ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2017
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Моделирование динамических систем

УДК 517.95

МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С СУПЕРУСТОЙЧИВОЙ ПОЛУГРУППОЙ

Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг
МГУ имени М. В. Ломоносова, МПГУ
Москва
e-mail: ivtikh@mail.ru, vnsontung@mail.ru

Аннотация

В настоящем сообщении дано расширенное изложение доклада, сделанного на научной конференции «Герценовские чтения — 2017». Изучается линейная обратная задача для эволюционного уравнения в банаховом пространстве. Нужно восстановить неизвестное неоднородное слагаемое. Дополнительная информация задана в виде нелокального условия, записанного через интеграл Римана–Стильтьеса. Для проведения исследования вводится специальное предположение, связанное с суперустойчивостью (квазинильпотентностью) эволюционной полугруппы. Показано, что тогда решение обратной задачи представимо сходящимся рядом Неймана. Тем самым, установлен конструктивный метод для нахождения решения. Отдельно выделен случай, когда бесконечный ряд Неймана обращается в конечную сумму. Рассмотрен модельный пример обратной задачи с финальным переопределением.

Ключевые слова: эволюционное уравнение, обратная задача, суперустойчивая полугруппа.

Abstract

The paper presents an extended description of the report which was made at the scientific conference "Herzen Readings — 2017". The linear inverse problem for the evolution equation in a Banach space is studied. It is required to recover an unknown nonhomogeneous term. Additional information was given in the form of a nonlocal condition with the Riemann-Stieltjes integral. For conducting research, a special assumption which related to the superstability of the evolution semigroup is introduced. It is shown that the solution of the inverse problem can be represented by a convergent Neumann series. As a result, a constructive method for finding a solution of the inverse problem is obtained. The case when the Neumann series becomes a finite sum is singled out separately. A model example of the inverse problem with final overdetermination is considered.

Keywords: evolution equation, inverse problem, superstable semigroup.

Работа посвящена линейной обратной задаче о нахождении неоднородного слагаемого в абстрактном дифференциальном уравнении. Мы используем стандартный полугрупповой подход (см. [1]–[4]). В качестве дополнительного условия задано нелокальное переопределение в виде векторного интеграла Римана–Стильтьеса. Общая схема исследования подобных обратных задач была разработана в [5], [6]. Сейчас мы уточним некоторые детали и укажем конструктивный метод для поиска решения в предположении, что основной оператор эволюционного уравнения порождает суперустойчивую полугруппу класса C_0 (см. [7]–[12]).

Начнем с постановки исходной прямой задачи. В банаховом пространстве E при фиксированном значении $T > 0$ рассмотрим абстрактную задачу Коши для эволюционного уравнения специального вида:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + \varphi(t)g, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь A — линейный замкнутый оператор в E с областью определения $D(A)$, плотной в E. Начальный элемент u_0 задан в $D(A)$. Считаем, что оператор A порождает полугруппу $U(t)$ класса C_0 (см. [1]–[4]). Скалярная функция $\varphi(t)$ непрерывна на отрезке $[0, T]$, причем $\varphi(t) \not\equiv 0$. Дополнительно предполагаем, что $\varphi(t)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, T]$, т. е. $\varphi \in BV[0, T]$.

Тогда, как показано в [6], при любом выборе элемента $g \in E$ стандартная формула

$$u(t) = U(t)u_0 + \int\limits_0^t U(t-s)\,\varphi(s)g\,ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

дает классическое решение задачи (1), принадлежащее $C^1([0,T];E)$, и такое, что $u(t) \in D(A)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$.

Предположим теперь, что элемент $g \in E$ неизвестен. Для его нахождения добавим к задаче (1) специальное *нелокальное переопределение*

$$\int\limits_0^T u(t)\,d\mu(t) = u_1. \tag{3}$$

Элемент $u_1 \in D(A)$ считаем заданным. Интеграл в условии (3) есть векторный интеграл Римана–Стильтьеса (см. [1]) с функцией $\mu \in BV[0,T]$, порождающей невырожденную меру $d\mu(t) \not\equiv 0$. Поставленная задача (1), (3) для нахождения пары $(u(t), g)$ называется *линейной обратной задачей* с нелокальным переопределением (см. [5], [6]).

Сделаем сейчас акцент на специальном случае суперустойчивой полугруппы $U(t)$. Напомним, что *экспоненциальным типом* полугруппы называется величина

$$\omega_0 \equiv \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln \|\,U(t)\|}{t}.$$

Указаный предел заведомо существует со значением в промежутке $[-\infty, \infty)$. Если $\omega_0 = -\infty$, то полугруппа $U(t)$ называется *суперустойчивой* (английский термин *superstable semigroup*, см. [7]–[12]). В таком случае при любом выборе числа $\alpha > 0$ найдется константа $M = M_\alpha \geqslant 1$, для которой

$$\|\,U(t)\| \leqslant Me^{-\alpha t}, \qquad t \geqslant 0. \tag{4}$$

Суперустойчивую полугруппу называют также *квазинильпотентной*, поскольку все ее операторы $U(t)$ при $t > 0$ являются квазинильпотентными в пространстве E. Спектр порождающего оператора A будет пустым, а резольвентное множество заполнит всю комплексную плоскость.

Из теории, развитой в [6], следует такое утверждение (см. [6, с. 112]).

Теорема 1. *Пусть оператор A порождает в E суперустойчивую полугруппу $U(t)$ класса C_0. Пусть $\varphi \in C[0,T] \cap BV[0,T]$ и $\mu \in BV[0,T]$, причем*

$$\mu(0) = \mu(0+) \equiv \lim_{t\to 0+} \mu(t). \tag{5}$$

Пусть также

$$\beta \equiv \int\limits_0^T \varphi(t)\, d\mu(t) \neq 0. \tag{6}$$

Тогда линейная обратная задача (1), (3) *имеет и притом единственное решение* $(u(t), g)$ *при любом выборе элементов* $u_0, u_1 \in D(A)$.

Представленный результат гарантирует корректность изучаемой обратной задачи (1), (3) в случае суперустойчивой полугруппы $U(t)$ при минимальных ограничениях (5), (6), связанных с самой природой обратной задачи. Метод доказательства теоремы 1, предложенный в [6], носил неконструктивный характер и базировался на теории Гельфанда коммутативных банаховых алгебр, точнее, на ее специальной версии, разработанной в трактате [1] в связи с запросами спектральной теории полугрупп. Дополнительный анализ показывает, что можно избежать обращения к этим сложным концепциям и получить теорему 1 элементарным конструктивным методом. Коротко изложим план такого исследования.

В предположениях теоремы 1 рассмотрим операторное уравнение на неизвестный элемент $g \in E$. Согласно схеме [6] уравнение допускает запись

$$\beta g - Bg = f \tag{7}$$

со значением $\beta \neq 0$ из формулы (6), оператором

$$B = \int\limits_0^T \varphi(0)\, U(t)\, d\mu(t) + \int\limits_0^T d\mu(t) \int\limits_0^t U(t-s)\, d\varphi(s) \tag{8}$$

и заданным элементом $f \in E$ вида

$$f = A\left(\int\limits_0^T U(t)u_0\, d\mu(t) - u_1 \right). \tag{9}$$

Интегралы в (8) понимаются в сильной операторной топологии. Используя структуру выражения (8) и оценку (4) с подходящим выбором $\alpha > 0$, можно оценить оператор B в некоторой эквивалентной норме и показать его квазинильпотентность.

Основной результат состоит в следующем.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1, *включая требования* (5), (6). *Тогда оператор* B *из формулы* (8) *является квазинильпотентным в* E, *т. е.*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|B^k\|} = 0.$$

При этом решение операторного уравнения (7) *представимо рядом Неймана*

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{k+1}} B^k f, \tag{10}$$

сходящимся по норме пространства E. *Если элемент* $f \in E$ *взят в виде* (9), *а число* $\beta \neq 0$ — *в виде* (6), *то элемент* g *из формулы* (10) *дает второй компонент решения* $(u(t), g)$ *поставленной обратной задачи* (1), (3). *При этом первый компонент — функция* $u(t)$ — *выражается формулой* (2).

Теорема 2 обосновывает итерационный алгоритм для поиска решения обратной задачи (1), (3) на основе ряда Неймана (10). Алгоритм приобретает законченный вид в специальном случае *нильпотентной полугруппы* $U(t)$, когда

$$U(t) = 0, \qquad \forall\, t \geqslant t_0 > 0, \tag{11}$$

с некоторым фиксированным значением t_0. Всякая нильпотентная полугруппа очевидно будет суперустойчивой (квазинильпотентной). При дополнительных ограничениях на функции $\varphi(t)$, $\mu(t)$ можно установить следующий результат.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1, *включая требования* (5), (6). *Пусть, дополнительно, полугруппа* $U(t)$ *является нильпотентной, удовлетворяя соотношению* (11) *с некоторым фиксированным значением* $t_0 > 0$. *Предположим также, что функция* $\mu(t)$ *является постоянной на промежутке* $[0, \varepsilon] \subset [0, T)$, *а функция* $\varphi(t)$ *является постоянной на промежутке* $[T-\delta, T] \subset (0, T]$, *причем*

$$\varepsilon + \delta > T. \tag{12}$$

Тогда оператор B *из формулы* (8) *является нильпотентным, и*

$$B^k = 0, \qquad k \in \mathbb{N}, \qquad k \geqslant \frac{t_0}{\varepsilon + \delta - T}.$$

Соответственно, решение операторного уравнения (7) *представимо в виде конечной суммы*

$$g = \sum_{k=0}^{N_0} \frac{1}{\beta^{k+1}} B^k f, \qquad N_0 \equiv \left\lceil \frac{t_0}{\varepsilon + \delta - T} \right\rceil - 1,$$

замещающей бесконечный ряд Неймана (10)*.*

Здесь через $\lceil h \rceil$ обозначен *потолок* числа $h \in \mathbb{R}$, т. е. наименьшее целое число, большее или равное h. Доказательство теоремы 3 основано на представлении оператора B в виде

$$B = U(\varepsilon + \delta - T)\, Q,$$

где

$$Q = U(T-\delta) \int_{\varepsilon}^{T} \varphi(0)\, U(t-\varepsilon)\, d\mu(t) + \int_{\varepsilon}^{T} d\mu(t) \int_{0}^{T-\delta} U(t - \varepsilon + T - \delta - s)\, d\varphi(s).$$

Данное представление возможно в силу выполненного условия (12).

Простым «вырожденным» примером к теореме 3 служит модельная обратная задача с финальным переопределением:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + g, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(0) = u_0, \qquad u(T) = u_1. \end{cases} \tag{13}$$

Здесь $\varphi(t) \equiv 1$ на $[0, T]$, а $\mu(t)$ есть функция единичного скачка в финальный момент времени $t = T$. Оператор B и элемент f из формул (8), (9) приобретают вид

$$B = U(T), \qquad f = A(U(T)u_0 - u_1). \tag{14}$$

По-прежнему считаем, что полугруппа $U(t)$ является нильпотентной, удовлетворяя соотношению (11) с фиксированным значением $t_0 > 0$. Тогда решение обратной задачи (13) представимо в замкнутой форме

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t-s) g\, ds, \qquad g = \sum_{k=0}^{N_0} B^k f = \sum_{k=0}^{N_0} U(kT) f \tag{15}$$

со значением $N_0 = \lceil t_0/T \rceil - 1$. Учитывая представление (14) для элемента f, формулу (15) для второго компонента g можно записать в виде

$$g = \begin{cases} -Au_1, & t_0 \leqslant T, \\ -Au_1 + A \sum\limits_{k=1}^{N_0} U(kT)(u_0 - u_1), & t_0 > T, \end{cases} \tag{16}$$

где снова $N_0 = \lceil t_0/T \rceil - 1$. Формула (16) удобна на практике.

Перечисленные результаты могут найти применение в специальных разделах математической физики, связанных с теорией упругости и задачами линейного переноса.

Список литературы

[1] **Хилле Э., Филлипс Р.** Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ. 1962. — 830 с.

[2] **Крейн С. Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М: Наука. 1967. — 464 с.

[3] **Pazy A.** Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. — N.Y.: Springer Verlag. 1983. — 279 p.

[4] **Engel K.-J., Nagel R.** One–Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. — N.Y.: Springer. 2000. — 586 p.

[5] **Прилепко А. И., Тихонов И. В.** Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении // Известия РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 2. — С. 167–188.

[6] **Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.** Вопросы корректности прямых и обратных задач для эволюционного уравнения специального вида // Матем. заметки. 1994. Т. 56. Вып. 2. — С. 99–113.

[7] **Balakrishnan A. V.** On superstability of semigroups // In: M.P. Polis et al (Eds.). Systems modelling and optimization. Proceedings of the 18th IFIP Conference on System Modelling and Optimization. CRC Research Notes in Mathematics. – Chapman and Hall. 1999. — P. 12–19.

[8] **Balakrishnan A. V.** Smart structures and super stability // In: G. Lumer, L. Weis (Eds.). Evolution equations and their applications in physical and life sciences. Lecture notes in pure and applied mathematics. Vol. 215. – Marcel Dekker. 2001. — P. 43–53.

[9] **Balakrishnan A. V.** Superstability of systems // Applied Mathematics and Computation. 2005. Vol. 164. Issue 2. — P. 321–326.

[10] **Jian-Hua Chen, Wen-Ying Lu**. Perturbation of nilpotent semigroups and application to heat exchanger equations // Applied Mathematics Letters. 2011. Vol. 24. — P. 1698–1701.

[11] **Creutz D., Mazo M., Preda C.** Superstability and finite time extinction for C_0–Semigroups // arXiv:0907.4812. Submitted. 2013. — P. 1–12.

[12] **Kmit I., Lyul'ko N.** Perturbations of superstable linear hyperbolic systems // arXiv:1605.04703. Submitted. 2017. — P. 1–26.