ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2011
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Оптимальное управление

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО МАКСИМИНУ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫМИ ТОЧКАМИ [1]

Ю.В. ШАПАРЬ

Россия, 620990, Екатеринбург, С. Ковалевской, 16,
Институт математики и механики УрО РАН,
e-mail: shaparuv@mail.ru

Аннотация

Рассматривая задачу управления при ослаблении системы ограничений, мы часто сталкиваемся со скачкообразным изменением достигаемого качества. Данное качество может определяться в виде экстремума, области достижимости или некоторого аналога данной области. В работе рассматривается игровой вариант конкретной задачи с ограничениями асимптотического характера, возникающими при ослаблении стандартных моментных ограничений. Исследуется асимптотика значений максимина при ослаблении моментных ограничений и вопросы устойчивости по результату.

1 Содержательная постановка задачи

Рассмотрим один конкретный пример постановки задачи [1],[2]: ниже исследуем задачу об игровом взаимодействии двух материальных точек с огра-

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №09-01-00436-а) и программы Президиума РАН "Математическая теория управления".

ничениями, включающими импульсную и моментную составляющие. Ограничения последнего типа допускают (см. общий случай в [1],[2]) ослабление, что потенциально может приводить к скачкообразному изменению качества. В [1],[2] и в настоящей работе используется подход, последовательно развиваемый в [3],[4],[5] и связанный с построением множеств притяжения. В [1],[2] получены достаточные условия устойчивости по максимину. В рассматриваемом примере эти условия нарушены, а требуемая устойчивость имеет место при заданном наборе параметров. Изменяя этот набор, мы можем, однако, получить задачу, в которой нет упомянутой устойчивости.

Итак, рассмотрим материальные точки

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = a(t)u(t), \quad \dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = b(t)v(t) \tag{1}$$

на единичном промежутке времени $[0,1]$; полагаем, что $y_1(0) = y_2(0) = z_1(0) = z_2(0) = 0$; $y_1(1) = y^0$, $z_1(1) = z^0$. Здесь y^0, z^0 — фиксированные константы. Программные управления $u = u(\cdot)$ и $v = v(\cdot)$ полагаем определенными на «стрелке» $[0,1[$, кусочно-постоянными, непрерывными справа вещественнозначными функциями. Ограничения на u и v включают моментную и импульсную компоненты:

$$\int_0^1 (1-t)a(t)u(t)\,dt = y^0, \quad \int_0^1 (1-t)b(t)v(t)\,dt = z^0; \tag{2}$$

кроме того,

$$\int_0^1 |u(t)|\,dt \leqslant c_U, \quad \int_0^1 |v(t)|\,dt \leqslant c_V,$$

где c_U и c_V — фиксированные положительные константы. Таким образом, речь идет об управлениях с ограничениями на энергоресурс. Функции $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ допускают равномерное приближение кусочно-постоянными и непрерывными справа. Рассмотрим области достижимости $G_\partial^{(1)}$, $G_\partial^{(2)}$ системы (1) по скоростной координате (то есть по y_2 и z_2) в последний момент времени $t = 1$ при ослаблении ограничений:

$$y_1(1) \approx y^0, \quad z_1(1) \approx z^0.$$

Интересен вопрос о том, как будет меняться область достижимости по отношению к $G_\partial^{(1)}$ и $G_\partial^{(2)}$ при «малых» возмущениях комплекса условий и будут ли соответствующие изменения области достижимости также «малыми»? В последнем случае можно говорить об устойчивости.

К вопросу об устойчивости.

Введем в рассмотрение функционал

$$\Phi(u,v) = f_0\left(\int_0^1 a(t)u(t)\,dt,\ \int_0^1 b(t)v(t)\,dt\right) \to \sup_{v\in\mathcal{V}}\inf_{u\in\mathcal{U}},$$

где $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$— множества допустимых управлений, определяемых ограничениями задачи. Здесь полагаем, что функция f_0 определена и непрерывна на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Пусть $\mathbb{F}$— множество всех кусочно-постоянных, непрерывных справа вещественнозначных функций на промежутке $[0,1[$. Полагаем далее, что $y^0 = z^0 = 0$. Положим при этом, что

$$\mathbb{F}_\partial^{(1)} \triangleq \left\{u\in\mathbb{F} \mid \left(\int_0^1 |u(t)|\,dt \leqslant c_U\right)\ \&\left(\int_0^1 (1-t)a(t)u(t)\,dt = 0\right)\right\},$$

$$\mathbb{F}_\partial^{(2)} \triangleq \left\{v\in\mathbb{F} \mid \left(\int_0^1 |v(t)|\,dt \leqslant c_V\right)\ \&\left(\int_0^1 (1-t)b(t)v(t)\,dt = 0\right)\right\}$$

суть непустые (так как содержат нулевые управления) множества допустимых управлений в задаче с нулевым краевым условием. Тогда

$$G_\partial^{(1)} \triangleq \left\{\int_0^1 a(t)u(t)\,dt : u\in\mathbb{F}_\partial^{(1)}\right\},$$

$$G_\partial^{(2)} \triangleq \left\{\int_0^1 b(t)v(t)\,dt : v\in\mathbb{F}_\partial^{(2)}\right\}$$

— области достижимости (по скорости) в момент времени $t=1$. Введем при $\varepsilon\in]0,\infty[$ и $\delta\in]0,\infty[$ следующие множества:

$$\mathbb{F}_{\partial,1}^{(\varepsilon)} \triangleq \left\{u\in\mathbb{F} : \left|\int_0^1 (1-t)a(t)u(t)\,dt\right| < \varepsilon\right\}, \tag{3}$$

$$\mathbb{F}_{\partial,2}^{(\delta)} \triangleq \left\{v\in\mathbb{F} : \left|\int_0^1 (1-t)b(t)v(t)\,dt\right| < \delta\right\}; \tag{4}$$

далее будем рассматривать области достижимости (по скорости) при ослаблении краевого условия на координату (для обобщенной задачи).

$$G_{\partial,1}^{(\varepsilon)} \triangleq \left\{\int_0^1 a(t)u(t)\,dt : u\in\mathbb{F}_{\partial,1}^{(\varepsilon)}\right\},$$

$$G_{\partial,2}^{(\delta)} \triangleq \left\{\int_0^1 b(t)v(t)\,dt : v\in\mathbb{F}_{\partial,2}^{(\delta)}\right\}.$$

Пусть (согласно построениям [4, с.42])

$$AS_1 \triangleq \bigcap_{\varepsilon \in]0,\infty[} \overline{G^{(\varepsilon)}_{\partial,1}}, \quad AS_2 \triangleq \bigcap_{\delta \in]0,\infty[} \overline{G^{(\delta)}_{\partial,2}}$$

суть множества притяжения, играющие каждое роль асимптотического аналога соответствующих областей достижимости (в силу ограниченности и замкнутости данные множества являются компактами). Отметим, что множества (3), (4) непусты при всяких $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$. Поэтому определены следующие реализуемые значения максимина [6]:

$$\mathfrak{V}(\varepsilon,\delta) = \sup_{z \in G^{(\delta)}_{\partial,2}} \inf_{y \in G^{(\varepsilon)}_{\partial,1}} f_0(y,z) \in \mathbb{R} \ \forall\, \varepsilon \in]0,\infty[\ \forall\, \delta \in]0,\infty[.$$

В [1],[2], [7] установлено существование числа $\mathbb{V} \in \mathbb{R}$, для которого справедливо следующее свойство:

$$\forall\, æ \in]0,\infty[\ \exists\, \zeta \in]0,\infty[: |\mathfrak{V}(\varepsilon,\delta) - \mathbb{V}| < æ \ \forall\, \varepsilon \in]0,\zeta[\ \forall\, \delta \in]0,\zeta[; \tag{5}$$

более того, как показано в [1], [2], $\mathbb{V}$ является максимином в игровой задаче на произведении пространств обобщенных элементов, формализуемых в подходящем классе конечно-аддитивных мер, удовлетворяющих «точным» моментным ограничениям. Кроме того (см. [1], [2]), $AS_1 \neq \varnothing$, $AS_2 \neq \varnothing$, и при этом [6]

$$\mathbb{V} \triangleq \max_{z \in AS_2} \min_{y \in AS_1} f_0(y,z)$$

(напомним, что в обозначениях [1] $AS_1 = \mathbb{G}^{(1)}_U$ и $AS_2 = \mathbb{G}^{(2)}_V$).

Пусть далее $a(t) \equiv 1, \ b(t) \equiv 1$. Тогда (см. [8, (56)]) имеем равенства

$$\left(AS_1 = \overline{G^{(1)}_{\partial}}\right) \ \& \left(AS_2 = \overline{G^{(2)}_{\partial}}\right). \tag{6}$$

Поскольку множества AS_1 и AS_2 непусты, то, как уже отмечалось, $G^{(1)}_{\partial} \neq \varnothing, G^{(2)}_{\partial} \neq \varnothing$ и $\mathbb{F}^{(1)}_{\partial} \neq \varnothing, \ \mathbb{F}^{(2)}_{\partial} \neq \varnothing$. Определяем с учетом этого «обычный» максимин

$$\mathbf{val} \triangleq \sup_{v \in \mathbb{F}^{(2)}_{\partial}} \inf_{u \in \mathbb{F}^{(1)}_{\partial}} f_0\left(\int_0^1 u(t)\,dt, \int_0^1 v(t)\,dt\right) = \sup_{z \in G^{(2)}_{\partial}} \inf_{y \in G^{(1)}_{\partial}} f_0(y,z) \in \mathbb{R}.$$

Утверждение 1 *Справедливо равенство* $\mathbf{val} = \mathbb{V}$, *то есть максимин в классе обобщенных управлений [1], [2] равен максимину в классе обычных управлений:*

$$\mathbb{V} = \max_{z \in AS_2} \min_{y \in AS_1} f_0(y,z) = \sup_{z \in G^{(2)}_{\partial}} \inf_{y \in G^{(1)}_{\partial}} f_0(y,z). \tag{7}$$

Справедливость равенства (7) следует из (6) и свойства непрерывности функции f_0. С учетом Утверждения 1 имеем устойчивость по максимину и, таким образом, справедливо

Утверждение 2 *Имеет место устойчивость по максимину:*

$$\forall æ \in]0,\infty[\ \exists \zeta \in]0,\infty[: |\mathfrak{V}(\varepsilon,\delta) - \mathbf{val}| < æ\ \forall \varepsilon \in]0,\zeta[\ \forall \delta \in]0,\zeta[. \qquad (8)$$

Доказательство получаем комбинацией (5) и Утверждения 1. Заметим, что в [1],[2] факты, сформулированные в Утверждениях 1 и 2, были установлены при дополнительном условии ступенчатости функций, роль которых в рассматриваемой задаче играет функция:

$$t \mapsto 1 - t : [0,1[\to \mathbb{R}.$$

Здесь, как видно из последних двух соотношений, упомянутое условие ступенчатости нарушено, а факт, подобный теореме 1 и следствию 1 работы [1], справедлив (см. Утверждения 1, 2). Заметим, однако, что полученное здесь свойство (аналог устойчивости) справедливо при краевом (по смыслу) условии (2) с нулевыми правыми частями. Если же заменить (2) условиями

$$\int_0^1 (1-t)u(t)\,dt = c_U,\ \int_0^1 (1-t)v(t)\,dt = c_V \qquad (9)$$

(достаточно заменить в (2) одно из условий на соответствующее ему в (9)), то упомянутые положения об устойчивости не будут справедливы (при этом, кстати, будет нарушено условие совместности системы ограничений одного из игроков). Таким образом, комбинируя конструкции [1],[2],[8], удается построить пример устойчивой по максимину игровой задачи импульсного программного управления с краевыми условиями, в которой не выполняется общее достаточное условие устойчивости [1],[2], хотя вариация краевых условий может привести к «неустойчивости» ситуации.

2 Вопрос об устойчивости в классе неотрицательных управлений.

В настоящем разделе приводятся построения [8, Раздел 2], адаптированные для целей последующего применения расширения игровой задачи на максимин. Ниже будем считать, что $a(t) \equiv 1$ и $b(t) \equiv 1$. Аналогично рассуждениям, приведенным в предыдущем разделе, введем в рассмотрение следующие множества. Множества допустимых управлений:

$$\mathbb{F}^{(1)} \triangleq \left\{ u \in \mathbb{F}_+ \mid \int_0^1 u(t)dt \leqslant c_U \right\}; \quad \mathbb{F}^{(2)} \triangleq \left\{ v \in \mathbb{F}_+ \mid \int_0^1 v(t)dt \leqslant c_V \right\}, \quad (10)$$

где $\mathbb{F}_+$ — множество всех кусочно-постоянных, непрерывных справа неотрицательных вещественнозначных функций на промежутке $[0,1[$. Пусть $0 < c_U \leqslant c_V$. Имеем тогда очевидное вложение $\mathbb{F}^{(1)} \subset \mathbb{F}^{(2)}$. Рассмотрим также множества допустимых управлений с моментными ограничениями, положив при этом $y^0 = z^0 = a$, где $a \geqslant 0$. Наличие здесь общего краевого условия можно интерпретировать как обязательное условие встречи материальных точек (по координате), причем точка встречи задается, а вопрос о соотношении скоростей в момент встречи будет рассмотрен далее. Упомянутая точка встречи назначается директивно, что позволяет игрокам раздельно решать вопрос о допустимости соответствующих программных управлений (если бы точка встречи не была заданной, то пришлось бы обсуждать вопрос о соблюдении краевого условия в игровой задаче с зависимыми программными стратегиями). Полагаем

$$\mathbb{F}^{(1)}_{\partial}[a] \triangleq \left\{ u \in \mathbb{F}^{(1)} \mid \int_0^1 (1-t)u(t)dt = a \right\};$$

$$\mathbb{F}^{(2)}_{\partial}[a] \triangleq \left\{ v \in \mathbb{F}^{(2)} \mid \int_0^1 (1-t)v(t)dt = a \right\}.$$

Для данных множеств справедливо включение

$$\mathbb{F}^{(1)}_{\partial}[a] \subset \mathbb{F}^{(2)}_{\partial}[a], \qquad (11)$$

так как $\mathbb{F}^{(1)} \subset \mathbb{F}^{(2)}$. Также при $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ будем рассматривать множества допустимых управлений с ослабленными ограничениями

$$\begin{array}{c} \mathbb{F}^{(\varepsilon)}_{\partial,1}[a] \triangleq \left\{ u \in \mathbb{F}^{(1)} \mid \left| \int_0^1 (1-t)u(t)dt - a \right| < \varepsilon \right\}; \\ \mathbb{F}^{(\delta)}_{\partial,2}[a] \triangleq \left\{ v \in \mathbb{F}^{(2)} \mid \left| \int_0^1 (1-t)v(t)dt - a \right| < \delta \right\}. \end{array} \qquad (12)$$

Тогда, в частности,

$$\mathbb{F}^{(\xi)}_{\partial,1}[a] \subset \mathbb{F}^{(\xi)}_{\partial,2}[a] \quad \forall\, \xi \in]0,\infty[.$$

Области достижимости по скорости при точном соблюдении ограничений имеют вид:

$$G^{(1)}_{\partial}[a] \triangleq \left\{ \int_0^1 u(t)dt : u \in \mathbb{F}^{(1)}_{\partial}[a] \right\}; \quad G^{(2)}_{\partial}[a] \triangleq \left\{ \int_0^1 v(t)dt : v \in \mathbb{F}^{(2)}_{\partial}[a] \right\}.$$

Области достижимости по скорости при ослаблении краевого условия на координату определяются (при $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$) выражениями:

$$G^{(\varepsilon)}_{\partial,1}[a] \triangleq \left\{ \int_0^1 u(t)dt : u \in \mathbb{F}^{(\varepsilon)}_{\partial,1}[a] \right\}; \quad G^{(\delta)}_{\partial,2}[a] \triangleq \left\{ \int_0^1 v(t)dt : v \in \mathbb{F}^{(\delta)}_{\partial,2}[a] \right\}. \tag{13}$$

Согласно построениям [4, с.42], введем множества притяжения и полагаем в дальнейшем

$$AS_1 \triangleq \bigcap_{\varepsilon \in]0,\infty[} \overline{G^{(\varepsilon)}_{\partial,1}[a]}, \quad AS_2 \triangleq \bigcap_{\delta \in]0,\infty[} \overline{G^{(\delta)}_{\partial,2}[a]}.$$

Если $a = 0$, то $AS_1 \neq G^{(1)}_\partial[a]$ и $AS_2 \neq G^{(2)}_\partial[a]$. Действительно, $G^{(1)}_\partial[0] = G^{(2)}_\partial[0] = \{0\}$, в то время как [8, (33)] $c_U \in AS_1$ и $c_V \in AS_2$. Легко видеть, что задача о построении области достижимости не обладает здесь (при $a = 0$) устойчивостью при ослаблении ограничений на координату. Заметим, что (см. [2], [7], [8]) при $a = c_U$ выполнены условия $\mathbb{F}^{(1)}_\partial[a] = \varnothing$ и $G^{(1)}_\partial[a] = \varnothing$, в то время как $a = c_U \in AS_1$ (см. [8, (15)]). Аналогичным образом имеем при $a = c_V$ свойства: $G^{(2)}_\partial[a] = \varnothing$ и $a \in AS_2$. В упомянутых случаях нужная устойчивость отсутствует.

Проанализируем вопрос об устойчивости исходной задачи при ненулевых значениях $y^0 = z^0 = a$ в классе неотрицательных управлений. Напомним, что $u(t) \geqslant 0$ и $v(t) \geqslant 0$ при $t \in [0,1[$. Полагаем в дальнейшем, что $0 < a < c_U$. Отметим справедливость включения $G^{(1)}_\partial[a] \subset G^{(2)}_\partial[a]$ (см. [8, (5)] и уже упомянутое включение (11)). Заметим, что

$$\left(G^{(1)}_\partial[a] \subset [0, c_U]\right) \ \& \ \left(G^{(2)}_\partial[a] \subset [0, c_V]\right).$$

Если $a > c_U$, то $\mathbb{F}^{(1)}_\partial[a] = \varnothing$. В последнем случае обе задачи о построении области достижимости для первого игрока (при точном соблюдении ограничений и при ослабленных ограничениях) несовместны. Также $G^{(1)}_\partial[a] = \varnothing$ и, кроме того, в этом случае $AS_1 = \varnothing$ (см. [8, (34)]).

Если же $a > c_V$, то $G^{(2)}_\partial[a] = \varnothing$ и, соответственно, $AS_2 = \varnothing$. Для дальнейших рассуждений отметим очевидные вложения:

$$G^{(1)}_\partial[a] \subset \overline{G^{(1)}_\partial[a]} \subset [0, c_U]; \quad G^{(2)}_\partial[a] \subset \overline{G^{(2)}_\partial[a]} \subset [0, c_V].$$

Напомним, что [8, (16)] $c_U \in \overline{G^{(1)}_\partial}$ и $c_V \in \overline{G^{(2)}_\partial}$. В этой связи рассмотрим, в целях полноты изложения, конструкцию специальных двухимпульсных управлений в $\mathbb{F}_\partial^{(1)}[a]$, $\mathbb{F}_\partial^{(2)}[a]$, следуя построению [8]. Берем $\varepsilon \in]0, c_U[$. Тогда $c_U - \varepsilon \in]0, \infty[$ и $\frac{\varepsilon}{2} \in]0, \infty[$. Выберем любое число $k_0 \in \left]0, \inf\left(\left\{\frac{\varepsilon}{2}; \frac{c_U-\varepsilon}{2}\right\}\right)\right]$. Очевидно, что $k_0 > 0$ и при этом

$$\left(k_0 < \frac{\varepsilon}{2}\right) \ \& \ \left(k_0 \leqslant \frac{c_U - \varepsilon}{2}\right). \tag{14}$$

Введем в рассмотрение число

$$\text{æ}_1 = 2 - \frac{2(\varepsilon - k_0)}{\varepsilon} = \frac{2k_0}{\varepsilon}. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует, что $\text{æ}_1 \leqslant 1$. С другой стороны, $0 < k_0 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, так как $\varepsilon \in]0, c_U[$. Поэтому $\varepsilon - k_0 < \varepsilon$ и, следовательно,

$$\frac{2(\varepsilon - k_0)}{2} < 2 = \frac{2}{\varepsilon} \cdot \varepsilon.$$

В итоге (см. (15))

$$\text{æ}_1 = 2 - \frac{2(\varepsilon - k_0)}{\varepsilon} > 2 - 2 = 0.$$

Поскольку $\text{æ}_1 \leqslant 1$, получаем, что

$$\text{æ}_1 \in]0, 1]. \tag{16}$$

Кроме того, рассмотрим число

$$\text{æ}_2 = \frac{2k_0}{c_U - \varepsilon}. \tag{17}$$

Очевидно, что $\text{æ}_2 > 0$. Из (14) и (17) получаем, что

$$\text{æ}_2 \leqslant \frac{2}{c_U - \varepsilon} \cdot \frac{c_U - \varepsilon}{2} = 1.$$

Поэтому $\text{æ}_2 \in]0, 1]$. С учетом (16) имеем теперь

$$(\text{æ}_1 \in]0, 1]) \ \& \ (\text{æ}_2 \in]0, 1]). \tag{18}$$

Определим функцию $u^{(1)} : I \to [0, \infty)$ правилом:

$$u^{(1)}(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{\text{æ}_1}, & \text{если } t \in [0, \text{æ}_1[; \\ 0, & \text{если } t \in [\text{æ}_1, 1[. \end{cases}$$

Кроме того, (см. (18)) определим функцию $u^{(2)} : I \to]0, \infty]$ правилом:

$$u^{(2)}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0, 1 - \text{æ}_2[; \\ \frac{c_U - \varepsilon}{\text{æ}_2}, & \text{если } t \in [1 - \text{æ}_2, 1[. \end{cases} \tag{19}$$

Функции $u^{(1)}(t)$ и $u^{(2)}(t)$ кусочно-постоянные и непрерывные справа. Поэтому

$$u^{(1)}(t) + u^{(2)}(t) : I \to [0, \infty[$$

(операция сложения определяется поточечно) также кусочно-постоянная и непрерывная справа функция, причем

$$\int_0^1 \left(u^{(1)} + u^{(2)}\right)(t)\,dt = \int_0^1 u^{(1)}(t)\,dt + \int_0^1 u^{(2)}(t)\,dt = \int_0^{æ_1} u^{(1)}(t)\,dt + \\ + \int_{1-æ_2}^1 u^{(2)}(t)\,dt = \frac{\varepsilon}{æ_1} \cdot æ_1 + \frac{c_U - \varepsilon}{æ_2} \cdot æ_2 = c_U. \quad (20)$$

Таким образом, $u^{(1)}(t) + u^{(2)}(t) \in \mathbb{F}_\partial^{(1)}$. Далее в силу (18) и (19) имеем

$$\int_0^1 (1-t)\left(u^{(1)} + u^{(2)}\right)(t)\,dt = \int_0^1 (1-t)u^{(1)}(t)\,dt + \int_0^1 (1-t)u^{(2)}(t)\,dt = \\ = \frac{\varepsilon}{æ_1}\int_0^{æ_1} (1-t)\,dt + \frac{c_U - \varepsilon}{æ_2}\int_{1-æ_2}^1 (1-t)dt = \frac{\varepsilon}{æ_1}\left(t - \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{æ_1} + \\ + \frac{c_U - \varepsilon}{æ_2}\left(t - \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{1-æ_2}^1 = \\ = \frac{\varepsilon}{æ_1}\left(\frac{2æ_1 - æ_1^2}{2}\right) + \frac{c_U - \varepsilon}{æ_2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2(1-æ_2) - (1-æ_2)^2}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{2}(2 - æ_1) + \\ + \frac{c_U - \varepsilon}{2æ_2}(1 - (1-æ_2)(2 - 1 + æ_2)) = \frac{\varepsilon}{2}(2 - æ_1) + \frac{c_U - \varepsilon}{2æ_2}(æ_2^2) = \\ = \frac{\varepsilon}{2}\left(2 - \frac{2k_0}{\varepsilon}\right) + \frac{c_U - \varepsilon}{2} \cdot \frac{2k_0}{c_U - \varepsilon} = \varepsilon - k_0 + k_0 = \varepsilon. \quad (21)$$

Следовательно,

$$u^{(1)}(t) + u^{(2)}(t) \in \mathbb{F}_{\partial,1}^{(\varepsilon)}.$$

Из (21) и определения $G_{\partial,1}^{(\varepsilon)}[a]$ (см. (13)) вытекает, что $\int_0^1 \left(u^{(1)} + u^{(2)}\right)(t)\,dt \in G_{\partial,1}^{(\varepsilon)}[a]$. Поэтому $c_U \in G_{\partial,1}^{(\varepsilon)}[a]$ и легко заметить, что

$$G_\partial^{(1)}[a] \subset G_{\partial,1}^{(\varepsilon)}[a] \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[.$$

Учитывая вложение $\mathbb{F}_\partial^{(1)}[a] \subset \mathbb{F}_{\partial,1}^{(\varepsilon)}[a]$ $\forall \varepsilon \in]0, \infty[$, получаем, что $G_\partial^{(1)}[a] \subset AS_1$. Таким образом [8, (33)],

$$c_U \in AS_1. \quad (22)$$

На содержательном уровне (22) означает тот факт, что значение c_U реализуемо в классе (обычных) управлений с любой наперед выбранной точностью (при последовательном ужесточении ослабленных моментных ограничений).

В самом деле, для $u \in \mathbb{F}_\partial^{(1)}[a]$

$$\int_0^1 u(t)\,dt \leqslant c_U. \tag{23}$$

Согласно определению множества $\mathbb{F}_{\partial,1}^{(\varepsilon)}[a]$, где $\varepsilon \in]0,\infty[$ для $u \in \mathbb{F}_{\partial,1}^{(\varepsilon)}[a]$ (23) также будет справедливо. С учетом (13) получаем таким образом, что $G_{\partial,1}^{(\varepsilon)}[a] \subset [0,c_U]$ и, как следствие, $\overline{G_{\partial,1}^{(\varepsilon)}[a]} \subset [0,c_U]$. Следовательно (см. [8, (34)]),

$$AS_1 \subset [0,c_U]. \tag{24}$$

Аналогичным образом устанавливается, что

$$(c_V \in AS_2)\ \&\ (AS_2 \subset [0,c_V]).$$

Из (22) и (24) (см. также [8, (35)]) вытекает справедливость утверждения:

если $a \in]0,c_U[$, то число c_U является наибольшей точкой каждого из следующих двух множеств: (1) $G_\partial^{(1)}[a]$ *и* (2) AS_1.

Иными словами, при $a \in]0,c_U[$ имеем равенство:

$$\max_{\nu \in G_\partial^{(1)}[a]} \nu = \max_{\nu \in AS_1} \nu.$$

Более того, согласно предложению 2 работы [8] справедливо свойство:

$$c_U = \max_{\nu \in G_\partial^{(1)}[a]} \nu = \max_{\nu \in AS_1} \nu. \tag{25}$$

Свойство (25) можно интерпретировать как некоторую устойчивость по результату при ослаблении краевого условия. Это утверждение верно для $a \in]0,c_U[$.

Рассуждая аналогичным образом, можно получить следующее свойство:

если $a \in]0,c_V[$, то число c_V является наибольшей точкой каждого из следующих двух множеств: (1) $G_\partial^{(2)}[a]$ *и* (2) AS_2.

3 Асимптотика максимина

Напомним, что $a \in]0, c_U[$ и при этом $c_U \leqslant c_V$. Рассматриваем далее ресурсные ограничения на выбор $u \in \mathbb{F}_+$, $v \in \mathbb{F}_+$.

$$\int_0^1 u(t)dt \leqslant c_U; \quad \int_0^1 v(t)dt \leqslant c_V.$$

В этих терминах конструируются (см. (10)) множества $\mathbb{F}^{(1)}$ и $\mathbb{F}^{(2)}$. Краевые условия для первого и второго игроков таковы, что

$$\int_0^1 (1-t)u(t)dt = a; \quad \int_0^1 (1-t)v(t)dt = a;$$

здесь $u \in \mathbb{F}^{(1)}$, $v \in \mathbb{F}^{(2)}$. Первый игрок стремится выровнять скорости в момент встречи, а цель второго игрока противоположна. Механический смысл упомянутых условий состоит в осуществлении встречи материальных точек по координате в заданный момент времени (точка встречи также задана). В качестве f_0 (см. Раздел 1) возьмем функцию $f_0(x,y) = |x-y|$. Определим значение

$$\sup_{y \in G_\partial^{(2)}[a]} \inf_{x \in G_\partial^{(1)}[a]} f_0(x,y)$$

(напомним, что в Разделе 2 указано, что ограничения каждого из объектов образуют совместную систему).

Утверждение 3 *Справедливо равенство:*

$$\sup_{y \in G_\partial^{(2)}[a]} \inf_{x \in G_\partial^{(1)}[a]} f_0(x,y) = c_V - c_U.$$

Доказательство. Пусть $y \in G_\partial^{(2)}[a]$. Рассмотрим значение $\inf\limits_{x \in G_\partial^{(1)}[a]} f_0(x,y)$.
Положим к рассмотрению следующие случаи: $y \geqslant c_U$ и $y < c_U$.
1) Если $y \geqslant c_U$, то для всех $x \in G_\partial^{(1)}[a]$ справедливо $f_0(x,y) = y - x$, так как $y - x \geqslant c_U - x \geqslant 0$. Следовательно

$$\inf_{x \in G_\partial^{(1)}[a]} f_0(x,y) = y - c_U \leqslant c_V - c_U.$$

2) Допустим теперь, что $y < c_U$, то есть $0 \leqslant y < c_U$. При этом $y = \int_0^1 v(t)\,dt$, где $v \in \mathbb{F}_\partial^{(2)}[a]$, а значит (см. [8, (4)])

$$\int_0^1 v(t)\,dt < c_U$$

и $y \in G^{(1)}_{\partial}[a]$. Поскольку $v \in \mathbb{F}^{(1)}$ и v является допустимым управлением по ограничениям

$$\int_0^1 (1-t)v(t)\,dt = a,$$

то $v \in \mathbb{F}^{(1)}_{\partial}[a]$, откуда следует, что $y \in G^{(1)}_{\partial}[a]$. Так как можно выбрать $x \in G^{(1)}_{\partial}[a]$ таким, что $x = y$, имеем

$$\inf_{x \in G^{(1)}_{\partial}[a]} f_0(x,y) = 0 \leqslant c_V - c_U.$$

Сравнивая 1) и 2), получаем, что последнее неравенство имеет место во всех возможных случаях. Поскольку выбор y был произвольным, имеем, что

$$\sup_{y \in G^{(2)}_{\partial}[a]} \inf_{x \in G^{(1)}_{\partial}[a]} f_0(x,y) \leqslant c_V - c_U.$$

С другой стороны, $c_V \in G^{(2)}_{\partial}[a]$, а потому

$$\sup_{y \in G^{(2)}_{\partial}[a]} \inf_{x \in G^{(1)}_{\partial}[a]} f_0(x,y) \geqslant \inf_{x \in G^{(1)}_{\partial}[a]} f_0(x,c_V) = \inf_{x \in G^{(1)}_{\partial}[a]} |\, c_V - x| = \inf_{x \in G^{(1)}_{\partial}[a]} (c_V - x) =$$

$$= c_V - c_U.$$

Следовательно, верно неравенство

$$\sup_{y \in G^{(2)}_{\partial}[a]} \inf_{x \in G^{(1)}_{\partial}[a]} f_0(x,y) \geqslant c_V - c_U,$$

из чего можно сделать вывод о справедливости требуемого равенства. □

Отметим вложение

$$AS_1 \subset AS_2.$$

Действительно, пусть $y \in AS_1$, тогда существует последовательность управлений [3, с.38] $(u_k(\cdot))_{k \in \mathcal{N}}$ (здесь и ниже $\mathcal{N}$ — множество натуральных чисел), такая, что

1) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k_\varepsilon \in \mathcal{N} : \left| \int_0^1 (1-t) u_k(t) dt - a \right| < \varepsilon\ \forall\, k \geqslant k_\varepsilon$ (см. (12), [3, с.38]) и

2) $\left(\int_0^1 u_k(t)\,dt \right)_{k=1}^{\infty} \to y$.

Из 1) следует, что при $\varepsilon > 0$ $u_k(\cdot) \in \mathbb{F}^{(\varepsilon)}_{\partial,1}[a]$ с некоторого момента. Тогда, в частности, при $\delta > 0$ $\quad u_k(\cdot) \in \mathbb{F}^{(\delta)}_{\partial,2}[a]$ с некоторого момента. С учетом 2) получаем [3, с.38], что $y \in AS_2$.

Утверждение 4 *Справедливо равенство:*

$$\max_{y\in AS_2}\min_{x\in AS_1} f_0(x,y) = c_V - c_U.$$

Доказательство. Пусть $y \in AS_2$. Имеет смысл выделить следующие два случая: $y \geqslant c_U$ и $y < c_U$.
1) Если $y \geqslant c_U$, то для всех $x \in AS_1$ имеем $|x-y| = y - x$ (поскольку $AS_1 \subset [0, c_U]$). Справедлива цепочка рассуждений:

$$\min_{x\in AS_1} f_0(x,y) = \min_{x\in AS_1}|x-y| = \min_{x\in AS_1}(y-x) \leqslant y - c_U \leqslant c_V - c_U.$$

Здесь используется также свойство (22).
2) Пусть теперь $y \in AS_2$ и $y < c_U$. Согласно предложению 3.3.1 работы [3] существует последовательность $(v_k(\cdot))_{k=1}^{\infty}$ в $\mathbb{F}^{(2)}$, для которой выполнены условия
$a)$ $\forall\,\delta > 0\ \exists\, m_\delta \in \mathcal{N}:\ \left|\int_0^1 (1-t)v_k(t)dt - a\right| < \delta\ \forall\, k \geqslant m_\delta;$
$b)$ $\left(\int_0^1 v_k(t)dt\right)_{k=1}^{\infty} \to y.$
Поскольку $y < c_U$, то с некоторого момента

$$\int_0^1 v_k(t)\,dt < c_U.$$

Поэтому (см. (10)) справедливо свойство: $c)$ существует $n_* \in \mathcal{N}$: $v_k(\cdot) \in \mathbb{F}^{(1)}$ $\forall\, k \geqslant n_*$.
Зафиксируем $u_0(\cdot) \in \mathbb{F}^{(1)}$ и построим последовательность управлений $(\widetilde{u}_k(\cdot))_{k=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\widetilde{u}_k(\cdot) = \begin{cases} u_0(\cdot), & \text{если } k \leqslant n_* \\ v_k(\cdot), & \text{если } k > n_*. \end{cases} \tag{26}$$

Объединяя условия $a)$, $c)$ и (26), имеем

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, s \in \mathcal{N}\ \forall k \geqslant s\quad \left|\int_0^1 (1-t)\widetilde{u}_k(t)dt - a\right| < \varepsilon,$$

и, кроме того, согласно $b)$ выполняется условие

$$\left(\int_0^1 \widetilde{u}_k(t)\,dt\right)_{k=1}^{\infty} \to y.$$

Мы показали, таким образом, что существует последовательность $(\widetilde{u}_k(\cdot))_{k=1}^{\infty}$ из $\mathbb{F}^{(1)}$, такая, что

$a')$ $\forall \varepsilon > 0\; \exists n_\varepsilon \in \mathcal{N}: \left|\int_0^1 (1-t)u_k(t)dt - a\right| < \varepsilon\; \forall k \geqslant n_\varepsilon;$

$b')$ $\left(\int_0^1 u_k(t)dt\right)_{k=1}^{\infty} \to y.$

Это означает, что $y \in AS_1$ (см. [3, с.38]). Тогда справедливы оценки

$$0 \leqslant \min_{x \in AS_1} |\, x - y| \leqslant |y - y| = 0 \leqslant c_V - c_U.$$

Итак, для всякого $y \in AS_2$ имеет место $\min\limits_{x \in AS_1} f_0(x, y) \leqslant c_V - c_U$. Поэтому

$$\max_{y \in AS_2} \min_{x \in AS_1} f_0(x, y) \leqslant c_V - c_U.$$

С другой стороны (напомним, что $AS_1 \subset [0, c_U] \subset [0, c_V]$), поскольку $c_V \in AS_2$,

$$\max_{y \in AS_2} \min_{x \in AS_1} f_0(x, y) \geqslant \min_{x \in AS_1} |\, c_V - x| = \min_{x \in AS_1} (c_V - x) \geqslant c_V - c_U.$$

Из двух последних неравенств вытекает требуемое равенство. □

Утверждение 5 *Справедливо равенство:*

$$\max_{y \in AS_2} \min_{x \in AS_1} f_0(x, y) = \sup_{y \in G_\partial^{(2)}[a]} \inf_{x \in G_\partial^{(1)}[a]} f_0(x, y).$$

Доказательство следует из Утверждений 3 и 4. На содержательном уровне Утверждение 5 говорит об устойчивости по максимину задачи (1), (2).

В задачах управления зачастую отсутствует свойство устойчивости при возмущении системы ограничений. Ввиду соображений практического характера, обусловленных такими ситуациями, вопросу неустойчивости при ослаблении ограничений посвящены многие исследования (см., например,[3],[4], [9],[10]). Важную роль в исследованиях такого характера играют расширения исходной задачи, реализуемые в том или ином классе мер, играющих роль обобщенных управлений. Отметим оригинальный подход Н. Н. Красовского [11] к построению обобщенных задач импульсного управления, связанный с применением аппарата обобщенных функций, который послужил основой многих работ по теории импульсных систем [12],[13]. Обобщенные элементы, формализуемые как управления-меры, использовались в теории дифференциальных игр [4],[5],[8]. Элементы теории расширений находят применение в игровых задачах программного управления [9],[14]. Отметим, что явления, имеющие объективно смысл неустойчивости при ослаблении ограничений, возникают и в других разделах математики; в частности, это имеет место в задачах математического программирования [15],[16].

Список литературы

[1] *Ченцов А. Г., Шапарь Ю.В.* Об одной игровой задаче с приближенным соблюдением ограничений. / Доклады Академии Наук. Серия «Математика». С. 170-175.– Т.427. – М., 2009

[2] *Ченцов А. Г., Шапарь Ю.В.* К вопросу о расширении некоторых игровых задач в классе конечно-аддитивных мер. / Вестник Тамбовского университета. — вып.4. — с.830-832, 2009.

[3] *Chentsov A. G.* Asymptotic attainability. — Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1997.- 322 p.

[4] *Chentsov A. G.* Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. — New York, London and Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. - 244 p.

[5] *Chentsov A. G., Morina S. I.* Extensions and Relaxation. — Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 2002. - 408p.

[6] *Ченцов А. Г.* О представлении максимина в игровой задаче с ограничениями асимптотического характера. / Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — № 1. — с.104-119, 2010.

[7] *Ченцов А. Г., Шапарь Ю.В.* Конечно-аддитивные меры и расширения игровых задач с ограничениями асимптотического характера. / Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — № 3. — с.89-111, 2010.

[8] *Кожан М. М., Ченцов А. Г.* К вопросу о корректности некоторых задач управления материальной точкой. / Проблемы управления и информатики. – № 1. – с. 5-15, 2007.

[9] *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. - 624с

[10] *Гамкрелидзе Р.В.* Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1977. - 253с.

[11] *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. - 475с.

[12] *Завалищин Д.С, Сесекин А.Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991. - 256с.

[13] *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971. - 30с.

[14] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. - 456с.

[15] *Даффин Р.Дж.* Бесконечные программы. / Линейные неравенства и смежные вопросы. М. 1959.- с.263-267.

[16] *Гольштейн Е.Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971.