ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 4, 2019
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Дифференциально-разностные уравнения

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ

Тедеев А.Ф.
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова,
Email: tedeev92@bk.ru

Аннотация

В данной работе рассматривается смешанная задача Дирихле для линейного однородного уравнения дробной диффузии. Существование и единственность решения задачи доказывается с использованием гармонического продолжения решения. В результате решение дифференциального уравнения определяется как след некоторой гармонической функции. Такой подход позволяет ввести интегральное тождество, решениями которого являются пары функций, такие что первая компонента пары есть искомое решение задачи, а вторая компонента является его гармоническим продолжением. В работе также доказывается непрерывность первой компоненты в интегральной норме.

Ключевые слова: слабое решение, дробная диффузия, смешанная задача Дирихле, пара функций

Abstract

In this paper we consider a mixed Dirichlet problem for a linear homogeneous fractional diffusion equation. The existence and uniqueness of the solution of the problem using the harmonic continuation of the solution is proved. As a result, the solution of the differential equation is defined as a trace of a harmonic function.

This approach allows us to introduce an integral identity whose solutions are pairs of functions such that the first coordinate of this pair is the desired solution, and the second one is its harmonic continuation. The continuity of the first coordinate in the integral norm is proved as well.

Keywords: weak solution, fractional diffusion, mixed Dirichlet problem, a pair of functions

1 Введение

В данной работе рассматривается смешанная задача Коши — Дирихле дифференциального уравнения дробной диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-\Delta)^{\frac{1}{2}}(u) = 0, \quad x \in R^N_+, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \overline{R^N \setminus R^N_+},\ t > 0, \tag{3}$$

где

$$R^N_+ = \{x:\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in R^N,\ x_N > 0\}.$$

Целью данной работы является доказательство теоремы существования и единственности решения задачи (1)–(3) для параметра $N > 2$.

Оператор $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}(f)$ определяется в виде потенциала Рисса

$$(-\Delta)^{\frac{1}{2}} f(x) = C_N \int\limits_{R^N} \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^{N+1}}\, dy, \tag{4}$$

где C_N — некоторый нормированный коэффициент, зависящий от размерности N.

Дифференциальное уравнение (1) переходит в хорошо известное дифференциальное уравнение линейной диффузии после замены оператора $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ классическим оператором Лапласа $-\Delta$.

Оператор (4) можно определить по-другому с помощью оператора продолжения $E(f)$. А именно, если функция $\varphi = \varphi(x)$ — гладкая ограниченная функция, определенная в R^N_+, то рассматривая его гармоническое продолжение $v(x,y)$ в область $\Omega = \{(x,y) : (x,y) \in R^N_+ \times R^1_+\}$, как единственное решение задачи

$$\Delta v(x,y) = 0, \quad x \in R^N_+, \quad y \geqslant 0, \quad (x,y) \in \Omega, \tag{5}$$

$$v(x,y)=\varphi(x),$$

можно на основании [6] оператор $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ определить с помощью равенства

$$-\frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_{y=0}=(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\varphi(x). \tag{6}$$

Сделанное замечание и равенство (6) позволяет нам изменить постановку вопроса и определить слабое решение задачи (1)–(3) в интегральной форме, соответствующая краевая задача которой имеет вид:

$$\Delta v=0,\quad (x,y)\in\Omega,\quad t>0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial t},\quad x\in R^N_+,\quad t>0, \tag{8}$$

$$v(x,0,0)=u_0(x),\quad x\in R^N_+, \tag{9}$$

$$v(x,0,t)=0,\quad x\in\overline{R^N\setminus R^N_+},\quad t>0. \tag{10}$$

В дальнейшем мы будем считать

$$u(x,t)=(T_r(v)),\quad v=E(u),$$

где $T_r(v)$ — это след функции v на R^N_+, а $E(u)$ — продолжение функции в область $\Omega=R^N_+\times R^1_+=\{(x,y)=(x_1,x_2,\dots,x_N,y)\in R^{N+1}:\ x_N\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$. Тогда задача (7)–(10) перепишется в виде:

$$\Delta v=0,\quad (x,y)\in\Omega,\quad t>0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial t},\quad x\in R^N_+,\quad t>0, \tag{12}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in R^N_+, \tag{13}$$

$$u(x,t)=0,\quad x\in\overline{R^N\setminus R^N_+},\quad t>0. \tag{14}$$

На основании (6) равенства (12), (13) и (14) совпадают с равенствами (1), (2) и (3) соответственно.

Замечание. Приведенные равенства (7), (8) и (11), (12) мы понимаем в слабом (интегральном) смысле, т. е. равенства

$$\Delta v=0,\quad (x,y)\in\Omega,\quad t>0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial t},\quad x\in R^N_+,\quad t>0$$

эквивалентны соотношениям

$$-\int_0^T \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dx\,dy\,ds - \int_0^T \int_{R_+^N} \frac{\partial v}{\partial y}\,\varphi\,dx\,ds = 0$$

и

$$\int_0^T \int_{R_+^N} \frac{\partial v}{\partial y}\,\varphi\,dx\,ds = \int_0^T \int_{R_+^N} \frac{\partial v}{\partial t}\,\varphi\,dx\,ds = \int_0^T \int_{R_+^N} \frac{\partial u}{\partial t}\,\varphi\,dx\,ds$$

соответственно для любого $T > 0$ и любой $\varphi \in C_0^1(\overline{\Omega}\times[0,T))$. Соотношения (9), (10) и (13), (14) определяются в виде предельных равенств

$$v(x,y,0) = \lim_{t\to 0} v(x,y,t), \quad \text{в} \quad L^2(\Omega),$$

$$u_0(x) = \lim_{y\to 0} v(x,y,0), \quad \text{в} \quad L^2(R_+^N),$$

$$v(x,0,t) = u(x,t) = \lim_{y\to 0} v(x,y,t), \quad \text{в} \quad L^2((\overline{R^N\setminus R_+^N})\times[0,T)),$$

где T — произвольное положительное число.

Считая функции u и v в задаче (11)–(14) неизвестными, а функцию $u_0(x)$ — заданной, введем определение слабого решения в виде пары (u,v). Такой подход к определению слабого решения был сделан в работах [5], [6] при решении задачи Коши.

Определение 1 *Будем считать пару функций (u,v) слабым решением задачи (11)–(14), если $v \in L^2([0,T);W_2^1(\Omega))$, $u = u(x,t) = (T_r(v)) \in L^2(0,T;L^2(R_+^N))$ для любого $T>0$, и имеет место равенство*

$$-\int_0^T \int_\Omega Dv\cdot D\varphi\,dx\,dy\,ds + \int_0^T \int_{R_+^N} u\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx\,ds = 0 \tag{15}$$

для любой функции $\varphi \in C_0^1(\overline{\Omega}\times[0,T))$, где

$$Dv\cdot D\varphi = \sum_{j=1}^N \frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Локальный подход к определению слабого решения задачи (11)–(14) дает возможность использовать некоторые методы, которые были применены в работах [2], [3], [4].

Пусть $u_h(x,t) = \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} u(x,\tau)\,d\tau$ и $v_h(x,y,t) = \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} v(x,y,\tau)\,d\tau$, $x \in R_+^N$, $(x,y) \in \Omega$, $0 < t < T - \delta$, $0 < h < \delta$, средние Стеклова функции $u(x,\tau)$ и $v(x,y,\tau)$ по переменной τ, δ — произвольное фиксированное положительное число, удовлетворяющее условию $0 < h < \delta < \frac{T}{2}$.

Имеет место следующее утверждение

Лемма. *Если (u,v) — слабое решение задачи (11)–(14), тогда для почти всех $0 < t_0 < t_1 < T$ и $\zeta \in C_0^1(\overline{\Omega} \times [0,T))$ имеет место соотношение*

$$\begin{gathered}\int\limits_{R_+^N} u(x,t_1)\zeta(x,0,t_1)\,dx - \int\limits_{R_+^N} u(x,t_0)\zeta(x,0,t_0)\,dx - \\ - \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{R_+^N} u(x,\tau)\zeta_\tau(x,0,\tau)\,dx\,d\tau + \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{\Omega} D(v)\cdot D\zeta\,dx\,dy\,d\tau = 0.\end{gathered} \tag{20}$$

Доказательство. Пусть $0 < t_0 < t_1 < T$. подберем $\delta > 0$ и $h > 0$ таким образом, чтобы $0 < h < \delta < t_0 < t_1 < T - \delta$. Используя свойства средних Стеклова, на основании (15) нетрудно доказать, что

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{R_+^N} u_{ht}\psi(x,0,t)\,dx\,dt + \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{\Omega} D(v_h)\cdot D\psi\,dx\,dy\,dt = 0. \tag{21}$$

Представляя выражение $u_{ht}\cdot\psi$ в виде

$$u_{ht}\cdot\psi = (u_h\cdot\psi)_t - u_h\cdot\psi_t,$$

из (21) получим соотношение

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{R_+^N} (u_h\cdot\psi)_t\,dx\,dt - \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{R_+^N} u_h\psi_t\,dx\,dt + \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{\Omega} D(v_h)\cdot D\psi\,dx\,dy\,dt = 0. \tag{22}$$

Интегрирование в равенстве (22) проводится по носителю пробной функции ψ, являющейся ограниченной областью. Поэтому мы можем применить формулу Ньютона — Лейбница к первому интегралу равенства (22). В результате получим

$$\int\limits_{R^N_+} u_h(x,t_1)\psi(x,0,t_1)\,dx - \int\limits_{R^N_+} u_h(x,t_0)\psi(x,0,t_0)\,dx - \int\limits_{t_0}^{t_1} u_h\cdot\psi_t\,dx\,dt + \\ + \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{\Omega} D(v_h)\cdot D\psi\,dx\,dy\,dt. \tag{23}$$

Так как $u_h(x,t)\to u(x,t)$ в $L^2(R^N_+)$, $D(v_h)=(Dv)_h$, и $(Dv)_h\to Dv$ в $L^2(\Omega)$ при $h\to 0$, то возможен предельный переход под знаками интегралов в равенстве (23). Предельный переход в равенстве (23) приводит к тождеству (20). Лемма доказана.

Замечание. Пространство пробных функций $C^1_0(\overline{\Omega}\times[0,T))$ в равенствах (15) и (20) может быть расширен до пространства $L^2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$, где $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ — пополнение пространства $C^1_0(\Omega)$ по норме пространства $W^1_2(\Omega)$. Чтобы убедиться в этом, необходимо для любой функции $\zeta\in L^2(0,T;W^1_2(\Omega))$ построить аппроксимирующую последовательность $\zeta_n\in C^1_0((0,T)\times\Omega)$ в норме $L^2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$, заменить в равенстве (15) и (20) ζ на ζ_n и сделать предельный переход при $n\to\infty$.

Предельные переходы в поверхностных интегралах основаны на теореме вложения Соболева. После предельного перехода в полученном интегральном тождестве значение пробной функции $\zeta(x,y,t)$ при $y=0$ определяется как след этой функции на гиперплоскость R^N_+, то есть в виде предельного равенства

$$\lim_{y\to\infty}\int\limits_{R^N_+}(\zeta(x,y,t)-\zeta(x,0,t))^2dx=0 \quad \text{при любом} \quad t>0.$$

2 Основной результат

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 1 *Для любой функции* $u_0(x)\in L^2(R^N_+)\cap L^\infty(R^N_+)$ *существует единственное решение* (u,v) *задачи (11)–(14), причем*

$$u\in C([0,T);L^2_{\mathrm{loc}}(R^N_+)).$$

Доказательство. Теорему докажем вначале для случая ограниченной области $D = \Omega \cap B_R$, где B_R — шар в $\mathbb{R}^{N+1}$ с центром в начале координат и радиуса R. Сохраняя прежние обозначения, задача (11)–(14) для слабого решения в ограниченной области представится в виде

$$\Delta v = 0, \quad (x, y) \in D = \Omega \cap B_R, \quad t > 0, \tag{11'}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x \in R_+^N \cap B_R, \quad t > 0, \tag{12'}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_0 \in L^2(R_+^N \cap B_R) \cap L^\infty(R_+^N \cap B_R), \tag{13'}$$

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \overline{R^N \setminus (R_+^N \cap B_R)}, \quad t > 0. \tag{14'}$$

Применим метод Фаедо — Галёркина. Для этого рассмотрим базисные элементы ω_j, $j = 1, 2, \ldots,$ пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^2(D)$, соответствующие собственным функциям.

Определим функции $v_n(x, y, t)$ с помощью равенств

$$v_n(x, y, t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t) \cdot \omega_j(x, y), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\lambda_j(t)$ — некоторые дифференцируемые функции, и подчиним их условиям

$$\int\limits_{B_R^N} \frac{\partial(v_n)}{\partial t} \omega_j \, dx + \int\limits_{B_R^{N+1}} \sum_{i=1}^{N+1} (D_i v_n) \cdot (D_i \omega_j) \, dx \, dy = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{24}$$

Умножая обе части равенства (24) на $\lambda_j(t)$, затем суммируя от 1 до n, получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int\limits_{B_R^N} v_n^2 \, dx + \int\limits_{B_R^{N+1}} |Dv_n|^2 \, dx \, dy = 0.$$

Интегрируя последнее равенство от 0 до t, будем иметь

$$\frac{1}{2} \int\limits_{B_R^N} v_n^2 \, dx + \int\limits_0^t \int\limits_{B_R^{N+1}} |Dv_n|^2 \, dx \, dy \, d\tau = \frac{1}{2} \int\limits_{B_R^N} v_{0n}^2 \, dx, \tag{25}$$

где $v_{0n} = v_n(x, 0, 0)$, и $v_{0n} \to u_0(x)$ в $L^2(B_R^N)$ при $n \to \infty$, $B_R^N = R_+^N \cap B_R$, $B_R^{N+1} = \Omega \cap B_R$.

Из равенства (25) следует, что

$$v_n(x,0,t) \quad \text{ограничены в} \quad L^\infty(0,T;L^2(B_R^N)), \tag{26}$$

$$v_n(x,y,t) \quad \text{ограничены в} \quad L^2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(B_R^{N+1})). \tag{27}$$

Рассмотрим функционал

$$(f(v),\omega)=\sum_{i=1}^{N+1}\int\limits_{B_R^{N+1}} D_iv\cdot D_i\omega\,dx\,dy=-\int\limits_{B_R^{N+1}} v\cdot\Delta\omega\,dx\,dy.$$

Для функционала $f(v)$ имеем оценку

$$|(f(v),\omega)|\leqslant\|v\|_{L^2(B_R^{N+1})}\cdot\|\Delta\omega\|_{L^2(B_R^{N+1})}\leqslant C\|v\|_{L^2(B_R^{N+1})}\cdot\|\omega\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(B_R^{N+1})},$$

следовательно

$$\|f(v)\|_{W_2^{-2}(B_R^{N+1})}\leqslant C\|v\|_{L^2(B_R^{N+1})}. \tag{28}$$

Здесь $W_2^{-2}(B_R^{N+1})$ — сопряженное пространство к пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^2(B_R^{N+1}))$, C — несущественная константа.

Учитывая оценку (28), на основании (27) мы приходим к выводу о том, что

$$f(v_n) \quad \text{ограничены в} \quad L^2(0,T;W_2^{-2}(B_R^{N+1})). \tag{29}$$

Равенства (24) можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial v_n}{\partial t},\omega_j\right)_{L^2(B_R^N)}-(f(v_n),\omega_j)=0,\quad j=1,2,\ldots,n, \tag{30}$$

и следовательно из соотношений (29) и (30) также следует ограниченность $\frac{\partial v_n}{\partial t}$ в пространстве $L^2(0,T;W_2^{-2}(B_R^{N+1}))$.

Пусть $B_0=\overset{\circ}{W}{}_1^2(B_R^{N+1})$, $B=L^2(B_R^N)$, $B_1=W_2^{-2}(B_R^{N+1})$ и $W=\{v: v\in L^2(0,T;B_0),\ \frac{\partial v}{\partial t}\in L^2(0,T;B_1)\}$. Так как $B_0\subset B\subset B_1$, причем вложение $B_0\subset B$ компактно (теорема Соболева), то в силу рефлексивности пространств B_i, $i=0,1$, по теореме 5.1 из [1] вложение W в $L^2(0,t;B)$ компактно. Следовательно, на основании (26) и (27), мы приходим к выводу, что существует такая подпоследовательность v_{n_k} последовательности v_n, и такая функция $v=v(x,y,t)$, для которых имеют место соотношения

$$v_{n_k}(x,0,t)\to v(x,0,t) \quad \text{слабо в} \quad L^\infty(0,T;L^2(B_R^N)),$$

$$v_{n_k}(x,0,t) \to v(x,0,t) \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T;L^2(B_R^N)),$$
$$v_{n_k}(x,y,t) \to v(x,y,t) \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(B_R^{N+1})). \tag{31}$$

Пусть, далее $\varphi(x,y,t)$ — произвольная функция, принадлежащая пространству $C_0^1([0,T) \times B_R^{N+1})$, и $\varphi_l(x,y,t) = \sum\limits_{j=1}^{l} \mu_j(t) \cdot \omega_j(x,t)$ — некоторая ее гладкая аппроксимация. Умножая равенство (24) на $\mu_j(t)$, затем суммируя полученное равенство по j от 1 до l и наконец интегрируя полученное соотношение от 0 до T, получим

$$\int_0^T \int_{B_R^N} \frac{\partial v_n}{\partial t} \cdot \varphi_l \, dx\, dt + \int_0^T \int_{B_R^{N+1}} \sum_{i=1}^{N} (D_i v_n) \cdot (D_i \cdot \varphi_l)\, dx\, dy\, dt = 0. \tag{32}$$

В силу гладкости функций v_n и φ_l по переменной t, мы можем применить к равенству (32) интегрирование по частям. Переходя затем к пределу в полученном равенстве, на основании соотношений (31) получим тождество (15) для ограниченной области $\Omega_R = \Omega \cap B_R$. Так как пространства $L^2(0,T;L^2(B_R^N))$ и $L^2(0,T;W_2^1(B_R^{N+1}))$ являются слабо-полными пространствами, то из соотношений (31) следует, что $v \in L^2(0,T;W_2^1(B_R^{N+1}))$, и $u(x,t) = v(x,0,t) = T_r(v) \in L^2(0,T;L^2(B_R^N))$. Следовательно, существование решения задачи $(11')$–$(14')$ доказано. В случае неограниченной области доказательство проводится аналогично тому, как это сделано в работе [2].

Докажем принадлежность первой координаты решения $u(x,t)$ пространству $C([0,T);L^2_{\text{loc}}(R_+^N))$. Пусть $\zeta \in L^2(R_+^N)$ имеет носитель, компактно принадлежащий области R_+^N. Рассмотрим продолжение $\zeta^*(x,y)$ этой функции на область Ω. Пусть, далее

$$\zeta_n(x,y,\tau) = \varphi_n(\tau) \cdot \zeta^*(x,y),$$

где $\varphi_n(\tau)$ — некоторая гладкая функция, аппроксимирующая характеристическую функцию отрезка $[t_0,t]$, $0 < t_0 < t < T$, и удовлетворяющая условиям

$$0 \leqslant \varphi_n(t) \leqslant 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{d\varphi_n(\tau)}{d\tau} = 0.$$

Примером такой функции является функция

$$\varphi_n(\tau) = n \int_{\tau}^{\tau+\frac{1}{n}} \chi(s)\, ds,$$

где $\chi(s)$ — это характеристическая функция отрезка $[t_0, t]$.

Выбирая в равенстве (20) (лемма) в качестве пробной функции $\zeta_n(x, y, \tau)$ и затем переходя к пределу в полученном равенстве, получим соотношение

$$\int\limits_{R_+^N} u(x,t)\zeta(x)\,dx - \int\limits_{R_+^N} u(x,t_0)\zeta(x)\,dx + \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\Omega} D(v)\cdot D\zeta^*\,dx\,dy\,d\tau = 0. \qquad (33)$$

Так как по условию $v \in L^2(0,T; W_2^1(\Omega))$ и $\zeta \in W_2^1(\Omega)$, то из (33) мы делаем вывод о том, что при $t \to t_0$

$$u(x,t) \to u(x,t_0) \quad \text{слабо в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(R_+^N). \qquad (34)$$

В самом деле, из (33) для любого $\zeta \in L^2(R_+^N)$ с компактным носителем в R_+^N, имеем

$$\left|\int\limits_{R_+^N} u(x,t)\zeta(x)\,dx - \int\limits_{R_+^N} u(x,t_0)\zeta(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{t}\left(\int\limits_{\Omega}|Dv|^2\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int\limits_{\Omega}|D\zeta^*|^2\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{2}}d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\Omega}|Dv|^2\,dx\,dy\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\Omega}|D\zeta^*|^2\,dx\,dy\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant (t-t_0)^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L^2(0,T;W_2'(\Omega))}\cdot\|\zeta^*\|_{W_2'(\Omega)} \to 0$$

при $t \to t_0$, следовательно имеет место (34).

Далее, рассмотрим произвольную ограниченную область K, принадлежащую области R_+^N, и пусть K_n — последовательность компактных множеств аппроксимирующих область K. Получим

$$\zeta_n(x,t) = u(x,t)\chi_n(x),$$

где $\chi_n(x)$ — последовательность гладких функций, удовлетворяющих условию

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_n, \\ 0, & x \notin K \end{cases} \quad 0 \leqslant \chi_n(x) \leqslant 1,\ x \in R_+^N,\ n = 1, 2, \ldots$$

Аналогично, положим

$$\zeta_n^*(x,y,t) = v(x,y,t)\cdot\chi_n^*(x,y),$$

где $\chi_n^*(x,y)$ — гладкое продолжение функции $\chi_n(x)$ на область

$$\Omega^* = R_+^N \times \{0 \leqslant y < \overline{y}\}, \quad \overline{y} > 0,$$

с компактным носителем в Ω, и с ограничением

$$0 \leqslant \chi_n^*(x,y) \leqslant 1, \quad (x,y) \in \Omega, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Нетрудно видеть, что функции $\zeta_n^*(x,y,t)$ являются продолжениями функций $\zeta_n(x,t)$ в пространство $R_+^N \times \{y \geqslant 0\}$. Выбирая функции $\zeta_n(x,t)$ и $\zeta_n^*(x,y,t)$ в качестве пробных, из (20) будем иметь

$$\frac{1}{2}\left(\int\limits_{R_+^N} u^2(x,t)\chi_n(x)\,dx - \int\limits_{R_+^N} u^2(x,t_0)\chi_n(x)\,dx\right) + \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\Omega} Dv \cdot D\zeta_n^*\,dx\,dy\,d\tau = 0. \tag{35}$$

Так как модуль разности $Dv - D\zeta_n^* \to 0$ при $n \to \infty$ в $L^2(0,T; L^2(K \times \{0 \leqslant y < \overline{y}\}))$ и $\chi_n(x) \to \chi(x)$ в $L^2(K)$, где $\chi(x)$ — характеристическая функция области K, то в равенстве (35) возможен предельный переход при $n \to \infty$. После предельного перехода получим соотношение

$$\frac{1}{2}\left(\int\limits_{K} u^2(x,t)\,dx - \int\limits_{K} u^2(x,t_0)\,dx\right) + \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{K \times \{0 \leqslant y < \overline{y}\}} |Dv|^2\,dx\,dy\,d\tau = 0. \tag{36}$$

Из (36) следует, что

$$\int\limits_{K} u^2(x,t)\,dx \to \int\limits_{K} u^2(x,t_0)\,dx \quad \text{при} \quad t \to t_0 \tag{37}$$

для любой ограниченной области K, принадлежащей R_+^N. На основании (34) и (37) заключаем, что

$$u(x,t) \to u(x,t_0) \quad \text{сильно при} \quad t \to t_0, \quad \text{т. е.}$$

$$\int\limits_{K} (u(x,t) - u(x,t_0))^2\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad t \to t_0, \tag{38}$$

для любой ограниченной области $K \subset R_+^N$.

В силу произвольности t_0 из (38) следует, что

$$u \in C([0,T); L^2_{\mathrm{loc}}(R_+^N)).$$

Остается доказать единственность построенного решения задачи (11)–(14). Пусть пары (u_1, v_1) и (u_2, v_2) являются решениями задачи (11)–(14). Тогда для каждой из пар по определению имеем

$$-\int_0^T \int_\Omega Dv_1 \cdot D\varphi \, dx\, dy\, dt + \int_0^T \int_{R_+^N} u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, dx\, dt = 0,$$

$$-\int_0^T \int_\Omega Dv_2 \cdot D\varphi \, dx\, dy\, dt + \int_0^T \int_{R_+^N} u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, dx\, dt = 0.$$

Из этих равенств получаем соотношение

$$-\int_0^T \int_\Omega D(v_1 - v_2) \cdot D\varphi \, dx\, dy\, dt + \int_0^T \int_{R_+^N} (u_1 - u_2) \frac{d\varphi}{dt} \, dx\, ds = 0. \tag{39}$$

Положим

$$\varphi(x, y, t) = \int_t^T (v_1 - v_2) d\tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

с $\varphi(x, y, t) \equiv 0$ для $t \geqslant T$, тогда из (39) следует равенство

$$\frac{1}{2} \int_\Omega \left| \int_0^T D(v_1 - v_2)(x, y, \tau)\, d\tau \right|^2 dx\, dy + \int_0^T \int_{R_+^N} (u_1 - u_2)^2 (x, \tau)\, dx\, d\tau = 0.$$

Из последнего равенства следует, что $v_1 = v_2$ в Ω и $u_1 = u_2$ в R_+^N при $t \in [0, T)$.

Единственность решения задачи доказана.

Теорема доказана полностью.

Список литературы

[1] *Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* М., 1972. 586 с.

[2] *Тедеев Ал. Ф.* Свойство конечной скорости распространения возмущений для решения задачи Дирихле дифференциального уравнения неоднородной диффузии // *Дифференциальные уравнения и процессы управления.* 2016. № 4. С. 1–39.

[3] *Тедеев Ал. Ф.* Свойства решений задачи Коши для нелинейного параболического уравнения второго порядка с вырождением по независимой переменной // *Вестник ВГУ.* Серия: Физика. Математика. 2018. № 3. С. 185–196.

[4] *Тедеев Ал. Ф.* Финитность носителя решения задачи Дирихле уравнения диффузии с неоднородным источником в областях типа октанта // *Вестник ВГУ.* Серия: Физика. Математика. 2014. № 4. С. 180–192.

[5] *Andreu F., Mazon J. M., Toledo J., Igbida N.* A degenerate elliptic-parabolic problem with nonlinear dinamical boundary conditions // *Interfaces Free Bound.* 2006. № 8 (4). P. 447–479.

[6] *Athanasopoulos J., Caffarelli L. A.* Continuity of the temperature in boundary heat control problems // *Adv. Math.* 2010. № 224 (1). P. 293–315.