ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2017
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Дифференциальные уравнения в частных производных

УДК 517.954

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

Александр Федорович Тедеев

Северо-Осетинский государственный университет
имени К. Л. Хетагурова
Россия, 362025, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46
email: tedeev92@bk.ru

Аннотация

В данной работе рассматривается задача Коши–Дирихле нелинейного уравнения диффузии в первом квадранте со степенным вырождением на границе. Основным результатом работы является обобщение неравенства Аронсона–Бенилана, которое затем используется при получении точной оценки решения снизу. В работе также построены частные решения, которые подтверждают точность полученных оценок.

Ключевые слова: сильное решение, параболическое уравнение, неравенство Аронсона–Бенилана, начально-краевая задача.

Abstract

This paper deals with the Cauchy–Dirichlet problem for the nonlinear diffusion equation in the first quadrant with exponential degeneracy on the boundary. The main result of this paper generalizes the Aronson–Benilan inequality which is then used whenobtaining an explicit estimate of solution. The accuracy of the results are confirmed by the examples.

Keywords: strong solution, parabolic equation, inequality of Aronson–Benilan, initial value problem.

1 Введение

В данной работе рассматриваются неотрицательные решения начально-краевой задачи вида

$$u_t = (x^{\alpha}((u^m)_x))_x,\ (x,t) \in \{(0,\infty)\times(0,\infty)\}, \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0,\ t > 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_0(x) \geqslant 0. \tag{3}$$

Известно, что при $\alpha = 0$, и $u_0 \in L^1(R_+) \cap L^{\infty}(R_+)$ [2] существует точно одно слабое решение $u = u(x,t) \in C([0,\infty); L^1(R_+)]$ задачи Коши

$$u_t = ((u^m)_x)_x,\ (x,t) \in \{(-\infty,+\infty)\times(0,\infty)\}, \tag{1$'$}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2$'$}$$

в $C([0,\infty); L^1(R))$, которое удовлетворяет условию

$$\operatorname{ess\,inf} u_0 \leqslant u \leqslant \operatorname{ess\,sup} u_0. \tag{4}$$

Из соотношения (4) следует, что слабое решение является неотрицательной ограниченной функцией в области $Q = \{(0,\infty)\times(-\infty,+\infty)\}$. Кроме того, как следует из работы [1], слабое решение $u(t,x)$ задачи ($1'$), ($2'$) удовлетворяет неравенствам

$$-\frac{\theta u}{t} \leqslant u_t \leqslant \frac{\gamma u}{t}. \tag{5}$$

Если $u_t \notin L^1_{\mathrm{loc}}((0,\infty)\times(-\infty,\infty))$, то неравенство (5) понимается в слабом смысле, т. е. для $\forall\,\varphi(t,x) \in C_0^{\infty}((0,\infty)\times(-\infty,+\infty))$

$$-\theta\left(\frac{u}{t},\varphi\right) \leqslant (u_t,\varphi) \leqslant \gamma\left(\frac{u}{t},\varphi\right). \tag{5$'$}$$

Параметры θ и γ выражаются через постоянную Баренблатта для ($1'$), поскольку в ($1'$) $\gamma = 0$.

Неравенство Аронсона — Бенилана (5) обобщалось многими авторами [2], [3], [4], где получены точные оценки производной u_t при тех же условиях на начальную функцию. Необходимо также отметить, что неравенство (5) использовалось при доказательстве непрерывности слабого решения в работах [4], [5]. В работах [6], [7] неравенство Аронсона — Бенилана применялось при изучении асимптотики решения начально-краевой задачи дифференциального уравнения диффузии с конвективным членом. Можно привести и множество других примеров. Из сказанного следует, что неравенство (5) содержит в себе почти такой же объем информации, что и само дифференциальное уравнение.

В настоящей работе доказывается аналог левой части неравенства (5) для сильного решения задачи (1)–(3) в зависимости от степенного вырождения у границы, существование которого доказано в работе [8] при некоторых ограничениях на параметр α. В работе [8] также дается определение сильного решения задачи (1)–(3) в весовых пространствах соболевского типа.

Доказательства утверждений приводятся для случая размерности $N = 1$ с использованием методов, аналогичных методам работ [1], [9].

2 Основной результат

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 1 *Пусть* $u(x, t)$ *— сильное решение начально-краевой задачи* (1)–(3), $m > 1$, $m + 1 - \alpha > 0$, *тогда почти всюду в* $Q = \{(0, \infty) \times (0, \infty)\}$ *имеет место неравенство*

$$u_t \geqslant -\frac{1}{m+1-\alpha} \cdot \frac{u}{t}. \tag{6}$$

Доказательство. Вначале предположим, что $u_0(x) \in C_0^\infty(0, \infty)$, $u_0(x) \geqslant 0$, и рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_\varepsilon(t)) - \frac{\partial}{\partial x}\left(x^\alpha \left(\frac{\partial(u_\varepsilon^m)}{\partial x}\right)\right) = 0,\ (t, x) \in \{(0, \infty) \times (\delta, \infty)\}, \tag{1_ε}$$

$$u_\varepsilon(0, x) = u_0(x) + \varepsilon,\ 0 < \delta < \varepsilon, \tag{2_ε}$$

$$u_\varepsilon(t, \delta) = \varepsilon,\ \varepsilon \text{ — произвольно.} \tag{3_ε}$$

Как известно [10] задача (1_ε)–(3_ε) имеет единственное решение

$$u_\varepsilon(t, x) \in C^\infty([0, \infty) \times (\delta, \infty)),$$

удовлетворяющее условию

$$\varepsilon \leqslant u_\varepsilon(t,x) \leqslant \sup u_0 + \varepsilon,$$

причем все производные функции $u_\varepsilon(t,x)$ ограничены при $t \geqslant 0$. Кроме этого,

$$u_{\varepsilon_1} \leqslant u_{\varepsilon_2} \quad \text{при} \quad 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2,$$

и

$$\int\limits_\delta^\infty (u_\varepsilon(t,x) - \varepsilon)\, dx = \int\limits_\delta^\infty u_0(x)\, dx \quad \text{при любом} \quad t > 0.$$

Докажем вначале неравенство (6) для решения задачи (1_ε)–(3_ε).

Положим

$$\begin{aligned} v(u_\varepsilon) &= \frac{m}{m-1}\left(u_\varepsilon^{m-1} - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m-1}\right),\\ f(v) &= (m-1)v + m\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m-1},\\ P(t,x) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^\alpha v_x). \end{aligned}$$

В дальнейшем индекс ε при u_ε для удобства будем опускать, и $u = u(t,x)$ будем считать решением задачи (1_ε)–(3_ε).

Для u_t имеем

$$u_t = (x^\alpha((u^m)_x))_x = (x^\alpha((u^{m-1}\cdot u)_x))_x =$$
$$= (x^\alpha((u^{m-1})_x)\cdot u)_x + (x^\alpha u^{m-1}u_x)_x = (x^\alpha((u^{m-1})_x)\cdot u)_x + \frac{1}{m}\,u_t,$$

отсюда

$$\frac{m-1}{m}\,u_t = \frac{m-1}{m}\frac{\partial}{\partial x}(x^\alpha v_x\cdot u).$$

Из последнего равенства будем иметь

$$u_t = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^\alpha v_x)\right]u + x^\alpha v_x u_x = P\cdot u + m x^\alpha u^{m-2}(u_x)^2.$$

Следовательно,

$$u_t \geqslant Pu. \tag{7}$$

Далее из определения функции v, f, P имеем

$$v_t = m u^{m-2}u_t = m\cdot\left(\frac{m-1}{m}\,v + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m-1}\right)^{\frac{m-2}{m-1}}\cdot u_t =$$
$$= [f(v)]^{\frac{m-2}{m-1}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(x^\alpha f(v)^{\frac{1}{m-1}}\cdot v_x\right).$$

Из последнего равенства легко видеть, что

$$v_t = f(v) \cdot P + x^\alpha v_x^2. \tag{8}$$

Найдем значение P_t. Используя (8), имеем

$$\begin{gathered}
P_t = (x^\alpha((v_t)_x))_x = \alpha x^{\alpha-1}(f(v)\cdot P)_x + x^\alpha(f(v)\cdot P)_{xx} + \\
+ 2\alpha x^{\alpha-1}v_x\cdot P + 2x^\alpha v_{xx}\cdot P + 2x^\alpha v_x\cdot P_x - \alpha(2\alpha-1)x^{2\alpha-2}v_x^2 - 2\alpha x^{2\alpha-1}v_x\cdot v_{xx} = \\
= \alpha x^{\alpha-1}(f(v)\cdot P)_x + x^\alpha(f(v)\cdot P)_{xx} + 2\alpha x^{\alpha-1}v_x\cdot P + 2(P-\alpha x^{\alpha-1}v_x)P + \\
+ 2x^\alpha v_x\cdot P_x - \alpha(2\alpha-1)x^{2\alpha-2}v_x^2 - 2\alpha x^{\alpha-1}\cdot v_x(P-\alpha x^{\alpha-1}v_x) = \\
= \alpha x^{\alpha-1}(f(v)\cdot P)_x + x^\alpha(f(v)\cdot P)_{xx} + 2\alpha x^{\alpha-1}v_x\cdot P + 2P^2 - 2\alpha x^{\alpha-1}v_x\cdot P + \\
+ 2x^\alpha v_x\cdot P_x - \alpha(2\alpha-1)x^{2\alpha-2}v_x^2 - 2\alpha x^{\alpha-1}v_x\cdot P + 2\alpha^2x^{2\alpha-2}v_x^2 = \\
= \alpha x^{\alpha-1}(f(v)\cdot P)_x + x^\alpha(f(v)\cdot P)_{xx} + 2x^\alpha v_x\cdot P_x - 2\alpha x^{\alpha-1}v_x\cdot P + 2P^2 + \\
+ \alpha x^{2\alpha-2}v_x^2 = \alpha(m-1)x^{\alpha-1}v_x\cdot P + \alpha x^{\alpha-1}f(v)\cdot P_x + \\
+ x^\alpha\left((m-1)\,v_x\cdot P + f(v)P_x\right)_x + 2x^\alpha v_x\cdot P_x - 2\alpha x^{\alpha-1}v_x\cdot P + 2P^2 + \alpha x^{2\alpha-2}v_x^2 = \\
= \alpha(m-1)x^{\alpha-1}v_x\cdot P + \alpha x^{\alpha-1}f(v)P_x + \\
+ x^\alpha\left((m-1)v_{xx}\cdot P + (m-1)v_x\cdot P_x + (m-1)v_x\cdot P_x + f(v)P_{xx}\right) + \\
+ 2x^\alpha v_x\cdot P_x - 2\alpha x^{\alpha-1}v_x\cdot P + 2P^2 + \alpha x^{2\alpha-2}v_x^2 = \\
= x^\alpha f(v)P_{xx} + 2mx^\alpha v_x\cdot P_x + \alpha x^{\alpha-1}f(v)P_x + \\
+ \left(\alpha(m-1)x^{\alpha-1}v_x + (m-1)x^\alpha v_{xx} - 2\alpha x^{\alpha-1}v_x\right)P + 2P^2 + \alpha x^{2\alpha-2}v_x^2 = \\
= x^\alpha f(v)P_{xx} + 2mx^\alpha v_x\cdot P_x + \alpha x^{\alpha-1}f(v)P_x + \left((m-1)P - 2\alpha x^{\alpha-1}v_x\right)P + \\
+ 2P^2 + \alpha x^{2\alpha-2}\cdot v_x^2 = x^\alpha f(v)P_{xx} + 2mx^\alpha v_x\cdot P_x + \alpha x^{\alpha-1}f(v)P_x - \\
- 2\alpha x^{\alpha-1}v_x\cdot P + (m+1)P^2 + \alpha x^{2\alpha-2}\cdot v_x^2.
\end{gathered}$$

Для P_t получим выражение

$$\begin{gathered}
P_t = x^\alpha f(v)P_{xx} + 2mx^\alpha v_x\cdot P_x + \alpha x^{\alpha-1}f(v)P_x - 2\alpha x^{\alpha-1}v_x\cdot P + \\
+ (m+1)P^2 + \alpha x^{2\alpha-2}v_x^2.
\end{gathered}$$

Так как $2\alpha x^{\alpha-1}v_x\cdot P \leqslant \alpha x^{2\alpha-2}v_x^2 + \alpha P^2$, то из последнего соотношения получаем неравенство

$$P_t \geqslant x^\alpha f(v)P_{xx} + 2mx^\alpha v_x\cdot P_x + \alpha x^{\alpha-1}f(v)P_x + (m+1-\alpha)P^2.$$

Рассмотрим нелинейный оператор

$$A(W) = x^\alpha f(v)\cdot W_{xx} + 2mx^\alpha v_x W_x + \alpha x^{\alpha-1}f(v)\cdot W_x + (m+1-\alpha)W^2.$$

На основе полученного параболического неравенства имеем $P_t \geqslant A(P)$. Необходимо найти такую функцию $W = W(v) = W(v(t,x))$, которая бы удовлетворяла неравенству $W_t \leqslant A(W)$ с начальной функцией $W(t,x)|_{t=0} = W_0(x) = -\infty$. Тогда на основании теоремы сравнения [10] можно утверждать, что $W(t,x) \leqslant P(t,x)$ для всех $t > 0$.

Будем искать решение неравенства $W_t \leqslant A(W)$ виде

$$W(t,x) = -\frac{z(v(t,x))}{t}.$$

Тогда будем иметь

$$\begin{gathered} W_t = -\frac{z'(v)}{t}v_t + \frac{z(v)}{t^2} = -\frac{z'(v)}{t}v_t + \frac{1}{z(v)}W^2, \\ W_x = -\frac{z'(v)}{t}v_x; \quad W_{xx} = -\frac{z''(v)}{t}v_x^2 - \frac{z'(v)}{t}v_{xx}. \end{gathered} \tag{9}$$

Так как, кроме этого,

$$v_t = f(v) \cdot P + x^\alpha v_x^2,$$

то, используя равенство (9), получим

$$\begin{gathered} W_t - \frac{1}{z(v)}W^2 = -\frac{z'(v)}{t}v_t = -\frac{z'(v)}{t}\left(f(v)P + x^\alpha v_x^2\right) = \\ = -\frac{z'(v)}{t}\left(f(v)\cdot(\alpha x^{\alpha-1}v_x + x^\alpha v_{xx}) + x^\alpha v_x^2\right) = \\ = -\alpha x^{\alpha-1}f(v)v_x\frac{z'(v)}{t} - x^\alpha f(v)v_{xx}\cdot\frac{z'(v)}{t} - x^\alpha v_x^2\cdot\frac{z'(v)}{t} = \\ = -\alpha x^{\alpha-1}f(v)\frac{z'(v)}{t}v_x + x^\alpha f(v)\left(W_{xx} + \frac{z''(v)}{t}v_x^2\right) - x^\alpha v_x^2\frac{z'(v)}{t} = \\ = \alpha x^{\alpha-1}f(v)W_x + x^\alpha f(v)W_{xx} + x^\alpha f(v)\frac{z''(v)}{t}v_x^2 - x^\alpha v_x^2\frac{z'(v)}{t} = \\ = A(W) - 2mx^\alpha v_x W_x - (m+1-\alpha)W^2 + x^\alpha f(v)\frac{z''(v)}{t}v_x^2 - x^\alpha v_x^2\cdot\frac{z'(v)}{t} = \\ = A(W) + 2mx^\alpha v_x^2\cdot\frac{z'(v)}{t} - (m+1-\alpha)W^2 + x^\alpha f(v)\frac{z''(v)}{t}v_x^2 - x^\alpha v_x^2\cdot\frac{z'(v)}{t}. \end{gathered}$$

Итак,

$$\begin{gathered} W_t = A(W) + x^\alpha f(v)\cdot v_x^2\frac{z''(v)}{t} + (2m-1)x^\alpha v_x^2\frac{z'(v)}{t} + \\ + \left[\frac{1}{z(v)} - (m+1-\alpha)\right]W^2. \end{gathered}$$

Определим функцию $z(v)$ из условий

1) $x^{\alpha} f(v) v_x^2 \frac{z''(v)}{t} + (2m-1) x^{\alpha} v_x^2 \frac{z'(v)}{t} = 0$;

2) $\frac{1}{z(v)} - (m+1-\alpha) \leqslant 0$.

Из первого условия имеем

$$f(v) z''(v) + (2m-1) z'(v) = 0.$$

Данное уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Общее решение которого имеет вид:

$$z(v) = c_1 \frac{m-1}{m^2-3m+1} \left(v + \frac{m}{m-1} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{m-1} \right)^{\frac{m^2-3m+1}{m(m-1)}} + c_2,$$

c_1, c_2 — произвольные постоянные.

При $c_1 = 0$ и $c_2 = \frac{1}{m+1-\alpha}$ условия 1) и 2) удовлетворяются, следовательно, функция

$$W(z(t,x)) = -\frac{1}{(m+1-\alpha)t}$$

является решением параболического неравенства

$$W_t \leqslant A(W).$$

По теореме сравнения [10] имеем

$$P(t,x) \geqslant -\frac{1}{(m+1-\alpha)t},$$

отсюда на основании (7) получим

$$u_t \geqslant P \cdot u \geqslant -\frac{u}{(m+1-\alpha)t}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{\varepsilon}(t)) \geqslant -\frac{u_{\varepsilon}}{(m+1-\alpha)t}, \quad u_{\varepsilon} \in C^{\infty}((0,\infty) \times (\delta, \infty)), \quad 0 < \delta < \varepsilon.$$

Для предельной функции $u = u(t,x)$ имеем слабое неравенство, т. е. для $\forall\, \varphi \in C_0^{\infty}((0,\infty) \times (0,\infty))$

$$(u_t, \varphi) \geqslant -\frac{1}{m+1-\alpha} \left(\frac{u}{t}, \varphi \right)$$

или

$$\left(u_t + \frac{1}{m+1-\alpha}\cdot\frac{u}{t}, \varphi\right) \geqslant 0. \tag{10}$$

Так как $u = u(x,t)$ — сильное решение задачи (1)–(3), то

$$u_t \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,\infty)\times(0,\infty)),$$

и, следовательно,

$$u_t + \frac{1}{m+1-\alpha}\cdot\frac{u}{t} \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,\infty)\times(0,\infty)).$$

Положим в неравенстве (10)

$$\varphi = w_\varepsilon(t-\tau, x-y),$$

где

$$w_\varepsilon(t-\tau,x-y) = \begin{cases} c_\varepsilon\, e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-(t-\tau)^2-(x-y)^2}}, & \sqrt{(t-\tau)^2+(x-y)^2} \leqslant \varepsilon, \\ 0, & \sqrt{(t-\tau)^2+(x-y)^2} > \varepsilon. \end{cases}$$

Тогда функция

$$g_\varepsilon(t,x) = \left(u_t + \frac{1}{m+1-\alpha}\cdot\frac{u}{t}, w_\varepsilon(t-\tau,x-y)\right)$$

является регуляризацией функции

$$u_t + \frac{1}{m+1-\alpha}\cdot\frac{u}{t}.$$

Как известно [10], $g_\varepsilon(t,x)$ сходится к $u_t+\frac{1}{m+1-\alpha}\cdot\frac{u}{t}$ в норме $L^1_{\mathrm{loc}}((0,\infty)\times(0,\infty))$ при $\varepsilon\to 0$. Следовательно, существует последовательность $\varepsilon_k\to 0$ такая, что $g_{\varepsilon_k}(t,x)$ сходится к $u_t+\frac{1}{m+1-\alpha}\cdot\frac{u}{t}$ почти всюду. Так как при этом $g_{\varepsilon_k}(t,x)\geqslant 0$, то почти всюду

$$u_t + \frac{1}{m+1-\alpha}\cdot\frac{u}{t} \geqslant 0.$$

Теорема доказана.

Приведем пример, доказывающий неулучшаемость оценки (6).

Положим

$$\mathcal{U}(t,x) = t^{-\frac{1}{m+1-\alpha}}\left[C - \frac{m-1}{(2-\alpha)(m+1-\alpha)}\left(\frac{x^{2-\alpha}}{t^{\frac{2-\alpha}{m+1-\alpha}}}\right)\right]_+^{\frac{1}{m-1}}, \tag{A}$$

где $C > 0$.

Нетрудно проверить, что $\mathcal{U}(t,x) \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,\infty)\times(0,\infty))$, и что $\mathcal{U}(t,x)$ является точным решением дифференциального уравнения (1), причем

$$\mathcal{U}_t = -\frac{\mathcal{U}(t,x)}{(m+1-\alpha)t}, \tag{11}$$

для всех $x = at^{\frac{1}{m+1-\alpha}}$, a — произвольное положительное число. Отсюда следует, что оценка (6) для начально-краевой задачи (1)–(3) является точной.

Имеет место следующее предложение

Следствие 1 *Если функция $u(t,x)$ является сильным решением задачи (1)–(3), $m+1-\alpha > 0$, $m > 1$, то при всех $t \geqslant 1$ имеет место оценка снизу*

$$\sup_x u(t,x) \geqslant \sup_x u(1,x)\cdot t^{-\frac{1}{m+1-\alpha}}. \tag{12}$$

Доказательство. Перемножим обе части неравенства (6) на u^p (p — произвольный параметр), затем проинтегрируем полученные неравенства по x в пределах от 0 до R. Будем иметь

$$\frac{1}{p+1}\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^R u^{p+1}(\tau,x)\,dx \geqslant -\frac{1}{(m+1-\alpha)\tau}\int\limits_0^R u^{p+1}(\tau,x)\,dx. \tag{13}$$

Пусть $E(\tau) = \int\limits_0^R u^{p+1}(\tau,x)\,dx$, тогда (13) перепишется в виде

$$\frac{1}{p+1}\frac{dE}{d\tau} \geqslant -\frac{E(\tau)}{(m+1-\alpha)\tau}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{p+1}\,d(\ln E) \geqslant -\frac{d\tau}{(m+1-\alpha)\tau} = -\frac{1}{m+1-\alpha}\,d(\ln\tau).$$

Интегрируя полученное неравенство от 1 до t, получим

$$E(t)^{\frac{1}{p+1}} \geqslant E(1)^{\frac{1}{p+1}}\cdot t^{-\frac{1}{m+1-\alpha}}.$$

После предельного перехода при $p \to \infty$ получим (12). Следствие доказано.

Как показывает пример (A), в правой части неравенства Аронсона — Бенилана производная u_t может иметь конечный предел при $t \to 0$, при этом функция $\frac{\alpha u}{t}$ в неравенстве (5) стремится к $+\infty$, т. е. неравенство (5) является точным лишь при больших значениях времени. Для получения точной локальной оценки необходимо повторить рассуждения, приведенные в теореме 1, изменив функции P, v, f.

В этом случае имеет место следующее утверждение.

Теорема 2 *Если* $u(t,x)$ *— сильное решение начально-краевой задачи* (1)–(3), $m-1>0$, $\alpha>0$, *то существует такое* $t_0>0$, *что при всех* $0\leqslant t<t_0$ *имеет место поточечное неравенство*

$$u_t\leqslant -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{u}{t-t_0}. \tag{14}$$

Для доказательства теоремы достаточно повторить рассуждения, приведенные выше в теореме 1. Положим

$$v=u^m,\quad P(t,x)=\frac{\partial}{\partial x}(x^\alpha\cdot v_x).$$

Тогда для v_t получим равенство

$$v_t=mv^{\frac{m-1}{m}}\cdot P,$$

а P_t представится в виде выражения

$$\begin{gathered}P_t=mx^\alpha v^{\frac{m-1}{m}}P_{xx}+2(m-1)x^\alpha v^{-\frac{1}{m}}\cdot v_x\cdot P_x+m\alpha x^{\alpha-1}v^{\frac{m-1}{m}}\cdot P_x-\\ -\frac{m-1}{m}x^\alpha v^{-\frac{m-1}{m}}\cdot v_x^2\cdot P+(m-1)v^{-\frac{1}{m}}P^2.\end{gathered} \tag{15}$$

Рассмотрим параболическое уравнение

$$Z_t=\mathcal{L}(Z), \tag{16}$$

где

$$\begin{gathered}\mathcal{L}(Z)=mx^\alpha v^{\frac{m-1}{m}}Z_{xx}+2(m-1)x^\alpha v^{-\frac{1}{m}}v_x\cdot Z_x+\\ +m\alpha x^{\alpha-1}v^{\frac{m-1}{m}}Z_x-\frac{m-1}{m}x^\alpha v^{-\frac{m-1}{m}}v_x^2\cdot Z+(m-1)v^{-\frac{1}{m}}\cdot Z^2.\end{gathered} \tag{17}$$

Будем искать решение уравнения (17) в виде

$$Z(t,x)=-\frac{f(v)}{t-t_0},$$

тогда будем иметь

$$Z_t=-\frac{f'(v)}{t-t_0}v_t+\frac{Z^2}{f(v)},\quad Z_x=-\frac{f'(v)}{t-t_0}\cdot v_x,$$

$$Z_{xx} = -\frac{f''(v)}{t-t_0}\, v_x^2 - \frac{f'(v)}{t-t_0}\, v_{xx}. \tag{18}$$

Подставляя значения (18) в уравнение (17) получим

$$Z_t - \frac{1}{f(v)}Z^2 = \mathcal{L}(Z) + 2(m-1)x^\alpha v^{-\frac{1}{m}} \cdot v_x^2 \cdot \frac{f'(v)}{t-t_0} -$$
$$-\frac{m-1}{m}x^\alpha v^{-\frac{m+1}{m}} v_x^2 \cdot \frac{f(v)}{t-t_0} - (m-1)v^{-\frac{1}{m}}Z^2 + mx^\alpha v^{\frac{m-1}{m}} \cdot v_x^2 \cdot \frac{f''(v)}{t-t_0}.$$

Определим функцию $f(v)$ из условий

$$\frac{1}{f(v)} - (m-1)v^{-\frac{1}{m}} = 0, \tag{19}$$

$$\begin{gathered} mx^\alpha v^{\frac{m-1}{m}} \cdot v_x^2 \frac{f''(v)}{t-t_0} + 2(m-1)x^\alpha v^{-\frac{1}{m}} v_x^2 \frac{f'(v)}{t-t_0} - \\ -\frac{m-1}{m}x^\alpha v^{-\frac{m+1}{m}} \cdot v_x^2 \frac{f(v)}{t-t_0} = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Уравнение (20) равносильно уравнению

$$v^2 f''(v) + \frac{2(m-1)}{m} v f'(v) - \frac{m-1}{m^2} f(v) = 0, \tag{21}$$

которое является обыкновенным дифференциальным уравнением Эйлера.

Общее решение уравнения (21) имеет вид

$$f(v) = c_1 v^{\frac{1}{m}} + c_2 v^{-\frac{m-1}{m}},$$

c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Полагая в частности $c_2 = 0$ и $c_1 = \frac{1}{m-1}$, получим требуемое решение, удовлетворяющее условиям (19), (20). Таким образом, функция

$$Z(t,x) = -\frac{v^{\frac{1}{m}}}{(m-1)(t-t_0)}$$

является точным решением уравнения (16).

Как показано выше, функция

$$P(t,x) = u_t = \frac{\partial}{\partial x}(x^\alpha \cdot v_x)$$

также является решением уравнения (16).

Нетрудно видеть, что

$$P(0,x) \leqslant Z(0,x) \text{ при достаточно малом } t_0, \text{ и}$$

$$P(t,0) \leqslant Z(t,0) \text{ при } \forall\, t > 0.$$

Следовательно, по теореме сравнения [10] и по определению функции P и v будем иметь

$$P(t,x) = u_t \leqslant -\frac{u}{(m-1)(t-t_0)},$$

при достаточно малом $t_0 > 0$. Теорема доказана.

В заключение приведем пример, подтверждающий точность оценки (14).

Рассмотрим функцию

$$\mathcal{U}^*(x,t) = cx^{\frac{2-\alpha}{m-1}} \left(1 - c^{m-1}\frac{m(2-\alpha)(m+1-\alpha)}{m-1}t\right)^{-\frac{1}{m-1}},$$

где c — произвольная положительная постоянная.

Нетрудно проверить, что данная функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при всех $x > 0$ и $0 < t < t_0$, где t_0 определяется из условия

$$c^{m-1} \cdot \frac{m(2-\alpha)(m+1-\alpha)}{m-1} = \frac{1}{t_0}.$$

При таком выборе $t_0, \mathcal{U}^*(x,t)$ перепишется в виде

$$\mathcal{U}^*(x,t) = \left(\frac{m-1}{(2-\alpha)(m+1-\alpha)m}\right)^{\frac{1}{m-1}} x^{\frac{2-\alpha}{m-1}}(t_0-t)^{-\frac{1}{m-1}},$$

при этом

$$\mathcal{U}_t^*(x,t) = -\frac{1}{m-1}\frac{\mathcal{U}^*(x,t)}{t-t_0}, \quad \text{при} \quad x > 0,\ 0 \leqslant t < t_0.$$

Последнее равенство подчеркивает точность оценки (14).

Список литературы

[1] Aronson D. G. and Benilan Ph. Régularité des solutions de l' équation des milieux poreus R^n // *C. R. Acad. Sci.* Paris Sér. A–B 288. 1979. P. 103–105.

[2] Brezis H. and Grandall M. G. Uniqueness of solutions of the initial-value problem for $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$ // *J. Math. Pures Appl.* 1979. Vol. 58. P. 153–163.

[3] Grandall M. G. and Pierre M. Regularizing effects for $u_t = \Delta\varphi(u)$ // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1982. Vol. 274, No 1.

[4] Benilan Ph. and Grandall M. G. The continuous dependence on φ of solutions of $u_t = \Delta\varphi(u) = 0$ // *Indiana Univ. Math. J.* 1981. Vol. 30. P. 162–177.

[5] Caffarelli L. A. and Evans L. C. Continuity of the temperature in the two-phase Stefan problem // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1983. Vol 81, No 3. P. 199–220.

[6] Andreucci D. and Tedeev A. F. Large time behavior for the porous medium equation with convection // *Meccanica, New Thends in Dynamic and Stability.* 2017. P. 1–11.

[7] Тедеев Ал. Ф. Локальные свойства решений задачи Коши для квазилинейного параболического уравнения второго порядка // *Владикавк. мат. журн.* 2008. Т. 10, вып. 2. С. 46–57.

[8] Тедеев Ал. Ф. Свойство конечной скорости распространения возмущений для решения задачи Дирихле дифференциального уравнения неоднородной диффузии // *Дифференц. уравнения и процессы управления.* 2016. No 4. С. 93–131.

[9] Тедеев Ал. Ф., Шелепов В. Ю. Об одном неравенстве для решений эллиптических уравнений и его применении в теории граничных свойств // *Докл. АН СССР.* 1992. Т. 315, No 1. С. 40–43.

[10] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М., 1967. 736 с.