ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2016
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Дифференциально-разностные уравнения

УДК 517.955

Свойство конечной скорости распространения возмущений для решения задачи Дирихле дифференциального уравнения неоднородной диффузии

А.Тедеев

Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова

Аннотация

В данной работе рассматривается задача Коши-Дирихле для нелинейного неоднородного уравнения диффузии с условиями возможного степенного вырождения у границы области типа октанта. В качестве основного инструмента при выводе оценок для решений используется весовое неравенство Гальярдо-Ниренберга, которое характеризует геометрическое свойство области. На этой основе изучается свойство конечной скорости распространения возмущений решения. Приведены достаточные условия, гарантирующие возможность оценки радиуса носителя решения в случае отсутствия источника. Доказано существование сильного обобщенного решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: параболическое уравнение, конечная скорость распространения возмущений, сильное решение, слабое решение

Abstract

The paper deals with the Cauchy-Dirichlet problem for the nonlinear inhomogeneous diffusion equation with the possible power degeneration conditions near the boundary of a cone-like domain. Our main technical tool for the obtaining of solution estimations is a suitable weighted Nerenberg-Gagliardo type inequality, which in turn is connected to a weighted isoperimetric inequality characterizing the geometry of the domain. On this basis we study the property of finite speed of the perturbation propagation of the solution. The suffucient conditions ensuring the possibility to estimate the radius of a solution support in the absence of a source are given. The existence of a strong generalized solution has been proved.

Keywords: parabolic equation, finite speed of perturbation propagation, strong solution, weak solution

1 Введение

Пусть $x = (x_1, \dots, x_N) \in R^N$, $N \geq 1$, $R_l^N = R^N \cap \{x_1, \dots, x_l > 0\}$, $l \leq N$. $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_N})$. $X_l = x_1 \cdot \ldots \cdot x_l$, $X_0 = 1$.

Рассмотрим в области $Q = R_l^N \times \{t > 0\}$ начально-краевую задачу Дирихле

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(a(|x|)D(u^m)\right), \quad m > 1, \tag{1}$$

$$u = 0, \quad (x,t) \in \partial R_l^N \times (t > 0), \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R_l^N. \tag{3}$$

Здесь $a(s) : R^+ \to R^+$ — неотрицательная непрерывно-дифференцируемая функция при $s > 0$, удовлетворяющая условию

$$a(s) \sim s^\alpha, \quad a'(s) \leq 0, \quad \alpha \leq 0, \tag{4}$$

знак $\sim$ имеет смысл двусторонней оценки.

Начальная функция удовлетворяет условиям:

$$\operatorname{support} u_0(x) \subset B_{\rho_0}^l, \quad u_0(x) \in L^2\left(R_l^N\right), \quad u_0(x) \geq 0, \tag{5}$$

где $B_\rho^l = B_\rho \cap R_l^N$, B_ρ — шар с центром в начале координат и радиусом ρ.

Неотрицательную измеримую функцию $u(x,t)$ назовем слабым решением начально-краевой задачи (1)–(3) в $Q = ((0,\infty) \times R_l^N)$, если

$$u(x,\tau) \in L^\infty\left(0,t; L^2\left(R_l^N\right)\right),$$

$$u^m, u^{\frac{m+1}{2}} \in L^2\left(0,t; \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}\left(R_l^N\right)\right), \quad \text{при любом} \quad t > 0,$$

и имеет место тождество

$$\int_0^t \int_{R_l^N} \{-u\xi_\tau + a(|x|)D(u^m)\cdot D\xi\}\,dx\,d\tau = 0 \tag{6}$$

для любой функции $\xi(x,\tau)\in C_0^1\left([0,t);C_0^\infty\left(R_l^N\right)\right)$.

Здесь $C_0^\infty(R_l^N)$ — пространство бесконечно-дифференцируемых финитных в R_l^N функции.

$\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}(R_l^N)$ — пополнение пространства $C_0^\infty(R_l^N)$ по норме

$$\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}(R_l^N)} = \left(\int_{R_l^N} |x|^\alpha |Dv|^2 dx + c_0^2 \int_{R_l^N} \omega(x)\, v^2(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha\le 0,$$

где c_0^2 — произвольно-малая константа (которая будет подбираться позже).

Весовая функция $\omega(x)$ определяется как

$$\omega(x) = \begin{cases} 2|x|^{\alpha-2}, & \text{при } |x|\le 1,\\ 2|x|^{\alpha\frac{m+1}{m}}, & \text{при } |x|>1.\end{cases}$$

Соответственно пространство $L^2\big(0,t;\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}\left(R_l^N\right)\big)$ определяется как пополнение пространства $C_0^1\left([0,t);C_0^\infty\left(R_l^N\right)\right)$ по норме

$$\|u(t)\|_{L^2(0,t;\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}(R_l^N))} = \left(\int_0^t \|u(x,\tau)\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}(R_l^N)} d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассматриваемые пространства являются весовыми гильбертовыми пространствами соболевского типа [11].

Неотрицательную измеримую функцию назовем сильным решением задачи (1)–(3) в Q, если оно является слабым решением задачи (1)–(3) в Q и $u_t\in L_{2,\mathrm{loc}}((0,\infty)\times R_l^N)$.

Далее будем говорить, что функция $u(x,t)$ обладает свойством конечной скорости распространения возмущении, если для любого $t>0$ функция $u(x,t)$ является финитной по переменной x.

Основной характеристикой для таких функций является радиус носителя, который определяется как

$$\zeta(t) = \inf\{\rho:\ u(x,t)=0,\ |x|\ge\rho\}.$$

Свойство финитности носителя решения изучалось многими авторами. К наиболее ранним результатам в этом направлении относятся работы [1], [2], [5]. В этих работах обращено внимание на существенное влияние на размер носителя некоторых членов в дифференциальном уравнении. К более поздним результатам можно отнести работы [9], [10], [11], [14]. В работе [14] для сильного решения задачи Коши в $R^N \times (t > 0)$ вдвойне нелинейного параболического уравнения с поглощающим коэффициентом были изучены вопросы финитности решения задачи Коши в зависимости от финитности начальной функции и поведения функции $a(s)$. Здесь же дана точная оценка радиуса носителя решения задачи Коши. В случае финитности начальной функции $u_0(x)$, т. е. при условии $\operatorname{support} u_0(x) \subset B_{\rho_0}$, из результатов работы [14] для радиуса носителя решения задачи Коши вдвойне нелинейного параболического уравнения следует следующая точная оценка

$$\zeta(t) \leq 4\rho_0 + C||u_0||_{1,R^N}^{\frac{m+p-3}{\beta-\alpha}} \cdot t^{\frac{1}{\beta-\alpha}},$$

где β — постоянная Баренблатта, определяемая с помощью равенства $\beta = N(m+p-3)+p$, α — показатель степени $a(s)$, m и p — параметры дифференциального уравнения. Причем в приведенной оценке условия: $m+p-3 > 0$ и $\alpha > 0$ существенны.

В работе [9] для радиуса носителя решения задачи (1)–(3) при наличии неоднородного источника в уравнении (1) (т. е. слагаемого $b(|x|)u^q$ в правой части уравнения (1)) была получена оценка

$$\zeta(t) \leq C\left(\rho_0 + t^{\frac{m-q}{|\lambda|(m-1)+(|\alpha|+2)(1-q)}}\right),$$

где $\alpha \leq 0$, $\lambda \leq 0$ — показатели степени функции $a(|x|)$ и $b(|x|)$ соответственно, $0 < q < 1$, $1 < m < q+2$, ρ_0 — радиус носителя начальной функции $u_0(x)$.

Из этой оценки видно, что при наличии неоднородного источника в уравнении (1) радиус носителя не зависит от геометрии рассматриваемой области (параметра l) при больших значениях времени. Такая зависимость может проявляться лишь при $m \geq q+2$. В этой работе также доказано, что при выполнении условий $q > 1$, $\alpha \leq 0$, $\lambda \leq 0$, $m > 1$ решение задачи (1)–(3) не обладает свойством конечной скорости распространения возмущений (задача при $q = 1$ не решена).

Естественно возникает вопрос: какой вид имеет неравенство для радиуса носителя решения задачи (1)–(3) в случае отсутствия источника, и какова его зависимость от геометрии рассматриваемой области.

Прежде чем перейти к формулировке основных результатов сделаем ряд замечаний и приведем вспомогательные предложения.

2 Вспомогательные предложения

Замечание. Сформулированные в работе утверждения предполагают существование слабого глобального решения начально-краевой задачи (1)–(2). Существование такого решения при $\alpha = 0$ достаточно подробно рассмотрено в монографии [15]. В случае $\alpha < 0$ доказательство теоремы существования задачи (1)–(3) мы приведем в пункте 4 в два этапа. Сначала устанавливается существование решения в ограниченной области в весовых пространствах соболевского типа. Затем строится решение в неограниченной области с помощью предела монотонной последовательности решений. Ограничения на параметр α и на размерность N $(N > 2)$ диктуются теоремами вложения и компактности для пространств соболевского типа с весами. Эти ограничения приведены в пункте 4, и мы будем считать их выполненными при формулировке основных теорем.

Далее положим

$$\rho_n = \rho(1 + \xi(1 - 2^{-(n+1)})),\ \overline{\rho}_n = \rho\left(\frac{1}{2} - \xi\left(1 - 2^{-(n+1)}\right)\right),\ \text{для любых } \rho > 4\rho_0,$$

$$0 < \xi < \frac{1}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Имеет место следующее предложение:

Лемма 1 *Существует последовательность гладких срезающих функций $\zeta_n(x)$ в $B\rho_{n+1}$, удовлетворяющая условиям:*

$$0 \le \zeta_n(x) \le 1;$$

$$\zeta_n(x) = 1, \quad \textit{при} \ \ x \in B_{\rho_n} \setminus B_{\overline{\rho}_n};$$

$$\zeta_n(x) = 0 \ \ \textit{вне} \ \ B_{\rho_{n+1}} \setminus B_{\overline{\rho}_{n+1}};$$

$$|D\zeta_n| \le \frac{C2^n}{\xi\rho}; \quad \left|\frac{\partial\zeta_n}{\partial x_j}\right| \cdot (X_l)_{x_j} \le \frac{C2^{n+1}X_l}{\rho^2}; \tag{$*$}$$

для всех $n = 0, 1, 2, \ldots, j = 1, 2, \ldots, l$. Здесь C — некоторая несущественная константа.

Доказательство. Примером таких функций является последовательность, определяемая равенствами

$$\zeta_n(x) = \begin{cases} 0; & |x| \le \overline{\rho}_{n+1}, \\ \left[1 - \left(\dfrac{\overline{\rho}_n - |x|}{\overline{\rho}_n - \overline{\rho}_{n+1}}\right)^{\lambda}\right]^{\lambda}; & \overline{\rho}_{n+1} < |x| \le \overline{\rho}_n, \\ 1; & \overline{\rho}_n < |x| < \rho_n, \\ \left[1 - \left(\dfrac{|x| - \rho_n}{\rho_{n+1} - \rho_n}\right)^{\lambda}\right]^{\lambda}; & \rho_n \le |x| \le \rho_{n+1}; \\ 0; & |x| > \rho_{n+1}, \end{cases}$$

где λ — достаточно большая положительная постоянная.

Первые три условия очевидны. Соотношения (*) очевидны в областях:

$$|x| < \overline{\rho}_{n+1}, \quad \overline{\rho}_n < |x| < \rho_n, \text{ и } |x| > \rho_{n+1}.$$

Докажем первое из неравенств в (*) в области $\overline{\rho}_{n+1} < |x| \le \overline{\rho}_n$.

Имеем:

$$\zeta_{nx_j} = \lambda^2 \left[1 - \left(\frac{\overline{\rho}_n - |x|}{\overline{\rho}_n - \overline{\rho}_{n+1}}\right)^{\lambda}\right]^{\lambda-1} \left(\frac{\overline{\rho}_n - |x|}{\overline{\rho}_n - \overline{\rho}_{n+1}}\right)^{\lambda-1} \cdot \frac{1}{\overline{\rho}_n - \overline{\rho}_{n+1}} \cdot \frac{x_j}{|x|}.$$

Так как выражения в скобках не превосходят единицы, и кроме того

$$\frac{|x_j|}{|x|} \le 1, \text{ при } j = 1, 2, \ldots, N, \text{ то}$$

$$|\zeta_{nx_j}| \le \frac{\lambda^2}{\overline{\rho} - \overline{\rho}_{n+1}}.$$

Подставляя значения $\overline{\rho}_n$ и $\overline{\rho}_{n+1}$, будем иметь:

$$|\zeta_{nx_j}| \le \frac{\lambda^2}{\xi\rho} \cdot \frac{1}{2^{-(n+1)} - 2^{-(n+2)}} = \frac{4\lambda^2 2^n}{\xi\rho}.$$

Суммируя полученное неравенство по j и замечая, что

$$|D\zeta_n| \le \sum_{j=1}^{N} |\zeta_{nx_j}|,$$

получим оценку

$$|D\zeta_n| \leq \frac{4\lambda^2 N 2^n}{\xi\rho}.$$

Это соответствует первому из неравенств (*) с $C = 4\lambda^2 N$. Точно также можно оценить $|D\zeta_n|$ в области $\rho_n \leq |x| \leq \rho_{n+1}$.

Для доказательства второго неравенства в (*) достаточно заметить, что

$$(X_l)_{x_j} = \frac{X_l}{x_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, l.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2 *Пусть A_n и B_n — ограниченные последовательности неотрицательных чисел. Если кроме этого A_n не убывает, и для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$*

$$A_n + B_n \leq \varepsilon B_{n+1} + C b^n (A_{n+1})^{\frac{2}{\mu}}, \quad \text{при всех } \ n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (**)$$

C и μ — некоторые положительные постоянные, и $b > 1$, то имеет место оценка

$$A_0 \leq C_1 (A_\infty)^{\frac{2}{\mu}}, \quad \text{где } \ C_1 = C_1(C, b) \ \text{ и } \ A_\infty = \lim_{n\to\infty} A_n. \qquad (***)$$

Доказательство. Проводя итерацию по n в неравенстве (**), нетрудно вывести соотношение

$$A_0 \leq \varepsilon^n B_n + C \left(\sum_{k=0}^{n-1} b^k \cdot \varepsilon^k \right) (A_n)^{\frac{2}{\mu}}.$$

Полагая $\varepsilon = \frac{1}{2b}$, и затем переходя к пределу в окончательном соотношении, получим (***).

Лемма 2 доказана.

Лемма 3 *Если $u(x, \tau)$ — сильное решение, то равенство* (6) *можно видоизменить и представить в виде*

$$\int_0^t \int_{R_l^N} \left\{ u_\tau \xi + a(|x|) D(u^m) \cdot D\xi \right\} dx\, d\tau = 0, \qquad (7)$$

при этом пространство пробных функций $\xi \in C_0^1\left([0,t);C_0^\infty\left(R_l^N\right)\right)$ *может быть расширен до пространства функции*

$$\eta(x,\tau) \in L^2\left(0,t;\overset{\circ}{V}_{2,\alpha,\omega}\left(R_l^N\right)\right),$$

где $\overset{\circ}{V}{}^1_{2,\alpha,\omega}\left(R_l^N\right)$ *— множество функций из* $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}\left(R_l^N\right)$*, имеющих компактный носитель в* R_l^N *с радиусом носителя* $R(\tau)$*, удовлетворяющих условию*

$$R^*(t) = \sup_{0\le\tau\le t} R(\tau) < \infty, \quad \textit{при любом} \quad t>0.$$

Доказательство. Так как по условию $u_t \in L_2\left((0,t)\times B_\rho^l\right)$, то к равенству (6) можно применить интегрирование по частям по переменной t. Полученное равенство соответствует равенству (7). Пусть $\eta(x,\tau)$ — произвольная функция, принадлежащая $L^2\big(0,t;\overset{\circ}{V}_{2,\alpha,\omega}\left(R_l^N\right)\big)$. Так как пространство $L^2\big(0,t;\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}\left(R_l^N\right)\big)$ является пополнением пространства $C_0^1\left([0,t);C_0^\infty\left(R_l^N\right)\right)$ по норме

$$\|v\|_{L^2(0,t;\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}(R_l^N))} = \left(\int\limits_0^t \|v\|^2_{\overset{\circ}{W}_{2,\alpha,\omega}(R_l^N)} d\tau\right)^{\frac{1}{2}},$$

то существует последовательность функций $\xi_n(x,\tau) \in C_0^1\left([0,t);C_0^\infty(R_l^N)\right)$, сходящаяся к функции $\eta(x,\tau)$ по норме $\|\cdot\|_{L^2(0,t;\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}(R_l^N))}$.

Положим в равенстве (7) $\xi(x,\tau)=\xi_n(x,\tau)$ и представим его в виде

$$\begin{aligned}\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} \big\{u_\tau(\xi_n-\eta)+a(|x|)D(u^m)(D\xi_n-D\eta)\big\}dx\,d\tau + \\ +\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N}\left\{u_\tau\eta+a(|x|)D(u^m)\cdot D\eta\right\}dx\,d\tau = I_1+I_2=0.\end{aligned} \qquad (7')$$

Покажем, что первое слагаемое стремится к нулю при $n\to\infty$. Так как η имеет компактный носитель в R_l^N, то для некоторого $c>1$, и для достаточно больших значений n, при всех $0\le\tau\le t$

$$\operatorname{support}\xi_n(x,\tau)\subset B^l_{cR^*(t)}, \quad \operatorname{support}\eta(x,\tau)\subset B^l_{cR^*(t)}$$

($R^*(t)$ определено выше).

Для первого слагаемого при больших значениях n

$$|I_1| \leq \int\limits_0^t \int\limits_{B^l_{cR^*(t)}} \left(|u_\tau||\xi_n - \xi| + a(|x|)|D(u^m)| \cdot |D\xi_n - D\eta|\right) dx\, d\tau.$$

Используя определение функции $\omega(x)$ получим

$$\int\limits_0^t \int\limits_{B^l_{cR^*(t)}} |u_\tau||\xi_n - \eta| dx\, d\tau \leq \left[(cR^*(t))^{|\alpha|+2} + (cR^*(t))^{|\alpha|\left(\frac{m+1}{m}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^t \int\limits_{B^l_{cR^*(t)}} |u_\tau|^2 dx\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^t \int\limits_{B^l_{cR^*(t)}} \omega(x)|\xi_n - \eta|^2 dx\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= c_0^1 \left[(cR^*(t))^{|\alpha|+2} + (cR^*(t))^{|\alpha|\left(\frac{m+1}{m}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_0^t \int\limits_{B^l_{cR^*(t)}} |u_\tau|^2 dx\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \|\xi_n - \eta\|_{L^2(0,t;\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}(R^N_l))}.$$

Так как $u^m \in L^2\big(0, t; \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}\left(R^N_l\right)\big)$, то

$$\int\limits_0^t \int\limits_{B^l_{cR^*(t)}} a(|x|)|D(u^m)| \cdot |D\xi_n - D\eta|\, dx\, d\tau \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_0^t \int\limits_{B^l_{cR^*(t)}} a(|x|)|D(u^m)|^2\, dx\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_0^t \int\limits_{B^l_{cR^*(t)}} a(|x|)|D\xi_n - D\eta|^2\, dx\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \|u^m\|_{L^2(0,t;\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}(R^N_l))} \cdot \|D\xi_n - D\eta\|_{L^2(0,t;\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}(R^N_l))}.$$

На основании приведенных неравенств для I_1 будем иметь

$$|I_1| \leq \left\{C_0^{-1} \left[(cR^*(t))^{|\alpha|+2} + (cR^*(t))^{|\alpha|\left(\frac{m+1}{m}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_0^t \int\limits_{B^l_{cR^*(t)}} |u_\tau|^2 dx\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \|u^m\|_{L^2(0,t;\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}(R^N_l))} \right\} \|\xi_n - \eta\|_{L^2(0,t;\overset{\circ}{W}_{2,\alpha,\omega}(R^N_l))}.$$

Выражение в фигурных скобках принимает конечное значение при любом $t > 0$, следовательно $I_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Переходя к пределу в равенстве $(7')$ при $n \to \infty$ получим требуемое утверждение. Лемма 3 доказана.

Лемма 4 *Пусть* $u(x,\tau)$ — *сильное решение начально-краевой задачи* (1)–(3), *обладающее свойством конечной скорости распространения возмущений, и выполнены условия* (4) *и* (5), *тогда имеет место неравенство*

$$\sup_{0\le\tau\le t}\int\limits_{R_l^N} X_l\, u^2(x,\tau)\,dx \le \int\limits_{R_l^N} X_l\, u_0^2(x)\,dx,$$

при любом $t > 0$.

Доказательство. Положим $X_{l,\varepsilon} = (x_1-\varepsilon)_+ \ldots (x_l-\varepsilon)_+$, где

$$(x_j-\varepsilon)_+ = \begin{cases} x_j-\varepsilon, & x_j \ge \varepsilon,\ j=1,2,\ldots,l,\\ 0, & x_j < \varepsilon,\ j=1,2,\ldots,l. \end{cases}$$

Так как по условию функция $u(x,t)$ обладает свойством конечной скорости распространения возмущений, то

$$u(x,\tau) = 0 \quad \text{для всех } x \text{ таких, что } |x| > \zeta(\tau),$$

где $\zeta(\tau)$ — радиус носителя функции $u(x,\tau)$.

Напомним, что $\zeta(\tau)$ определяется по формуле

$$\zeta(\tau) = \inf\{\rho :\ u(x,\tau)=0,\ |x|>\rho\}.$$

Положим $\zeta^*(t) = \sup\limits_{0\le\tau\le t}\zeta(\tau)$, тогда при любых $0<\tau\le t$ $\ u(x,\tau)=0$ для всех x таких, что $|x| > \zeta^*(t)$.

Выберем в равенстве (7) пробную функцию $\xi(x,\tau)$, равной

$$\xi(x,\tau) = X_{l,\varepsilon}\, u(x,\tau).$$

Функция $\xi(x,\tau)$ — финитна в области

$$B^* = B^l_{c\zeta^*(t)} = R_l^N \cap B_{c\zeta^*(t)}$$

($B_{c\zeta^*(t)}$ — шар с центром в начале координат и радиусом $c\zeta^*(t)$, $c>1$) при любом $0<\tau\le t$, т. е. принадлежит пространству $L^2(0,t;\overset{\circ}{V}_{2,\alpha,\omega}(R_l^N))$.

Подставляя в (7) функцию $\xi(x,\tau)$, после элементарных преобразований получим соотношение

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{B^*}(u^2)_\tau X_{l,\varepsilon}dx\,d\tau = -\frac{m}{m+1}\sum_{j=1}^N\int\limits_0^t\int\limits_{B^*}a(|x|)(u^{m+1})_{x_j}(X_{l,\varepsilon})_{x_j}\,dx\,d\tau -$$

$$-m\int\limits_0^t\int\limits_{B^*}a(|x|)X_{l,\varepsilon}\,u^{m-1}|Du|^2\,dx\,d\tau.$$

Опуская второе слагаемое справа (в силу его отрицательности), будем иметь

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{B^*}(u^2)_\tau\cdot X_{l,\varepsilon}\,dx\,d\tau \le -\frac{m}{m+1}\sum_{j=1}^N\int\limits_0^t\int\limits_{B^*}a(|x|)(u^{m+1})_{x_j}\cdot(X_{l,\varepsilon})_{x_j}\,dx\,d\tau,$$

отсюда

$$\frac{1}{2}\int\limits_{B^*}u^2(x,t)X_{l,\varepsilon}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{B^*}u_0^2(x)X_{l,\varepsilon}\,dx \le$$

$$\le -\frac{m}{m+1}\sum_{j=1}^N\int\limits_0^t\int\limits_{B^*}a(|x|)(u^{m+1})_{x_j}(X_{l,\varepsilon})_{x_j}dx\,d\tau. \qquad (*)$$

Так как

$$\int\limits_{B^*}u^2(x,t)\cdot X_{l,\varepsilon}\,dx = \int\limits_{B^*}\omega^{-1}(x)\cdot\omega(x)u^2(x,t)\cdot X_{l,\varepsilon}\,dx \le$$

$$\le [c\zeta^*(t)]^l\cdot\left[(c\zeta^*(t))^{|\alpha|+2}+(c\zeta^*(t))^{|\alpha|\left(\frac{m+1}{m}\right)}\right]\cdot\int\limits_{B^*}\omega(x)\,u^2(x,t)\,dx \le$$

$$\le [c\zeta^*(t)]^l\cdot\left[(c\zeta^*(t))^{|\alpha|+2}+(c\zeta^*(t))^{|\alpha|\left(\frac{m+1}{m}\right)}\right]\cdot\|u(t)\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}(R_l^N)},$$

и

$$\int\limits_{B^*}u_0^2(x)X_{l,\varepsilon}\,dx \le \rho_0^l\int\limits_{B^*}u_0^2(x)\,dx$$

(ρ_0 — радиус носителя начальной функции), то интегралы слева в $(*)$ ограничены по ε. Кроме того так как $X_{l,\varepsilon}\to X_l$ при $\varepsilon\to 0$ возрастая, то по теореме Беппо — Леви в интегралах слева возможен предельный переход под знаками интегралов.

Оценим интеграл справа в соотношении $(*)$, используя неравенство Юнга и равенство

$$(u^{m+1})_{x_j} = \left(u^{\frac{m+1}{2}} \cdot u^{\frac{m+1}{2}}\right)_{x_j} = \left(u^{\frac{m+1}{2}}\right)_{x_j} \cdot u^{\frac{m+1}{2}} + \\ + u^{\frac{m+1}{2}} \cdot \left(u^{\frac{m+1}{2}}\right)_{x_j} = 2u^{\frac{m+1}{2}} \left(u^{\frac{m+1}{2}}\right)_{x_j}.$$

Имеем

$$\left| \sum_{j=1}^{N} \int_0^t \int_{B^*} |x|^\alpha \left(u^{m+1}\right)_{x_j} (X_{l,\varepsilon})_{x_j}\, dx\, d\tau \right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{N} \int_0^t \int_{B^*} |x|^\alpha u^{m+1} \cdot (X_{l,\varepsilon})_{x_j}\, dx\, d\tau + \sum_{j=1}^{N} \int_0^t \int_{B^*} |x|^\alpha (X_{l,\varepsilon})_{x_j} \big(u^{\frac{m+1}{2}}\big)^2_{x_j}\, dx\, d\tau,$$

$$N[c\zeta^*(t)]^{l-1} \left(\int_0^t \int_{B^*} |x|^\alpha u^{m+1}\, dx\, d\tau + \int_0^t \int_{B^*} |x|^\alpha \Big|D\big(u^{\frac{m+1}{2}}\big)\Big|^2 dx\, d\tau \right) \le$$

$$\le N[c\zeta^*(t)]^{l-1} \Bigg\{ \max\left[(c\zeta^*(t))^2, (c\zeta^*(t))^{\frac{|\alpha|}{m}}\right] \cdot \int_0^t \int_{B^*} \omega(x)\, u^{m+1}(x,\tau)\, dx\, d\tau + \\ + \int_0^t \int_{B^*} |x|^\alpha \Big|D\big(u^{\frac{m+1}{2}}\big)\Big|^2 dx\, d\tau \Bigg\} \le$$

$$\le N[c\zeta^*(t)]^{l-1} \left\{ \max\left[(c\zeta^*(t))^2, (c\zeta^*(t))^{\frac{|\alpha|}{m}}\right] + 1 \right\} \left\| u^{\frac{m+1}{2}} \right\|_{L^2(0,t;\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}(R^N_l))}.$$

Так как норма

$$\left\| u^{\frac{m+1}{2}} \right\|_{L^2(0,t;\overset{\circ}{W}_{2,\alpha,\omega}(R^N_l))}$$

конечна при любом $t > 0$ по условию задачи (1)–(3), а сомножитель конечен при любом $t > 0$ по определению, то отсюда следует, что правая часть соотношения $(*)$ ограничена по ε. Так как $(X_{l,\varepsilon})_{x_j} = [(X_l)_{x_j}]_\varepsilon \to (X_l)_{x_j}$ возрастая при любом $j = 1, 2, \ldots, l$, то опять можно использовать теорему о предельном переходе под знаком интеграла. Переходя к пределу в $(*)$ при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\frac{1}{2} \int_{B^*} u^2(x,t) X_l\, dx - \frac{1}{2} \int_{B^*} u_0^2(x) X_l\, dx \le$$

$$\leq -\frac{m}{m+1}\sum_{j=1}^{N}\int_0^t\int_{B^*} a(|x|)(u^{m+1})_{x_j}(X_l)_{x_j}dx\,d\tau.$$

Применяя к внутреннему интегралу в правой части неравенства интегрирование по частям, замечая при этом, что

$$(X_l)_{x_jx_j}=0,\ j=1,2,\ldots,l,\quad [a(|x|)]_{x_j}=\alpha|x|^{\alpha-2}\cdot x_j<0$$
$$\text{при } x_j>0,\ j=1,2,\ldots,l,\quad \text{и}\quad (X_l)_{x_j}=0,\ j=l+1,\ldots,N,$$

приходим к неравенству

$$\int_{B^*} u^2(x,t)\cdot X_l\,dx \leq \int_{B^*} u_0^2(x)\,X_l\,dx.$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5 *Пусть выполнены условия* (4) *и* (5), *и функция* $u(x,\tau)$, *являющаяся решением задачи* (1)–(3) *обладает свойством конечной скорости распространения возмущений. Тогда момент*

$$M(t)=\int_{R_l^N} X_l\,u(x,t)\,dx$$

решения начально-краевой задачи (1)–(3) *удовлетворяет условию*

$$M(t)\leq 2M(0).$$

Доказательство. В качестве пробной функции в равенстве (7) выберем функцию

$$\xi(x,\tau)=X_{l,\varepsilon}\,\chi_\varepsilon\,\mu(\tau),$$

где $\chi_\varepsilon(x)$ — усредненная функция для характеристической функции $\chi(x)$ шара B_ρ^l (ρ — подберем позже), а $\mu(\tau)$ — непрерывно-дифференцируемая функция при $\tau>0$, удовлетворяющая условиям:

$$\frac{1}{2}\leq\mu(\tau)\leq 1,\quad \mu'(\tau)<0.$$

Зафиксируем t и положим

$$R(t)=c\zeta^*(t),\quad \text{где}\quad \zeta^*(t)=\sup_{0\leq\tau\leq t}\zeta(\tau),\quad c>1,$$

$\zeta(\tau)$ — радиус носителя функции $u(x,\tau)$, и пусть $\rho > R(t)$.

После подстановки пробной функции, из (7) будем иметь

$$\int_0^t \int_{B_{R(t)}} u_\tau X_{l,\varepsilon}\cdot\chi_\varepsilon(x)\,\mu(\tau)\,dx\,d\tau = -\int_0^t \int_{B^l_{R(t)}} a(|x|)D(u^m)\,\mu(\tau)\,D(X_{l,\varepsilon}\cdot\chi_\varepsilon(x))\,dx\,d\tau.$$

Правую часть представим виде

$$-\int_0^t \int_{B^l_{R(t)}} \mu(\tau)\,a(|x|)\left\{\sum_{j=1}^N (u^m)_{x_j}\Big[(X_{l,\varepsilon})_{x_j}\cdot\chi_\varepsilon(x) + X_{l,\varepsilon}\cdot(\chi_\varepsilon(x))_{x_j}\Big]\right\}dx\,d\tau =$$

$$= -\sum_{j=1}^N \int_0^t \mu(\tau) \int_{B^l_{R(t)}} (u^m)_{x_j} a(|x|)\Big[(X_{l,\varepsilon})_{x_j}\chi_\varepsilon(x) + X_{l,\varepsilon}(\chi_\varepsilon)_{x_j}\Big]dx\,d\tau =$$

$$= \sum_{j=1}^N \int_0^t \mu(\tau) \int_{B^l_{R(t)}} u^m\Big\{[a(|x|)]_{x_j}\Big[(X_{l,\varepsilon})_{x_j}\cdot\chi_\varepsilon(x) + X_{l,\varepsilon}\cdot(\chi_\varepsilon(x))_{x_j}\Big] +$$

$$+ a(|x|)\Big[2(X_{l,\varepsilon})_{x_j}(\chi_\varepsilon)_{x_j} + X_{l,\varepsilon}(\chi_\varepsilon)_{x_jx_j}\Big]\Big\}dx\,d\tau =$$

$$= \sum_{j=1}^N \left\{ \int_0^t \mu(\tau) \int_{B^l_{R(t)}} u^m[a(|x|)]_{x_j}(X_{l,\varepsilon})_{x_j}\chi_\varepsilon(x)\,dx\,d\tau + \right.$$

$$+ \int_0^t \mu(\tau) \int_{B^l_{R(t)}} u^m[a(|x|)]_{x_j}\cdot X_{l,\varepsilon}\cdot[\chi_\varepsilon(x)]_{x_j}\,dx\,d\tau +$$

$$+2\int_0^t \mu(\tau) \int_{B^l_{R(t)}} u^m\,a(|x|)(X_{l,\varepsilon})_{x_j}\cdot(\chi_\varepsilon)_{x_j}\,dx\,d\tau +$$

$$+ \int_0^t \mu(\tau) \int_{B^l_{R(t)}} u^m\,a(|x|)\cdot X_{l,\varepsilon}\cdot(\chi_\varepsilon)_{x_jx_j}\,dx\,d\tau\ = \sum_{j=1}^N \left(I_1^{(j)} + I_2^{(j)} + I_3^{(j)} + I_4^{(j)}\right).$$

По определению

$$\chi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in B^l_{\rho-\varepsilon}, \\ 0, & x \notin B^l_{\rho+\varepsilon}. \end{cases}$$

Следовательно $[\chi_\varepsilon(x)]_{x_j} = [\chi_\varepsilon(x)]_{x_j x_j} = 0$, для $x \in B^l_{\rho-\varepsilon}$, и $j = 1, 2, \ldots, N$.

Подберем ε настолько малым, чтобы

$$\rho - \varepsilon > R(t),$$

тогда

$$\operatorname{support} u(x,\tau) \cap \operatorname{support} [\chi_\varepsilon(x)]_{x_j} = \varnothing,$$

и

$$\operatorname{support} u(x,\tau) \cap \operatorname{support} [\chi_\varepsilon(x)]_{x_j x_j} = \varnothing,$$

при $j = 1, 2, \ldots, N$, и $0 \le \tau \le t$. Следовательно

$$I_2^{(j)} = I_3^{(j)} = I_4^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Кроме этого, так как $[a(|x|)]_{x_j} \le 0$, $j = 1, 2, \ldots, N$, по условию, то $I_1 \le 0$.

Таким образом,

$$\int\limits_0^t \int\limits_{B^l_{R(t)}} u_\tau X_{l,\varepsilon} \cdot \chi_\varepsilon(x)\, \mu(\tau)\, dx\, d\tau \le 0.$$

Переходя к пределу в последнем равенстве при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\int\limits_0^t \int\limits_{B^l_{R(t)}} u_\tau\, X_l\, \mu(\tau)\, dx\, d\tau \le 0,$$

отсюда

$$\int\limits_0^t \int\limits_{B^l_{R(t)}} (u \cdot \mu)_\tau X_l\, dx\, d\tau \le \int\limits_0^t \int\limits_{B^l_{R(t)}} X_l\, \mu'(\tau)\, u\, dx\, d\tau,$$

или

$$\int\limits_{B^l_{R(t)}} u(x,t)\, \mu(t)\, X_l\, dx - \int\limits_{B^l_{R(t)}} u_0(x)\, \mu(0)\, X_l\, dx \le \int\limits_0^t \int\limits_{B^l_{R(t)}} X_l\, \mu'(\tau)\, u\, dx\, d\tau,$$

так как $\mu'(\tau) < 0$, то

$$\frac{1}{2} \int\limits_{B^l_{R(t)}} X_l\, u(x,t)\, dx - \int\limits_{B^l_{R(t)}} X_l\, u_0(x)\, dx \le 0.$$

Лемма 5 доказана.

Замечание. В случае однородной диффузии, т. е. при $a(|x|) = |x|^\alpha$, и $\alpha = 0$, имеет место равенство (закон сохранения момента)

$$\int\limits_{R_l^N} X_l\, u(x,t)\, dx = \int\limits_{R_l^N} X_l\, u_0(x)\, dx, \quad t > 0.$$

В самом деле, из леммы 5 следует, что в этом случае

$$\int\limits_0^t \int\limits_{B^l_{R(t)}} u_\tau X_l\, \mu(\tau)\, dx\, d\tau = 0. \tag{$*$}$$

Выберем вначале $\mu(\tau)$, удовлетворяющим условию

$$\gamma \le \mu(\tau) \le 1, \quad \mu'(\tau) < 0, \quad \text{где} \quad \gamma < 1.$$

Тогда в силу леммы 5

$$\int\limits_{B^l_{R(t)}} X_l\, u(x,t)\, dx \le \frac{1}{\gamma} \int\limits_{B^l_{R(t)}} X_l\, u_0(x)\, dx.$$

Затем, подберем $\mu(\tau)$, удовлетворяющим условию

$$\gamma \le \mu(\tau) \le 1, \quad \mu'(\tau) > 0.$$

Тогда из $(*)$ будем иметь

$$\gamma \int\limits_{B^l_{R(t)}} X_l\, u_0(x)\, dx \le \int\limits_{B^l_{R(t)}} X_l\, u(x,t)\, dx.$$

Таким образом,

$$\gamma \int\limits_{B^l_{R(t)}} X_l\, u_0(x)\, dx \le \int\limits_{B^l_{R(t)}} X_l\, u(x,t)\, dx \le \frac{1}{\gamma} \int\limits_{B^l_{R(t)}} X_l\, u_0(x)\, dx.$$

Остается перейти в полученном неравенстве к пределу при $\gamma \to 1$.

3 Основные результаты

Основными результатами настоящей работы являются следующие утверждения:

Теорема 1 *Пусть $u(x,t)$ — сильное решение задачи Дирихле (1)–(3), где $u_0(x)$ и $a(s)$ удовлетворяют условиям (4) и (5). Тогда при всех $\alpha \le 0$ функция $u(x,t)$ обладает свойством конечной скорости распространения возмущений, и для радиуса носителя $\zeta(t)$ функции $u(x,t)$ имеет место оценка*

$$\zeta(t) \le C\left(\rho_0 + \left(\int\limits_{R_l^N} X_l u_0(x)dx\right)^{\frac{m-1}{\beta_l-1}} \cdot t^{\frac{1}{\beta_l-\alpha}}\right), \tag{8}$$

где $\beta_l = (N+l)(m-1)+2$ — постоянная Баренблатта, соответствующая области R_l^N, $C = C(m,N,l)$.

Теорема 2 *Если $u(x,t)$ — сильное решение задачи Дирихле (1)–(3) дифференциального уравнения однородной диффузии ($\alpha = 0$), и кроме того выполнены условия (5), то имеет место двусторонняя оценка*

$$\sup_{x\in R_l^N} u(x,t) \sim t^{-\frac{N+l}{\beta_l}}\left(\int\limits_{R_l^N} u_0(x)dx\right)^{\frac{2}{\beta_l}}. \tag{9}$$

Доказательство теоремы 1. На основании леммы 3 в качестве пробных функций в равенстве (7), можно выбрать функции

$$\xi_n(x,t) = \zeta_n^{m+1} u X_{l,\varepsilon}, \quad n = 0,1,2,\dots$$

где $\zeta_n(x)$ — срезающие функции из леммы 1. Так как при этом $\operatorname{support}\zeta_n \cap \operatorname{support} u_0 = \varnothing$, при $n = 0,1,2,\dots$, то из (7) будем иметь

$$\frac{1}{2}\int\limits_{R_l^N} \zeta_n^{m+1} u^2 X_{l,\varepsilon}\,dx = -\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} a(|x|)\,D(u^m)\,Du\,\zeta_n^{m+1} X_{l,\varepsilon}\,dx\,d\tau -$$

$$-(m+1)\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} a(|x|)D(u^m)\,\zeta_n^m\,D\,\zeta_n\,u\,X_{l,\varepsilon}\,dx\,d\tau -$$

$$-\int_0^t \int_{R_l^N} a(|x|)D(u^m)\zeta_n^{m+1}uDX_{l,\varepsilon}\,dx\,d\tau.$$

Используя теорему Д. Витали, перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ в последнем равенстве. После несложных преобразований приходим к равенству

$$\frac{1}{2}\int_{R_l^N} \zeta_n^{m+1}u^2(t)X_l\,dx + m\int_0^t \int_{R_l^N} a(|x|)u^{m-1}|Du|^2\zeta_n^{m+1}X_l\,dx\,d\tau =$$

$$-(m+1)\int_0^t \int_{R_l^N} a(|x|)D(u^m)\,\zeta_n^m D\zeta_n u\,X_l\,dx\,d\tau- \tag{10}$$

$$-\int_0^t \int_{R_l^N} a(|x|)D(u^m)\,\zeta_n^{m+1}\,u\,DX_l\,dx\,d\tau = I_1 + I_2.$$

Представим I_1 в виде

$$I_1 = -m(m+1)\int_0^t \int_{R_l^N} a(|x|)u^m \cdot Du \cdot \zeta_n^m D\zeta_n X_l\,dx\,d\tau.$$

Далее, используя неравенство Юнга, получим оценку

$$|I_1| \le \frac{m(m+1)}{2}\varepsilon^2 \int_0^t \int_{R_l^N} a(|x|)u^{m-1} \cdot |Du|^2 \cdot \zeta_n^{m+1}X_l\,dx\,d\tau +$$

$$+\frac{m(m+1)}{2\varepsilon^2}\int_0^t \int_{R_l^N} a(|x|)u^{m+1} \cdot \zeta_n^{m-1}|D\zeta_n|^2 X_l\,dx\,d\tau, \tag{11}$$

при $\forall\,\varepsilon > 0$.

Так как

$$I_2 = -\frac{m}{m+1}\int_0^t \int_{R_l^N} a(|x|) \cdot D(u^{m+1})\zeta_n^{m+1}DX_l\,dx\,d\tau,$$

то, применяя интегрирование по частям к I_2, будем иметь:

$$I_2 = \frac{m}{m+1}\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N}\left\{u^{m+1}\sum_{j=1}^N\left[a(|x|)\zeta_n^{m+1}(X_l)_{x_j}\right]_{x_j}\right\}dx\,d\tau =$$

$$= \frac{m}{m+1}\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N}u^{m+1}\left[\sum_{j=1}^N a(|x|)_{x_j}(X_l)_{x_j}\right]\zeta_n^{m+1}\,dx\,d\tau +$$

$$+\frac{m(m+1)}{m+1}\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N}u^{m+1}\left[\sum_{j=1}^N \zeta_{nx_j}(X_l)_{x_j}\right]\zeta_n^{m}a(|x|)\,dx\,d\tau +$$

$$+\frac{m}{m+1}\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N}u^{m+1}a(|x|)\zeta_n^{m+1}\left(\sum_{j=1}^N (X_l)_{x_jx_j}\right)dx\,d\tau.$$

Так как $(X_l)_{x_jx_j}=0$; $(X_l)_{x_j}=0$, при $j>l$; $a(|x|)_{x_j}\le 0$, при $j=1,2,\ldots,l$, то на основании леммы 1 для I_2 получим оценку

$$I_2 \le \frac{C2^{n+1}}{\rho^{|\alpha|+2}}\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N}u^{m+1}\zeta_n^m X_l\,dx\,d\tau. \tag{12}$$

Из (10), (11) и (12) получим соотношение

$$\frac{1}{2}\int\limits_{R_l^N}\zeta_n^{m+1}u^2X_ldx + \left(m-\frac{m(m+1)}{2}\varepsilon^2\right)\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N}a(|x|)u^{m-1}|Du|^2\zeta_n^{m+1}X_l\,dx\,d\tau \le$$

$$\le \frac{m(m+1)}{2\varepsilon^2}\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N}a(|x|)u^{m+1}\zeta_n^{m-1}|D\zeta_n|^2X_l\,dx\,d\tau + C\frac{2^{n+1}}{\rho^{|\alpha|+2}}\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N}u^{m+1}\zeta_n^mX_l\,dx\,d\tau.$$

Так как $\zeta_n^m(x)\le\zeta_n^{m-1}(x)$, на основании леммы 1 имеем:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{R_l^N}\zeta_n^{m+1}u^2X_ldx + \left(m-\frac{m(m+1)}{2}\varepsilon^2\right)\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N}a(|x|)u^{m-1}|Du|^2\zeta_n^{m+1}X_l\,dx\,d\tau \le$$

$$\leq 2\left(\frac{m(m+1)}{2\varepsilon^2}+C\right)\frac{2^{2n}}{\rho^{|\alpha|+2}}\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} u^{m+1}\zeta_n^{m-1}X_l\,dx\,d\tau.$$

Полагая в последнем неравенстве $\varepsilon=\sqrt{\frac{1}{m+1}}$, и замечая, что

$$\zeta_n^{m-1}(x)\leq\zeta_{n+1}^{2s},\ \text{при любом } s>0,$$

будем иметь:

$$\int\limits_{R_l^N}\zeta_n^{m+1}u^2X_l dx+\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} a(|x|)u^{m-1}|Du|^2\zeta_n^{m+1}X_l\,dx\,d\tau\leq$$
$$\leq C(m,N,\alpha)\frac{2^{2n}}{\rho^{|\alpha|+2}}\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} u^{m+1}\zeta_{n+1}^{2s}X_l\,dx\,d\tau. \tag{13}$$

Пусть $\nu_n(x,t)=u^{\frac{m+1}{2}}\zeta_n^s$, $\mu=\frac{4}{m+1}$, и выберем s удовлетворяющим условию:

$$s>\frac{(m+1)^2}{4}.$$

Из неравенства (13) после несложных преобразований будем иметь:

$$\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{R_l^N}\nu_n^{\mu}X_l dx+\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} a(|x|)|D\nu_n|^2X_l\,dx\,d\tau\leq$$
$$\leq C(m,N,\alpha)\frac{2^{2n}}{\rho^{|\alpha|+2}}\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} X_l\nu_{n+1}^2\,dx\,d\tau. \tag{14}$$

К внутреннему интегралу правой части неравенства (14) применим весовое неравенство Соболева–Гальярдо–Ниренберга [10] ($\nu_{n+1}(x,t)$ имеет компактный носитель в R_l^N при любом $t>0$), будем иметь:

$$\int\limits_{R_l^N} X_l\nu_{n+1}^2dx\leq C\left(\int\limits_{R_l^N} X_l|D\nu_{n+1}|^2dx\right)^B\cdot\left(\int\limits_{R_l^N} X_l\nu_{n+1}^{\mu}dx\right)^{\frac{2(1-B)}{\mu}}, \tag{15}$$

где B определяется из условия

$$\frac{N+l}{2}=\frac{(N+l-2)B}{2}+\frac{(N+l)(1-B)}{\mu}. \tag{16}$$

Из (16) находим B и $(1-B)$

$$B=\frac{\beta_l-2}{\beta_l+2},\ 1-B=\frac{4}{\beta_l+2}, \tag{17}$$

$\beta_l=(N+l)(m-1)+2$ — аналог постоянной Баренблатта для областей вида R_l^N.

Так как

$$\int\limits_{R_l^N} X_l|D\nu_{n+1}|^2\,dx\leq$$

$$\leq Ca(\rho)^{-B}\left(\int\limits_{R_l^N} X_l a(|x|)|D\nu_{n+1}|^2dx\right)^B\cdot\left(\int\limits_{R_l^N} X_l\nu_{n+1}^{\mu}dx\right)^{\frac{2(1-B)}{\mu}}, \tag{18}$$

то интегрируя (18) по времени от 0 до t, и применяя неравенство Гёльдера к правой части полученного соотношения, из (15) получим:

$$\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} X_l\,\nu_{n+1}^2\,dx\,d\tau\leq$$

$$\leq Ca(\rho)^{-B}t^{1-B}\left(\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} X_l\,a(|x|)|D\nu_{n+1}|^2\,dx\right)^B\cdot\left(\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{R_l^N} X_l\,\nu_{n+1}^{\mu}\,dx\right)^{\frac{2(1-B)}{\mu}}. \tag{19}$$

Из (14) на основании (19) получим соотношение

$$\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{R_l^N} X_l\,\nu_n^{\mu}\,dx+\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} X_l\,a(|x|)|D\nu_n|^2\,dx\,d\tau\leq$$

$$\leq C\frac{(a(\rho)\cdot t)^{1-B}\cdot 2^{2n}}{\rho^2}\left(\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} X_l\,a(|x|)|D\nu_{n+1}|^2dx\right)^B\cdot\left(\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{R_l^N} X_l\,\nu_{n+1}^{\mu}\,dx\right)^{\frac{2(1-B)}{\mu}}.$$

Далее, используя неравенство Юнга к правой части последнего неравенства для любого $\varepsilon>0$, получим оценку

$$\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{R_l^N} X_l\,\nu_n^{\mu}\,dx+\int\limits_0^t\int\limits_{R_l^N} X_l\,a(|x|)|D\nu_n|^2\,dx\,d\tau\leq$$

$$\leq \varepsilon \int_0^t \int_{R_l^N} X_l\, a(|x|)|D\nu_{n+1}|^2\, dx\, d\tau + C(\varepsilon) 2^{\frac{Cn}{1-B}} \frac{t \cdot a(\rho)}{\rho^{\frac{2}{1-B}}} \left[\sup_{0<\tau<t} \int_{R_l^N} X_l\, \nu_{n+1}^{\mu}\, dx \right]^{\frac{2}{\mu}}. \quad (20)$$

Так как последовательности

$$A_n = \sup_{0<\tau<t} \int_{R_l^N} X_l\, \nu_n^{\mu}\, dx \quad \text{и} \quad B_n = \int_0^t \int_{R_l^N} X_l a(|x|)\, |D\nu_n|^2\, dx\, d\tau$$

ограничены при любых значениях ρ и t, и кроме того A_n — неубывающая последовательность, то применяя к соотношению (20) лемму 2, получим оценку

$$\sup_{0<\tau<t} \int_{R_l^N} X_l\, \nu_0^{\mu}\, dx \leq Cta(\rho)\rho^{-\frac{2}{1-B}} \left[\sup_{0<\tau<t} \int_{R_l^N} X_l\, \nu_{\infty}^{\mu}\, dx \right]^{\frac{2}{\mu}}, \quad (21)$$

где

$$\nu_{\infty}(x,t) = u^{\frac{m+1}{2}} \zeta_{\infty}^{s}$$

и

$$\zeta_{\infty}(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq \left(\frac{1}{2} - \xi\right)\rho, \\ 1, & \left(\frac{1}{2} - \xi\right)\rho < |x| \leq (1+\xi)\rho, \\ 0, & |x| > (1+\xi)\rho. \end{cases}$$

Из неравенства (21) следует соотношение

$$\sup_{0<\tau<t} \int_{B^l_{\rho(1+\frac{1}{2}\xi)} \setminus B^l_{\rho(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\xi)}} X_l\, u^2 dx \leq$$

$$\leq Cta(\rho)\rho^{-\frac{2}{1-B}} \left[\sup_{0<\tau<t} \int_{B^l_{\rho(1+\xi)} \setminus B^l_{\rho(\frac{1}{2}-\xi)}} X_l\, u^2 dx \right]^{\frac{2}{\mu}}. \quad (21')$$

Далее, подберем $\xi = \delta 2^{-j}$, где $0 < \delta < \frac{1}{4}$ и рассмотрим последовательности

$$\rho_j = \rho(1+\delta 2^{-j}),\ \overline{\rho}_j = \rho\left(\frac{1}{2} - \delta 2^{-j}\right), \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Обозначая $U_j^l = B_{\rho_j}^l \setminus B_{\bar{\rho}_j}^l$ из $(21')$ будем иметь

$$I_{j+1} = \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{U_{j+1}^l} X_l u^2 dx \leq C b^j \cdot t a(\rho) \rho^{-\frac{2}{1-B}} \cdot I_j^{\frac{2}{\mu}}, \tag{22}$$

где $b > 1$.

На основании леммы (5.6) в [6] из (22) следует, что $I_j \to 0$ при $j \to \infty$, если только

$$t \cdot a(\rho) \rho^{-\frac{2}{1-B}} \cdot I_0^{\frac{2}{\mu}-1} \leq C_0, \tag{23}$$

где C_0 — достаточно малая постоянная, зависящая только от параметров задачи.

Таким образом, если переменные ρ и t связаны соотношением (23), то имеет место равенство

$$I_\infty = \int\limits_{B_\rho^l \setminus B_{\rho\setminus 2}^l} X_l u^2 dx = 0, \tag{23'}$$

где $I_\infty = \lim\limits_{j\to\infty} I_j$.

Используя лемму 3, усилим неравенство (23) заменяя I_0 на

$$\mu_l(0) = \int\limits_{R_l^N} X_l u_0^2 dx.$$

После замены условие (23) принимает вид

$$t \cdot a(\rho) \rho^{-\frac{2}{1-B}} \cdot \left(\int\limits_{R_l^N} X_l u^2 dx \right)^{\frac{2}{\mu}-1} \leq C_0. \tag{24}$$

Из (24) для ρ имеем оценку

$$\rho \geq C_2 t^{\frac{2}{\beta_l+2(|\alpha|+1)}} \left(\int\limits_{R_l^N} X_l u_0^2 dx \right)^{\frac{m-1}{\beta_l+2(|\alpha|+1)}}. \tag{25}$$

Учитывая $(23')$, на основании (25) мы можем утверждать, что решение $u(x,t)$ равно нулю для всех (x,t), удовлетворяющих условию

$$|x| \geq C_3 t^{\frac{2}{\beta_l+2(|\alpha|+1)}} \left(\int\limits_{R_l^N} X_l u_0^2 dx \right)^{\frac{m-1}{\beta_l+2(|\alpha|+1)}},$$

т.е. функция $u(x,t)$ обладает свойством конечной скорости распространения возмущений. Докажем соотношение (8). В неравенстве Соболева–Гальярдо–Ниренберга (15) выберем $\mu = \frac{2}{m+1}$, тогда из (16) для B и $1-B$ получим значения

$$B = \frac{m(N+l)}{m(N+l)+2}, \quad 1-B = \frac{2}{m(N+l)+2}. \tag{26}$$

Обозначим через $P_j = \sup\limits_{0<\tau<t} \int\limits_{U_j^l} X_l\, u(x,\tau)\, dx$, тогда для некоторой константы $C_4 > 0$ имеем

$$P_j \geq C_4 \rho^{(N+l)\frac{1}{2}} \cdot \sup_{0<\tau<t} \left(\int\limits_{U_j^l} X_l u^2(x,\tau)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

Неравенство (22) для выбранного значения μ, учитывая (26), имеет вид

$$\begin{gathered} \sup_{0<\tau<t} \left(\int\limits_{U_j^l} X_l u^2\, dx \right) \leq \\ \leq C_5 b^j t a(\rho) \rho^{-(m(N+l)+2)} \left(\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{U_{j-1}^l} X_l u\, dx \right)^{m+1}. \end{gathered} \tag{28}$$

Из (27) и (28) следует

$$\begin{gathered} P_j \leq C_6 \rho^{(N+l)\frac{1}{2}} \left(b^j t a(\rho) \rho^{-(\beta_l+(N+l))} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot P_{j-1}^{\frac{m+1}{2}} = \\ = C_6 \left(b^j t \rho^{-(\beta_l+|\alpha|} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot P_{j-1}^{\frac{m+1}{2}}. \end{gathered} \tag{29}$$

Как и в случае (22) из (29) следует, что $P_j \to 0$ как только

$$t \rho^{(-\beta_l+|\alpha|)} P_0^{m-1} \leq C_7,$$

где C_7 — достаточно малая константа. На основании леммы 5, отсюда вытекает, что $u(x,t) = 0$ почти для всех (x,t), удовлетворяющих условию

$$|x| \geq C_8 t^{\frac{1}{\beta_l+|\alpha|}} \left(\int\limits_{R_l^N} X_l u_0(x) dx \right)^{\frac{m-1}{\beta_l+|\alpha|}}. \tag{30}$$

Так как по предположению $|x| > \rho/2 > 2\rho_0$, то $u(x,t) = 0$ почти всюду для всех (x,t)

$$|x| \geq 4\rho_0 + C_8 t^{\frac{1}{\beta_l+|\alpha|}} \left(\int\limits_{R_l^N} X_l u_0(x) dx \right)^{\frac{m-1}{\beta_l+|\alpha|}}.$$

Следовательно для радиуса носителя $\zeta(t)$ имеем оценку

$$\zeta(t) \leq 4\rho_0 + C_8 t^{\frac{1}{\beta_l+|\alpha|}} \left(\int\limits_{R_l^N} X_l u_0(x) dx \right)^{\frac{m-1}{\beta_l+|\alpha|}}.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Прежде всего отметим, что из результатов работы [3], которые имеют место и в случае $m > 1$, левая часть соотношения (9) конечна при любом $t > 0$.

Из теоремы 1 для уравнения однородной диффузии (что соответствует случаю $a(|x|) = |x|^\alpha$, и $\alpha = 0$) легко получить оценку снизу для решения задачи (1)–(3) в равномерной метрике. В самом деле, для любого $t > 0$ имеем

$$\int\limits_{R_l^N} X_l\, u(x,t)\, dx = \int\limits_{|x| \leq \zeta(t)} X_l\, u(x,t)\, dx \leq C(N) \Big(\sup_{x \in R_l^N} u(x,t) \Big) \cdot \zeta(t)^{l+N}. \quad (31)$$

Так как в рассматриваемом случае для любого $t > 0$

$$\int\limits_{R_l^N} X_l\, u(x)\, dx = \int\limits_{R_l^N} X_l\, u_0(x)\, dx \quad \text{(закон сохранения момента)},$$

то из (31) при

$$t > \rho_0^{(\beta_l+|\alpha|)} \left(\int\limits_{R_l^N} X_l\, u_0(x)\, dx \right)^{-(m-1)}$$

получим оценку

$$\sup_{x \in R_l^N} u(x,t) \geq C(m,N,l) t^{-\frac{N+l}{\beta_l}} \left(\int\limits_{R_l^N} X_l\, u_0(x)\, dx \right)^{\frac{2}{\beta_l}}. \quad (32)$$

Используя результат работы [3], который имеет место и в случае $m > 1$, на основании (32) получаем (9).

Теорема 2 доказана.

4 Доказательство существования решения начально-краевой задачи (1)–(3)

Доказательство проведем пока для случая ограниченной области $\Omega = R_l^N \cap B_R = B_R^l$ при произвольном $R > \rho_0$ (ρ_0 — радиус носителя начальной функции $u_0(x)$). То есть задача состоит в определении решения начально-краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(a(|x|)D(u^m)\right), \quad m > 1, \tag{1$'$}$$

$$u(x,\tau) = 0, \quad (x,\tau) \in \partial\Omega \times (t > 0), \tag{2$'$}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \tag{3$'$}$$

в классе функций

$$u(x,\tau) \in L^{\infty}\left(0,t;L^2(\Omega)\right), \; u^m, u^{\frac{m+1}{2}} \in L^2\left(0,t;\overset{\circ}{W}_{2,\alpha,\omega}(\Omega)\right), \; \frac{\partial u}{\partial \tau} \in L^2(\Omega\times(0,t)),$$

с начальной функцией, удовлетворяющей условиям

$$\operatorname{support} u_0(x) \subset B_l, \quad u_0 \in L^2(B^l_{\rho_0}), \quad u_0(x) \geq 0.$$

Наиболее подходящим методом доказательства существования решения задачи $(1')$–$(3')$ в данном случае является метод компактности, изложенный в монографии [8], и примененный в теореме 12.2. Применим упомянутый метод для доказательства существования решения задачи $(1')$–$(3')$.

Для последовательных приближений $u_n(x,\tau)$ Галёркина соотношение 12.29 теоремы 12.2 в [8] в нашем случае имеет вид

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\int\limits_{\Omega} u_n^2(x,\tau)\,dx + \frac{4}{(m+1)^2}\int\limits_{\Omega} a(|x|)\left|D\left(u_n^{\frac{m+1}{2}}\right)\right|^2 dx = 0.$$

Интегрируя данное равенство от 0 до t, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u_n^2(x,\tau)\,dx + \frac{4}{(m+1)^2}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} a(|x|)\left|D\left(u_n^{\frac{m+1}{2}}\right)\right|^2 dx\,d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u_{0n}^2(x)\,dx.$$

Так как по определению $u_{0n}(x) \to u_0(x)$ в $L_2(\Omega)$, то правая часть полученного соотношения ограничена. Поэтому

$$u_n(x,\tau) \quad \text{ограничены в } L^{\infty}\left(0,t;L^2(\Omega)\right),$$

$$u_n^{\frac{m+1}{2}}(x,\tau) \quad \text{ограничены в } L^2\left(0,t;\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}(\Omega)\right).$$

Последнее утверждение следует из неравенства (5.17) теоремы 5.1 в [7]. В неравенстве (5.17) полагаем $\mu(x) = |x|^\alpha$, $\nu(x) = c_0^2\omega(x)$, $r(x) = \omega(x)$, $p = q = 2$, $c_0 = \frac{1}{2C}$, $m = 0$, $l = 1$. Показатель $\omega(x)$ подбирается так, чтобы условия теоремы 5.1 в [7] выполнялись. Тогда на основании (5.17) для $v(x,\tau) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}(\Omega)$ при любом $\tau > 0$ имеем

$$\int\limits_\Omega \omega(x)v^2(x,\tau)\,dx \le c\int\limits_\Omega |x|^\alpha |D(v(x,\tau))|^2\,dx.$$

Отсюда, заменяя $v(x,\tau)$ на $u_n^{\frac{m+1}{2}}$, а затем интегрируя полученное неравенство от 0 до t, получим

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \omega(x)\,u_n^{m+1}\,dx\,d\tau \le c\int\limits_0^t\int\limits_\Omega |x|^\alpha \left|D\left(u_n^{\frac{m+1}{2}}\right)\right|^2\,dx.$$

На основании полученного неравенства и соотношения 12.29 в [8], для нормы $u_n^{\frac{m+1}{2}}(x,\tau)$ в пространстве $L^2\big(0,t;\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}(\Omega)\big)$ имеем оценку

$$\left\|u_n^{\frac{m+1}{2}}(x,\tau)\right\|_{L^2(0,t;\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}(\Omega))} = \left(\int\limits_0^t \left\|u_n^{\frac{m+1}{2}}(\tau)\right\|^2_{\overset{\circ}{W}_{2,\alpha,\omega}(\Omega)}\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \omega(x)\,u_n^{m+1}(x,\tau)\,dx\,d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega |x|^\alpha \left|D\left(u^{\frac{m+1}{2}}\right)\right|^2\,dx\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le c\left(\int\limits_0^t\int\limits_\Omega |x|^\alpha \left|D\left(u^{\frac{m+1}{2}}\right)\right|^2\,dx\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \le c\left(\int\limits_\Omega u_{0n}^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно $u_n^{\frac{m+1}{2}}(x,\tau)$ ограничены в $L^2(0,t;\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}(\Omega))$. Для выполнения неравенства (5.17) в [7] необходимо выполнение условия A для потенциала $V(x) = \frac{\nu(x)}{\mu(x)}$ и условий (5.13) и (5.15). Эти условия выполняются для функции $\omega(x)$ (которая будет определена ниже) при $N \ne 2$. В нашем случае выполняется условие π-погружения рассматриваемых кубов Q_{d_x}, и следовательно кубы $Q_{\hat{d}_x}$, где $d_x = \hat{d}_x(1-\varepsilon)$ — компактно вложены в Ω при $\varepsilon > 0$. Далее перейдем к оценке функционала $a(u,v)$ (12.32) в [8]. Для уравнения

$(1')$ функционал $a(u,v)$ с точностью до константы определяется в виде

$$a(u,v)=\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\Omega}|x|^{\alpha}\,u^{m-1}u_{x_j}\,v_{x_j}\,dx=-\frac{1}{m}\int\limits_{\Omega}u^{m}\mathrm{div}\left(|x|^{\alpha}\cdot Dv\right)dx.$$

Представляя $\mathrm{div}\left(|x|^{\alpha}\cdot Dv\right)$ в виде

$$\mathrm{div}\left(|x|^{\alpha}Dv\right)=\alpha|x|^{\alpha-2}\sum_{j=1}^{N}x_j\,v_{x_j}+|x|^{\alpha}\Delta v,$$

для модуля функционала $a(u,v)$ получим оценку

$$|a(u,v)|\le N|\alpha|\left(\int\limits_{\Omega}u^{m+1}|x|^{(\alpha-1)\left(\frac{m+1}{m}\right)}dx\right)^{\frac{m}{m+1}}\cdot\left(\int\limits_{\Omega}|Dv|^{m+1}\,dx\right)^{\frac{1}{m+1}}+$$

$$+\left(\int\limits_{\Omega}u^{m+1}|x|^{\alpha\left(\frac{m+1}{m}\right)}dx\right)^{\frac{m}{m+1}}\left(\int\limits_{\Omega}|\Delta v|^{m+1}\,dx\right)^{\frac{1}{m+1}}\le$$

$$\le c\left[\left(\int\limits_{\Omega}u^{m+1}\cdot|x|^{(\alpha-1)\left(\frac{m+1}{m}\right)}dx\right)^{\frac{m}{m+1}}+\left(\int\limits_{\Omega}u^{m+1}|x|^{\alpha\left(\frac{m+1}{m}\right)}dx\right)^{\frac{m}{m+1}}\right]\cdot\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^r(\Omega)}.$$

Здесь мы использовали теорему вложения с $r=\left(\frac{m-1}{2}\right)\frac{N}{m+1}+2$.

Далее из элементарного неравенства

$$(a+b)^{\frac{m}{m+1}}\le a^{\frac{m}{m+1}}+b^{\frac{m}{m+1}}\le 2^{\frac{m}{m+1}}(a+b)^{\frac{m}{m+1}},\quad a\ge 0,\ b\ge 0,$$

для функционала $a(u,v)$ имеем

$$|a(u,v)|\le c(\alpha,N,m)\left(\int\limits_{\Omega}u^{m+1}\cdot|x|^{\alpha\left(\frac{m+1}{m}\right)}\left(1+|x|^{-\frac{m+1}{m}}\right)dx\right)^{\frac{m}{m+1}}\cdot\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^r(\Omega)}.$$

Введем в рассмотрение функцию $\omega(x)$:

$$\omega(x)=\begin{cases}2|x|^{\alpha-2}, & \text{при } |x|\le 1,\\ 2|x|^{\alpha\left(\frac{m+1}{m}\right)}, & \text{при } |x|>1.\end{cases}$$

Тогда для функционала $a(u,v)$ получим оценку

$$|a(u,v)|\le c(\alpha,N,m)\left(\int\limits_{\Omega}u^{m+1}\omega(x)\,dx\right)^{\frac{m}{m+1}}\cdot\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^r(\Omega)}.$$

При значениях α, удовлетворяющих условию

$$-\frac{mN}{m+1} < \alpha \le 0, \quad 2 - N < \alpha \le 0 \quad (N > 2),$$

$\omega(x)$ — принадлежит классу A-Макенхаупта (см. пример 1.3 в [11]). Поэтому пространство функций с конечной нормой

$$\|f(x)\|_{L_{2,\omega(x)}} = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^2 \omega(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

образует весовое банаховое пространство лебеговского типа.

Итак, окончательно имеем

$$|a(u,v)| \le c \left\| u^{\frac{m+1}{2}} \right\|^{\frac{2m}{m+1}}_{L_{2,\omega(x)(\Omega)}} \cdot \|v\|_{\overset{\circ}{W}{}^r_2(\Omega)},$$

то есть норма функционала $a(u,v)$ имеет оценку

$$\|a(u,v)\|_{W_2^{-r}(\Omega)} \le c \left\| u^{\frac{m+1}{2}} \right\|^{\frac{2m}{m+1}}_{L_{2,\omega(x)(\Omega)}}.$$

Заменяя в последнем неравенстве u на $u_n(x,\tau)$, получим

$$\|a(u_n(\tau),v)\|_{W_2^{-r}(\Omega)} \le c \left\| u_n^{\frac{m+1}{2}}(\tau) \right\|^{\frac{2m}{m+1}}_{L_{2,\omega(x)(\Omega)}}.$$

Возведя обе части в степень $\frac{m+1}{m}$, и проинтегрировав в пределах от 0 до t, получим

$$\int\limits_0^t \|a(u_n(\tau),v)\|^{\frac{m+1}{m}}_{W_2^{-r}(\Omega)} d\tau \le c \int\limits_0^t \left\| u_n^{\frac{m+1}{2}}(\tau) \right\|^2_{L_{2,\omega(x)(\Omega)}} d\tau \le$$
$$\le c \left\| u_n^{\frac{m+1}{2}} \right\|^2_{L^2(0,t;\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega(x)}(\Omega))}.$$

Из этой оценки следует, что последовательность функционалов

$$a(u_n(\tau),v) \quad \text{ограничены в } L^{\frac{m+1}{m}}\left(0,t;W_2^{-r}(\Omega)\right).$$

Далее, необходимо определить классы функций B_0, B, B_1. Пусть

$$B_0 = \left\{ v \,\middle|\, \int\limits_{\Omega} |x|^{\alpha} \left| D\left(v^{\frac{m+1}{2}}\right)\right|^2 dx < \infty \right\}.$$

(Напомним, что норма в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega(x)}(\Omega)$ определяется в виде

$$\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega(x)}(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |x|^\alpha |Dv|^2\, dx + c_0^2 \int\limits_\Omega \omega(x)\, v^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

где c_0 — произвольно малая положительная константа, не зависящая от весовых функций и от функции v.) В качестве пространства B выберем пространство $L_{m+1,\omega(x)}(\Omega)$, и наконец пусть $B_1 = W_2^{-r}(\Omega)$.

Используя теорему 5.1 в [7], полагая $p = q = 2$, $m = 0$, $l = 1$, $r(x) = \omega(x)$, $\mu(x) = |x|^\alpha$, и $\nu(x) = c_0^2\,\omega(x)$ (c_0 — достаточно малая подобранная константа), из оценки (5.17) в [7] получим

$$\left(\int\limits_\Omega \omega(x)\, v^2(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \le c \left\{ \int\limits_\Omega \left(|x|^\alpha |Dv|^2 + c_0^2\, \omega(x)\, v^2(x) \right) dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

отсюда

$$\left(\int\limits_\Omega \omega(x)\, v^2(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \le c^* \left(\int\limits_\Omega |x|^\alpha |Dv|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $c^* = c^*(c_0, c)$.

Полагая в этом неравенстве $v(x)$ равным $u^{\frac{m+1}{2}}(x,\tau)$, будем иметь

$$\left(\int\limits_\Omega \omega(x)\, u^{m+1}(x,\tau)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \le c^* \left(\int\limits_\Omega |x|^\alpha \left| D\left(u^{\frac{m+1}{2}} \right) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

или

$$\|u(\tau)\|_{L_{m+1,\omega(x)(\Omega)}} = \|u(\tau)\|_B \le (c^*)^{\frac{2}{m+1}} \left(\int\limits_\Omega |x|^\alpha \left| D\left(u^{\frac{m+1}{2}} \right) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{m+1}}.$$

Отсюда следует, что $B_0 \subset B$. На основании замечания, сделанного в [7] (стр. 85 в конце работы) вложение $B_0 \subset B$ является компактным. В самом деле, из сделанного замечания следует, что вложение

$$\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega(x)}(\Omega) \subset L_{2,\omega(x)}(\Omega)$$

также компактно, так как $\overset{\circ}{W}_{2,\alpha,\omega(x)}(\Omega)$ является пополнением пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\left(\int\limits_\Omega |x|^\alpha |Dv|^2\, dx + c_0^2 \int\limits_\Omega \omega(x)\, v^2(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отметим также, что условия теоремы 5.1 в [7] для ограниченных областей Ω при выбранных весовых функциях выполняются (именно здесь используется ограниченность области Ω). Нетрудно проверить также выполнение условия $\lim f(x) = 0$, $x \to \partial\Omega$, в замечании [7] (стр. 85 в конце работы).

Для доказательства существования решения остается применить теорему 12.1 в [8], и повторить почти дословно пункт 4) в доказательстве теоремы 12.2. Итак, для ограниченных областей утверждение доказано. Перейдем к случаю неограниченной области R_l^N.

Пусть $u_n(x,t)$ — решение начально-краевой задачи

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \mathrm{div}\ (a(|x|) \cdot D(u_n^m)), \quad m > 1, \tag{1_n}$$

$$u_n = 0, \quad (x,t) \in \partial B_n^l \times (t > 0), \tag{2_n}$$

$$u_n(x,0) = u_0(x), \quad x \in B_n^l, \tag{3_n}$$

в области $\{B_n^l \times (0,t)\}$, при $u_n(x,\tau) \in L^\infty(0,t;L^2(B_n^l))$,

$$\frac{\partial u_n}{\partial \tau} \in L_2\left(\left\{B_n^l \times (0,t)\right\}\right), \quad u^m, u_n^{\frac{m+1}{2}} \in L^2\left(0,t; \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}\left(B_n^l\right)\right),$$

где $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}\left(B_n^l\right)$ — пополнение пространства $C_0^\infty(B_n^l)$ по норме

$$\left(c_0^2 \int\limits_{B_n^l} \omega(x)\, v^2(x)\, dx + \int\limits_{B_n^l} a(|x|)\, |Dv|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть, далее

$$v_n(x,\tau) = \begin{cases} u_n(x,\tau), & (x,\tau) \in \{B_n^l \times (0,t)\}, \\ 0, & (x,\tau) \in \{(R_l^N \setminus B_n^l) \times (0,t)\}. \end{cases}$$

Функции $v_n(x,\tau)$ также являются решениями задачи (1_n)–(3_n) соответственно в областях $\{B_n^l \times (0,t)\}$.

Покажем, что последовательность $v_n(x,\tau)$ является неубывающей последовательностью при $(x,\tau) \in \{R_l^N \times (0,t)\}$. Положим $Q_t = \{B_n^l \times (0,t)\}$, и пусть $\eta(x,\tau)$ – произвольная функция, принадлежащая $C_0^1([0,t); C_0^\infty(R_l^N))$, с $\eta(x,t) = 0$. Подберем n настолько большим, чтобы

$$\mathrm{support}\, \eta(x,\tau) \subset \{B_n^l \times [0,t)\}, \quad \text{при всех} \ \ 0 \le \tau \le t.$$

Тогда из (6) следует соотношение

$$\iint\limits_{Q_t} \big\{(v_n - v_{n+1})\eta_\tau + (v_n^m - v_{n+1}^m)\,\mathrm{div}(a(|x|)\cdot D\eta)\big\} dx\,d\tau = 0. \tag{33}$$

Представим $v_n^m - v_{n+1}^m$ в виде

$$v_n^m - v_{n+1}^m = \int\limits_0^1 \frac{d}{d\xi}(v_n\xi + (1-\xi)v_{n+1})^m d\xi =$$

$$= m\int\limits_0^1 \frac{d}{d\xi}(v_n\xi + (1-\xi)v_{n+1})^{m-1} d\xi \cdot (v_n - v_{n+1}) = b_n(x,\tau)(v_n - v_{n+1}),$$

где

$$b_n(x,\tau) = m\int\limits_0^1 \frac{d}{d\xi}(v_n\xi + (1-\xi)v_{n+1})^{m-1} d\xi, \quad b_n(x,\tau) \geq 0.$$

Построим гладкую аппроксимацию $b_{n,\varepsilon}(x,\tau)$ (которая будет уточняться) функции $b_n(x,\tau)$, и рассмотрим классическую начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \eta_\tau = -b_{n,\varepsilon}\mathrm{div}(a(|x|)D\eta) - \varphi(x,\tau) \ \text{ в } \ Q_t, \\ \eta(x,\tau) = 0 \ \text{ на } \ \partial Q_t, \\ \eta(x,t) = 0, \end{cases} \tag{34}$$

где $\varphi(x,\tau)$ — произвольная неотрицательная гладкая функция с компактным носителем в Q_t.

Пусть $\eta(x,\tau)$ — классическое решение рассматриваемой задачи, тогда из (33) получим

$$\iint\limits_{Q_t} (v_n - v_{n+1})\varphi(x,\tau)\,dx\,d\tau = \iint\limits_{Q_t} (b_n - b_{n,\varepsilon})(v_n - v_{n+1})\mathrm{div}(a(|x|)\cdot D\eta)\,dx\,d\tau,$$

Отсюда

$$\iint\limits_{Q_t} (v_n - v_{n+1})\varphi(x,\tau)\,dx\,d\tau \leq \left(\iint\limits_{Q_t} \frac{|b_n - b_{n,\varepsilon}|^2}{b_{n,\varepsilon}}|v_n - v_{n+1})|^2\,dx\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times\left(\iint\limits_{Q_t} b_{n,\varepsilon}(\mathrm{div}\,(a(|x|)\cdot D\eta))^2 dx\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{35}$$

Умножим обе части уравнения (34) на

$$\zeta(\tau)\cdot \operatorname{div}\,(a(|x|)D\eta),$$

где $\zeta(\tau)$ — гладкая неотрицательная функция, удовлетворяющая условию

$$\frac{1}{2}\le \zeta(\tau)\le 1,\quad \zeta_\tau\ge c>0,\quad \tau\in[0,t).$$

Затем проинтегрируем по области Q_t полученное равенство. В результате получим

$$\iint\limits_{Q_t}\eta_\tau\,\zeta(\tau)\operatorname{div}\,(a(|x|)\cdot D\eta)\,dx\,d\tau+\iint\limits_{Q_t}\zeta\, b_{n,\varepsilon}(\operatorname{div}(a(|x|)\cdot D\eta))^2dx\,d\tau+$$
$$+\iint\limits_{Q_t}\zeta\,\varphi(x,\tau)\operatorname{div}(a(|x|)\cdot D\eta)\,dx\,d\tau=0. \tag{36}$$

Используя равенство $\eta(x,t)=0$ при интегрировании по частям первого интеграла в левой части равенства (36), получим

$$\iint\limits_{Q_t}\eta_\tau\,\zeta(\tau)\operatorname{div}\,(a(|x|)\cdot D\eta)\,dx\,d\tau=-\iint\limits_{Q_t}\zeta(\tau)\,a(|x|)\cdot(D\eta)\cdot(D\eta_\tau)\,dx\,d\tau=$$
$$=-\frac{1}{2}\iint\limits_{Q_t}\zeta(\tau)\,a(|x|)[(D\eta)^2]_\tau\,dx\,d\tau\ge\frac{1}{2}\iint\limits_{Q_t}a(|x|)|D\eta|^2\cdot\zeta'(\tau)\,dx\,d\tau.$$

Следовательно из (36) имеем

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{Q_t}a(|x|)|D\eta|^2\zeta'(\tau)\,dx\,d\tau+\iint\limits_{Q_t}\zeta\,b_{n,\varepsilon}(\operatorname{div}\,(a(|x|)\cdot D\eta))^2dx\,d\tau\le$$
$$\le\iint\limits_{Q_t}\zeta\,a(|x|)\cdot D\varphi\cdot D\eta\,dx\,d\tau.$$

Применим к правой части полученного соотношения неравенство Юнга (используя также свойства функции $\zeta(\tau)$) будем иметь

$$\iint\limits_{Q_t}b_{n,\varepsilon}(\operatorname{div}(a(|x|)\cdot D\eta))^2dx\,d\tau+\iint\limits_{Q_t}a(|x|)\cdot|D\eta|^2dx\,d\tau\le c\iint\limits_{Q_t}a(|x|)\cdot|D\varphi|^2dx\,d\tau.$$

Возвращаясь к (35), получим

$$\iint\limits_{Q_t} (v_n - v_{n+1})\,\varphi(x,\tau)\ dx\,d\tau \le c\left(\iint\limits_{Q_t} a(|x|)\cdot|D\varphi|^2 dx\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\left(\iint\limits_{Q_t} \frac{|b_n - b_{n,\varepsilon}|^2}{b_{n,\varepsilon}}|v_n - v_{n+1})|^2\,dx\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{37}$$

Теперь нам необходимо доказать, что второй интеграл в правой части стремится к нулю независимо от функции φ. Для этого подберем подходящую аппроксимацию для $b_n(x,\tau)$. Выберем константы K и ε, так чтобы $K > \varepsilon > 0$, и определим при фиксированном значении n

$$b_{K,\varepsilon} = \min\{K, \max(b_n, \varepsilon)\}.$$

Далее, для $b_{K,\varepsilon}$ построим гладкую аппроксимацию $b^{(k)}_{K,\varepsilon} \to b_{K,\varepsilon}$ в пространстве $L^\infty(Q_t)$ (это возможно потому, что $b_{K,\varepsilon}$ — ограниченная измеримая функция), удовлетворяющую условию $b^{(k)}_{K,\varepsilon} \ge \varepsilon$. Тогда будем иметь

$$\iint\limits_{Q_t} \left|b_n - b^{(k)}_{K,\varepsilon}\right|^2 |v_n - v_{n+1}|^2\,dx\,d\tau \le$$
$$\le \iint\limits_{Q_t} |b_n - b_{K,\varepsilon}|^2|v_n - v_{n+1}|^2\,dx\,d\tau + 2\iint\limits_{Q_t} \left|b_{K,\varepsilon} - b^{(k)}_{K,\varepsilon}\right|^2|v_n - v_{n+1}|^2\,dx\,d\tau \le$$
$$\le 2\iint\limits_{Q_t} \left((b_n - K)_+ + \varepsilon\right)^2|v_n - v_{n+1}|^2\,dx\,d\tau +$$
$$+ 2\iint\limits_{Q_t} \left|b_{K,\varepsilon} - b^{(k)}_{K,\varepsilon}\right|^2|v_n - v_{n+1}|^2\,dx\,d\tau = I_1 + I_2.$$

Так как b_n является суммируемой в Q_t функцией, то при достаточно большом значении K

$$(b_n - K)_+ < \varepsilon \quad \text{почти всюду в } \ Q_t.$$

Следовательно для I_1 имеем

$$I_1 \le 8\varepsilon^2 \iint\limits_{Q_t} |v_n - v_{n+1}|^2 dx\,d\tau.$$

Далее, подбирая k также достаточно большим, для произвольного ε имеем

$$I_2 \le 2\varepsilon^2 \iint\limits_{Q_t} |v_n - v_{n+1}|^2 dx\, d\tau.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_{Q_t} \left|b_n - b_{K,\varepsilon}^{(k)}\right|^2 |v_n - v_{n+1}|^2 dx\, d\tau \le 10\varepsilon^2 \iint\limits_{Q_t} |v_n - v_{n+1}|^2 dx\, d\tau.$$

Полагая в (37) $b_{n,\varepsilon}$ равным $b_{K,\varepsilon}^{(k)}$, из (37) получим оценку

$$\iint\limits_{Q_t} (v_n - v_{n+1})\, \varphi(x,\tau)\, dx\, d\tau \le$$

$$\le c\varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\iint\limits_{Q_t} a(|x|) |D\varphi|^2 dx\, d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint\limits_{Q_t} |v_n - v_{n+1}|^2 dx\, d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Так как ε — произвольно и не зависит от $\varphi(x,\tau)$, то

$$\iint\limits_{Q_t} (v_n - v_{n+1})\, \varphi(x,\tau)\, dx\, d\tau \le 0.$$

По условию $\varphi(x,\tau)$ — произвольная неотрицательная гладкая функция, следовательно из последнего соотношения необходимо имеем

$$v_n \le v_{n+1} \quad \text{почти всюду в} \;\; Q_t,$$

т. е. $v_n(x,\tau)$ — неубывающая последовательность в Q_t. Вернемся к средним Галёркина. Как установлено в [8] (теорема 12.2) для любого решения $u_n(x,\tau)$ задачи (1_n)–(3_n) аппроксимации Галёркина $u_{n,k}$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{2} \int\limits_{B_n^l} u_{n,k}^2(x,t)\, dx + \frac{4}{(m+1)^2} \int\limits_0^t \int\limits_{B_n^l} a(|x|) \left| D\left(u_{n,k}^{\frac{m+1}{2}}\right)\right|^2 dx\, d\tau = \frac{1}{2} \int\limits_{B_n^l} u_{0k}^2(x)\, dx.$$

Отсюда после предельного перехода при $k \to \infty$ получим

$$\frac{1}{2} \int\limits_{B_n^l} u_n^2(x,t)\, dx + \frac{4}{(m+1)^2} \int\limits_0^t \int\limits_{B_n^l} a(|x|) \left| D\left(u_n^{\frac{m+1}{2}}\right)\right|^2 dx\, d\tau = \frac{1}{2} \int\limits_{B_n^l} u_0^2(x)\, dx.$$

Из последнего неравенства видно, что

$$\int_0^t \int_{B_n^l} a(|x|) \left| D\left(u_n^{\frac{m+1}{2}}\right)\right|^2 dx\, d\tau \le c, \quad n = 1, 2, \dots$$

Используя неравенство (5.17) теоремы 5.1 в [7], получим оценку (при выбранных весовых функциях).

$$\int_0^t \int_{B_n^l} \omega(x)\, u_n^{m+1}\, dx\, d\tau + \int_0^t \int_{B_n^l} a(|x|) \left| D\left(u_n^{\frac{m+1}{2}}\right)\right|^2 dx\, d\tau \le c, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда для последовательности $v_n^{\frac{m+1}{2}}(x,\tau)$ получим

$$\left\| v_n^{\frac{m+1}{2}}(x,\tau)\right\|_{L^2(0,t;\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}(R_l^N))} \le c.$$

Так как пространство $L^2(0,t;\overset{\circ}{W}_{2,\alpha,\omega}(R_l^N))$ является слабо-полным гильбертовым пространством (при выбранных весовых функциях), то существует такая функция $v(x,\tau) = u^{\frac{m+1}{2}}(x,\tau) \in L^2(0,t;\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}(R_l^N))$, и такая последовательность $v_{\tilde n}^{\frac{m+1}{2}}$ последовательности $v_n^{\frac{m+1}{2}}$, что $v_{\tilde n}^{\frac{m+1}{2}}$ сходится слабо к $v = u^{\frac{m+1}{2}}$ в пространстве $L^2(0,t;\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}(R_l^N))$. Так как с другой стороны по доказанному последовательность $v_{\tilde n}^{\frac{m+1}{2}}$ является неубывающей последовательностью, то по теореме Беппо — Леви $v_{\tilde n}^{\frac{m+1}{2}}$ сходится к $u^{\frac{m+1}{2}}$ почти всюду в $Q = (0,t) \times R_l^N$.

Пусть далее $\eta(x,\tau)$ — произвольная пробная функция с компактным носителем в R_l^N. Подберем $\tilde n$ так, чтобы

$$\operatorname{support} \eta(x,\tau) \subset \left\{[0,t) \times B_{\tilde n}^l\right\} \quad \text{при всех } \ 0 \le \tau \le t.$$

Тогда для решения $v_{\tilde n}$ начально-краевой задачи $(1_{\tilde n})$–$(3_{\tilde n})$ в области $\left\{[0,t) \times B_{\tilde n}^l\right\}$ имеем соотношение

$$\int_0^t \int_{R_l^N} -v_{\tilde n}\, \eta_\tau\, dx\, d\tau + \int_0^t \int_{R_l^N} a(|x|)\, D(v_{\tilde n}^m)\, D\eta\, dx\, d\tau = 0.$$

Применяя интегрирование по частям во втором интеграле, будем иметь

$$\int_0^t \int_{R_l^N} v_{\tilde n}\, \eta_\tau\, dx\, d\tau + \int_0^t \int_{R_l^N} v_{\tilde n}^m \operatorname{div}(a(|x|) \cdot D\eta)\, dx\, d\tau = 0.$$

К левой части равенства мы можем применить теорему Беппо — Леви. Поэтому, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\int\limits_0^t \int\limits_{R_l^N} u\,\eta_\tau\,dx\,d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_{R_l^N} u^m \operatorname{div}(a(|x|)\cdot D\eta)\,dx\,d\tau = 0. \tag{38}$$

Так как $\eta = \eta(x,\tau)$ — произвольная пробная функция с компактным носителем в R_l^N, то найденная нами функция $u = u(x,\tau)$ является очень слабым решением задачи (1)–(3), удовлетворяющим условиям

$$u^{\frac{m+1}{2}} \in L^2\left(0,t;\overset{\circ}{W}_{2,\alpha,\omega}\left(R_l^N\right)\right), \quad u(x,\tau) \in L^\infty\left(0,t;L^2\left(R_l^N\right)\right).$$

Чтобы применить интегрирование по частям в равенстве (38) необходимо, чтобы интеграл

$$I = \int\limits_0^t \int\limits_{R_l^N} a(|x|)\,D(u^m)\cdot D\eta\,dx\,d\tau$$

был конечным при любом $t > 0$.

Так как

$$D(u^m) = \frac{2m}{m+1}\cdot u^{\frac{m-1}{2}}\cdot D\left(u^{\frac{m-1}{2}}\right),$$

то подынтегральную функцию $a(|x|)\cdot D(u^m)\cdot D\eta$ можно оценить следующим образом:

$$a(|x|)\,|D(u^m)|\cdot|D\eta| \le \frac{m}{m+1}\left(a(|x|)\,u^{m-1}\cdot|D\eta| + a(|x|)\,\left|D\left(u^{\frac{m+1}{2}}\right)\right|^2\cdot|D\eta|\right).$$

Следовательно для модуля I имеем

$$|I| \le \frac{m}{m+1}\int\limits_0^t \int\limits_{R_l^N}\left(a(|x|)\,u^{m-1}\cdot|D\eta| + a(|x|)\left|D\left(u^{\frac{m+1}{2}}\right)\right|^2\cdot|D\eta|\right)dx\,d\tau \le$$

$$\le \frac{m}{m+1}\int\limits_0^t \int\limits_{R_l^N} |x|^\alpha\,u^{m-1}|D\eta|\,dx\,d\tau +$$

$$+\frac{m}{m+1}\int\limits_0^t \int\limits_{R_l^N} a(|x|)\left|D\left(u^{\frac{m+1}{2}}\right)\right|^2\cdot|D\eta|\,dx\,d\tau = \frac{m}{m+1}(I_1+I_2). \tag{39}$$

Оценим I_1, подбирая R так, чтобы $\operatorname{support}\eta(x,\tau) \subset B_R^l \times [0,t)$, будем иметь

$$I_1 \leq \max|D\eta| \int\limits_0^t \left(\int\limits_{B_R^l \cap \{|x|<1\}} |x|^\alpha u^{m-1}\,dx + \int\limits_{B_R^l \cap \{|x|\geq 1\}} |x|^\alpha u^{m-1}\,dx \right) d\tau =$$

$$= 2^{-\frac{m-1}{m+1}} \cdot \max|D\eta| \int\limits_0^t \left(\int\limits_{B_R^l \cap \{|x|<1\}} |x|^{\frac{2}{m+1}(m-1-|\alpha|)} [\omega(x)]^{\frac{m-1}{m+1}} \cdot u^{m-1}\,dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{B_R^l \cap \{|x|\geq 1\}} |x|^{-\frac{|\alpha|}{m}} [\omega(x)]^{\frac{m-1}{m+1}} u^{m-1}\,dx \right) d\tau.$$

При $|\alpha| \leq m-1$, и $R > 1$ имеем

$$I_1 \leq 2^{-\frac{m-1}{m+1}} \cdot R^{\frac{2(m-1-|\alpha|)}{m+1}} \cdot \max|D\eta| \int\limits_0^t \int\limits_{B_R^l} [\omega(x)]^{\frac{m-1}{m+1}} u^{m-1}\,dx.$$

Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$I_1 \leq C(m,R) \cdot t^{\frac{2}{m+1}} \max|D\eta| \cdot \left\| u^{\frac{m+1}{2}} \right\|^{\frac{2(m-1)}{m+1}}_{L^2(0,t;\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}(R_l^N))}.$$

Для I_2 будем иметь

$$I_2 \leq \max|D\eta| \cdot \left\| u^{\frac{m+1}{2}} \right\|^2_{L^2(0,t;\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha,\omega}(R_l^N))}.$$

Следовательно, I конечна при любом $t > 0$, т. е. функция $a(|x|) \cdot D(u^m) \cdot D\eta$ — локально интегрируема в $R_l^N \times (0,\infty)$. Поэтому в (38) во втором интеграле можно провести интегрирование по частям. И тогда мы придем к равенству (6), т. е. $u(x,\tau)$ — слабое решение задачи (1)–(3). Утверждение доказано полностью.

Список литературы

[1] **Антонцев С. Н.** О характере возмущений, описываемых решениями многомерных вырожденных параболических уравнений. Динамика сплошной среды. 1979. Вып. 40. С. 114–122.

[2] **Антонцев С. Н.** О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений. ДАН СССР. 1981. Т. 260. No 6. С. 1289–1293.

[3] **Баев А. Д., Тедеев Ал. Ф.** Оценка задачи Коши — Дирихле для дифференциального уравнения быстрой диффузии в областях типа октанта. Вестник Воронежского государственного университета. Серия физика, математика. 2010. No 3. С. 67–70.

[4] **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М., 1971. 512 с.

[5] **Еалашников А. С.** О понятии конечной скорости распространения возмущений УМН. 1979. Т. 34. Вып. 2. С. 199–200.

[6] **Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 736 с.

[7] **Лизоркин П. И., Отелбаев М.** Теоремы вложения и компактности для пространств соболевского типа с весами. Матем. сб. 1980. Т. 112 (154). No 1 (5). С. 56–85.

[8] **Лионс Ж. Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972. 580 с.

[9] **Тедеев Ал. Ф.** Финитность носителя решения задачи в области типа октанта. Вестник ВГУ. Серия Физика. Математика. 2014. No 4. С. 1–14.

[10] **Eidus D., Katin S.** The filtration equation in class of functions decreasing at infinity. Proceedings of the American Mathematical Society. 1994. Vol. 120. No 3. P. 825–830.

[11] **Dorothee. D. Horoske.** Sobolev spaces with muckenhoupt weights, singularities and inequalities. Georgian Math. J. 2008. V. 15. No 2. P. 263–280.

[12] **Katin S., Kersner R.** Disappearance of interfaces in finite time. Mechanica. 1983. V. 28. P. 117–120.

[13] **Adams R.** Sobolev Spaces. New York. Academic Press, 1975. P. 429.

[14] **Tedeev A. F.** The interface flow-up phenomenon and local estimates for doubly degenerate parabolic equations. Applicable Analysis. 2007. V. 86. No 6. P. 756–782.

[15] **Vazques I. L.** The porous medium equation. Clarendon Press. 2007. P. 586.