_1+\frac{|\vartheta|C^2V^2}{2}\Bigg)(t-1)^2=\varepsilon_1(t).$$

При применении метода степенных рядов соотношение (65) справедливо при любых $\varphi^\varepsilon(t,x)$, поэтому $\varepsilon_2=0$. Таким образом, $\varepsilon$-оптимальное управление с обратной связью имеет вид

$$u^\varepsilon(t,x)=\frac{B}{Q}\Big(\big(-V+(\gamma-\vartheta V^2)(t-1)\big)x+CV(t-1)\Big),$$

оно обеспечивает приближенное решение задачи оптимального управления при отклонении значения функционала качества от минимального значения на величину, не превышающую

$$\varepsilon=\int_{t_0}^{t_1}\varepsilon_1(t)dt+\varepsilon_2=\frac{1}{2}\Bigg(|(\gamma-\vartheta V^2)(A-\vartheta V)|C_2+$$
$$+|C(AV-2\vartheta V^2+\gamma)|C_1+\frac{2C^2V+|\gamma-\vartheta V^2|D^2}{2}\Bigg)+$$
$$+\frac{1}{3}\Bigg(\frac{|\vartheta(\gamma-\vartheta V^2)^2|}{2}C_2+|\vartheta CV(\gamma-\vartheta V^2)|C_1+\frac{|\vartheta|C^2V^2}{2}\Bigg)$$

при условии, что

$$\left|\int_{\mathbb{R}}x\varphi^\varepsilon(t,x)dx\right|\leqslant C_1,\quad \int_{\mathbb{R}}x^2\varphi^\varepsilon(t,x)dx\leqslant C_2.$$

Если $A=0$, $B=1$, $C=0$, $D=1$, $R=0$, $Q=1$ и $V=1$ (см. пример 1), то

$$\xi(t)=-t,\quad \eta(t)=0,\quad \zeta(t)=\frac{t-1}{2}$$

и

$$u^\varepsilon(t,x)=-tx,\quad \varepsilon=\frac{2}{3}C_2+\frac{1}{4}.$$

При заданных числовых параметрах модели величина $\varepsilon$ не зависит от $C_1$, однако $M_2^\varepsilon(t)\geqslant[M_1^\varepsilon(t)]^2$, т.е. момент $M_1^\varepsilon(t)$ также ограничен.

Применяя такой же подход можно получить квадратичное приближение к решению системы (66). Не будем приводить решение для общего случая, а ограничимся частным случаем $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 1$, $R = 0$, $Q = 1$, $V = 1$. Тогда

$$\xi(t) = -t - (t-1)^2, \quad \eta(t) = 0, \quad \zeta(t) = \frac{1}{2}(t-1) + \frac{1}{4}(t-1)^2$$

и

$$u^\varepsilon(t,x) = \left[-t - (t-1)^2\right]x, \quad \varepsilon = \frac{17}{20}C_2 + \frac{1}{6}.$$

При приближении полиномами третьей степени

$$\xi(t) = -t - (t-1)^2 - (t-1)^3, \quad \eta(t) = 0,$$
$$\zeta(t) = \frac{1}{2}(t-1) + \frac{1}{4}(t-1)^2 + \frac{1}{6}(t-1)^3$$

и

$$u^\varepsilon(t,x) = \left[-t - (t-1)^2 - (t-1)^3\right]x, \quad \varepsilon = \frac{109}{105}C_2 + \frac{1}{8}$$

и т.д.

Покажем, что найденные оценки можно улучшить. Зададим начальное состояние $X_0 = 1$, т.е. $M_{10} = M_{20} = 1$, улучшим оценку $\varepsilon$, а также подсчитаем значение функционала качества (60) методом статистического моделирования. Для этого подставим числовые параметры $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 1$, $R = 0$, $Q = 1$ и $V = 1$ в соотношение (74), тогда получим

$$\varepsilon_1(t) = \left|\left(M_2^\varepsilon(t) - \frac{1}{2}\right)(t-1) + \frac{1}{2}M_2^\varepsilon(t)(t-1)^2\right|,$$

и оценим второй начальный момент $M_2^\varepsilon(t)$, моделируя $10^6$ траекторий случайного процесса $X(t)$ согласно уравнению (39) и заданному начальному состоянию $X_0$ (при моделировании применялся метод Хьюна [36] с шагом численного интегрирования $h = 0.01$):

$$dX(t) = -tX(t)dt + dW(t), \quad X(0) = 1.$$

В результате приближенно найдем функцию $\varepsilon_1(t)$, интеграл от которой и равен $\varepsilon$. Вычисляя этот интеграл численно методом трапеций, находим $\varepsilon \approx 0.130$.

Оценка значения функционала качества: $J^\varepsilon \approx 0.627$, т.е. оценка математического ожидания случайной величины

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \big[U^\varepsilon(t)\big]^2 dt + \frac{1}{2}\,X^2(1) = \frac{1}{2}\int_0^1 \big[u^\varepsilon\big(t, X(t)\big)\big]^2 dt + \frac{1}{2}\,X^2(1),$$

при этом минимальное значение функционала качества равно

$$\min J = \frac{1}{4}\,M_{20} + \frac{\ln 2}{2} \approx 0.597 \quad \text{и} \quad J^\varepsilon - \min J \approx 0.031 < \varepsilon.$$

Применяя такой же подход, для квадратичного приближения к решению задачи Коши (66) имеем

$$u^\varepsilon(t,x) = \big[-t-(t-1)^2\big]x,$$
$$\varepsilon_1(t) = \left|\left(\frac{3}{2}\,M_2^\varepsilon(t) - \frac{1}{2}\right)(t-1)^2 + \left[(t-1)^3 + \frac{1}{2}\,(t-1)^4\right]M_2^\varepsilon(t)\right|.$$

Оценим второй начальный момент $M_2^\varepsilon(t)$ при таком же начальном состоянии $X_0$ и выборе численного метода решения стохастического дифференциального уравнения

$$dX(t) = \big[-t-(t-1)^2\big]X(t)dt + dW(t), \quad X(0) = 1.$$

Тогда $\varepsilon \approx 0.135$, $J^\varepsilon \approx 0.616$ и $J^\varepsilon - \min J \approx 0.019 < \varepsilon$.

При приближении полиномами третьей степени к решению задачи Коши (66) получаем

$$u^\varepsilon(t,x) = \big[-t-(t-1)^2-(t-1)^3\big]x,$$
$$\varepsilon_1(t) = \left|\left(2M_2^\varepsilon(t) - \frac{1}{2}\right)(t-1)^3 + \left[\frac{3}{2}\,(t-1)^4 + (t-1)^5 + \frac{1}{2}\,(t-1)^6\right]M_2^\varepsilon(t)\right|.$$

Также оценим второй начальный момент $M_2^\varepsilon(t)$, моделируя траектории случайного процесса $X(t)$ согласно уравнению

$$dX(t) = \big[-t-(t-1)^2-(t-1)^3\big]X(t)dt + dW(t), \quad X(0) = 1.$$

Тогда $\varepsilon \approx 0.196$, $J^\varepsilon \approx 0.611$ и $J^\varepsilon - \min J \approx 0.015 < \varepsilon$.

Здесь, как и в примере 4, коэффициенты в $\varepsilon$-оптимальном управлении $-t$, $-t-(t-1)^2$ и $-t-(t-1)^2-(t-1)^3$ — это частичные суммы ряда Тейлора функции $\xi(t) = 1/(t-2)$, которая задает оптимальное управление $u^*(t,x)$ в примере 3.

### Заключение

В работе приведена методика решения задач оптимального управления стохастическими системами при неполной информации о векторе состояния. Приведены примеры нахождения оптимального управления и $\varepsilon$-оптимального управления для линейной стохастической системы с квадратичным по состоянию функционалом качества, в которых последовательно показаны этапы применения методики решения задач оптимального управления. Найдены оптимальная синтезирующая функция, оптимальное программное управление и оптимальное управление с обратной связью, а при приближенном решении получены $\varepsilon$-оптимальные синтезирующие функции, $\varepsilon$-оптимальное программное управление и $\varepsilon$-оптимальные управления с обратной связью.

## Список литературы


[1] *Авербух В.И.*, *Смолянов О.Г.* Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах // Успехи математических наук. — 1967. Т. XXII. Вып. 6 (138). — С. 201–260.

[2] *Авербух В.И.*, *Смолянов О.Г.* Различные определения производной в линейных топологических пространствах // Успехи математических наук. — 1968. Т. XXIII. Вып. 4 (142). — С. 67–116.

[3] *Аверина Т.А.* Численные методы. Алгоритмы моделирования систем со случайной структурой. — М.: Изд-во Юрайт, 2018.

[4] *Беллман Р.* Динамическое программирование. — М.: ИИЛ, 1960.

[5] *Богачев В.И.*, *Крылов Н.В.*, *Рекнер М.*, *Шапошников С.В.* Уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова. — М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013.

[6] *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. — М.: Наука, 1997.

[7] *Кротов В.Ф.* Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума // Автоматика и телемеханика. — 1962. Т. 23. № 12. — С. 1571–1583; 1963. Т. 24. № 5. — С. 581–598.

[8] *Кротов В.Ф.*, *Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973.

[9] *Кротов В.Ф.*, *Лагоша Б.А.*, *Лобанов С.М.*, *Данилина Н.И.*, *Сергеев С.И.* Основы теории оптимального управления. — М.: Высшая школа, 1990.

[10] *Крылов Н.В.* Управляемые процессы диффузионного типа. — М.: Наука, 1977.

[11] *Крылов Н.В.*, *Розовский Б.Л.* Об условных распределениях диффузионных процессов // Изв. АН СССР. Серия математическая. — 1978. Т. 42. № 2. — С. 356–378.

[12] *Кузнецов Д.Ф.* К численному моделированию многомерных динамических систем при случайных возмущениях с порядками сильной сходимости 1.5 и 2.0 // Автоматика и телемеханика. — 2018. № 7. — С. 80–98.

[13] *Кузнецов Д.Ф.* К численному моделированию многомерных динамических систем при случайных возмущениях с порядком сильной сходимости 2.5 // Автоматика и телемеханика. — 2019. № 5. — С. 99–117.

[14] *Леваков А.А.* Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений. — Минск: БГУ, 2010.

[15] *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. — М.: Мир, 2003.

[16] *Пантелеев А.В.* Достаточные условия оптимальности управления непрерывными стохастическими системами по неполному вектору состояния // Изв. вузов. Математика. — 1990. № 11. — С. 50–61.

[17] *Пантелеев А.В.*, *Летова Т.А.* Методы оптимизации в примерах и задачах. — СПб.: Лань, 2008.

[18] *Пантелеев А.В.*, *Рыбаков К.А.* Синтез оптимальных нелинейных стохастических систем управления спектральным методом // Информатика и ее применения. — 2011. Т. 5. Вып. 2. — С. 69–81.

[19] *Пантелеев А.В.*, *Рыбаков К.А.* Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации. — М.: Изд-во МАИ, 2012.

[20] *Пантелеев А.В.*, *Рыбаков К.А.* Приближенный синтез оптимальных непрерывных стохастических систем управления с неполной обратной связью // Автоматика и телемеханика. — 2018. № 1. — С. 130–146.

[21] *Пантелеев А.В.*, *Семенов В.В.* Синтез оптимальных систем управления при неполной информации. — М.: Изд-во МАИ, 1992.

[22] *Пантелеев А.В.*, *Якимова А.С.*, *Рыбаков К.А.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практикум. — М.: Инфра-М, 2016.

[23] *Плотников М.Ю.*, *Хрусталев М.М.* Условия глобальной оптимальности стратегий управления диффузионными процессами с возможностью об-

рыва траекторий при неполной информации о состоянии // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2005. № 1. — С. 40–47.

[24] *Понтрягин Л.С.*, *Болтянский В.Г.*, *Гамкрелидзе Р.В.*, *Мищенко М.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1983.

[25] *Румянцев Д.С.*, *Хрусталев М.М.* Оптимальное управление квазилинейными системами диффузионного типа при неполной информации о состоянии // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2006. № 5. — С. 43–51.

[26] *Румянцев Д.С.*, *Хрусталев М.М.*, *Царьков К.А.* Алгоритм поиска субоптимальных стратегий управления квазилинейными динамическими стохастическими системами диффузионного типа // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2014. № 1. — С. 74–86.

[27] *Рыбаков К.А.* Достаточные условия оптимальности в задаче централизованного управления стохастическими мультиструктурными системами // Вестник МАИ. — 2008. Т. 15. № 2. — С. 123–131.

[28] *Рыбаков К.А.* Достаточные условия оптимальности в задаче управления системами диффузионно-скачкообразного типа // XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014). Москва, 16–19 июня 2014 г.: Тр. — М.: ИПУ РАН, 2014. — С. 734–744.

[29] *Рыбаков К.А.* Оптимальное управление стохастическими системами со случайным периодом квантования // Труды МФТИ. — 2015. Т. 7. № 1 (25). — С. 145–165.

[30] *Рыбаков К.А.*, *Сотскова И.Л.* Оптимальное управление нелинейными системами со случайной структурой при неполной информации о векторе состояния // Автоматика и телемеханика. — 2006. № 7. — С. 62–75.

[31] *Савастюк С.В.*, *Хрусталев М.М.* Оптимизация стохастических систем диффузионного типа с ограничениями на процесс управления-наблюдения // Автоматика и телемеханика. — 1991. № 7. — С. 89–96; № 8. — С. 94–100.

[32] *Флеминг У.*, *Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. — М.: Мир, 1978.

[33] *Хрусталев М.М.* Условия равновесия по Нэшу в стохастических дифференциальных играх при неполной информированности игроков о состоянии // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1995. № 6. — С. 194–208; 1996. № 1. — С. 72–79.

[34] *Хрусталев М.М.*, *Халина А.С.* Синтез оптимальных регуляторов линейных стохастических систем при неполной информации о состоянии. Необходимые условия и численные методы // Автоматика и телемеханика. — 2014. № 11. — С. 70–87.

[35] *Эллиотт Р.* Стохастический анализ и его приложения. — М.: Мир, 1986.

[36] *Burrage K.*, *Burrage P.M.*, *Tian T.* Numerical methods for strong solutions of stochastic differential equations: an overview // Proc. R. Soc. Lond. A. — 2004. V. 460. No. 2041. — P. 373–402.

[37] *Fleming W.H.* Optimal Control of Partially Observable Diffusions // SIAM J. Control. — 1968. V. 6. No. 2. — P. 194–214.

[38] *Fleming W.H.*, *Soner H.M.* Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. — Springer, 2006.

[39] *Kloeden P.E.*, *Platen E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. — Springer, 1995.

[40] *Stroock D.W.*, *Varadhan S.R.S.* Multidimensional Diffusion Processes. — Springer, 2006.