ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2009
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172

http://www.neva.ru/journal
http://www.math.spbu.ru/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

СОХРАНЕНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Е. А. Титова

Задача о структурной устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений изучалась многими авторами на протяжении последних пятидесяти лет.Одним из важнейших результатов в этой области является теорема Аносова о структурной устойчивости У-систем[1]. Позднее этот результат был обобщен в работах В. А. Плисса[2–6]. Отличие результатов Плисса заключалось в том, что вместо равномерной гиперболичности систем линейного приближения, упоминаемой в определении У-систем, предполагалось, что системы линейных приближений гиперболичны на семействе отрезков. Позднее было показано, что для периодических систем на замкнутых многообразиях условия, приведенные в указанных работах, равносильны условиям Роббина и Робинсона [7],[8](достаточность этих условий для структурной устойчивости диффеоморфизма показана в статье[9]) . Обзор современных результатов по вопросам структурной устойчивости и вопросам сохранения инвариантных множеств можно найти в книгах [10],[11]. В рамках этой работы рассматривается вопрос о сохранении инвариантных множеств отображений Пуанкаре периодических систем. Вместо предположений о гиперболичности инвариантного множества вводится предположение о гиперболичности семейства систем линейного приближения, соответствующих решениям, проходящим через точки инвариантного множества, на семействе отрезков. В настоящей работе, используя методы статей [2–6], мы докажем теорему о сохранении инвариантного множества периодической системы в предположении, что системы в вариациях, соответствующие точкам этого множества, образуют семейство, гиперболичное на наборе отрезков. Отличие результатов настоящей работы от результатов статей [2–6] состоит в том, что мы не предполагаем, что системы, соответствующие точкам, не принадлежащим инвариантному множеству, гиперболичны на семействе отрезков. Отметим также, что можно не предполагать отдельно локальную минимальность рассматриваемого инвариантного множества.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Будем предполагать, что вектор $X(t, x)$ и его матрица Якоби $\partial X(t, x)/\partial x$ по x равномерно непрерывны на всем пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и существует такая константа $M > 0$, что для любых $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства

$$|X(t, x)| \le M, \quad |\partial X(t, x)/\partial x| \le M.$$

Здесь символ $|\cdot|$ обозначает евклидову норму вектора или соответствующую ей матричную норму. Предположим также, что $X(t, x)$ является периодической функцией аргумента t,то есть $X(t, x) \equiv X(t + \Theta, x)$ для некоторого $\Theta > 0$.

Обозначим через $x(t, t_0, x_0)$ решение системы (1) с начальными данными $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$, а через $y(t, t_0, y_0)$ решение системы (2) с начальными данными $y(t_0, t_0, y_0) = y_0$. Введем в рассмотрение отображение Пуанкаре для системы (1), заданное формулой

$$H_X(x_0) = x(\Theta, 0, x_0).$$

Будем считать, что найдется компактное множество Q_X, инвариантное по отношению к отображению H_X. Основным вопросом, рассматриваемым в настоящей работе, является структурная устойчивость этого инвариантного множества при добавлении к правой части системы (1) малого возмущения. Пусть W – некоторая окрестность инвариантного множества Q_X, а $\overline{W}$ – ее замыкание. Положим $\Omega = \{(t, x) : t \in [0, T], x \in \{x(t, 0, x_0) : x_0 \in Q_X\}\}$.

Помимо системы (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{x} = X(t, x) + Y(t, x), \tag{2}$$

где вектор $Y(t, x)$ равномерно непрерывен вместе со своей матрицей Якоби по x и удовлетворяет соотношениям

$$|Y(t, x)| < \delta, \quad |\partial Y(t, x)/\partial x| < \delta \tag{3}$$

при любых $(t,x)\in\Omega$. При этом также считаем, что $Y(t,x)\equiv Y(t+\Theta,x)$. Аналогично определим отображение Пуанкаре H_Y для системы (2).

Рассмотрим множество линейных систем

$$\dot{x}=A(t,x_0)x,\quad x_0\in Q_X, \tag{4}$$

где $A(t,x_0)=\partial X(t,x)/\partial x|_{x=x(t,0,x_0)}$.

Пусть существуют такие числа $a_0>0$, $\lambda>0$, $\alpha>0$, что для любого $x_0\in Q_X$ соответствующая система (4) удовлетворяет следующим условиям, сформулированным в [2].

I. Существуют число $a\in(0,a_0)$ и моменты времени $-\infty=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_s<\tau_{s+1}=+\infty$ $(0\le s\le n)$ такие, что на каждом из промежутков (τ_j,τ_{j+1}) $(j=\overline{0,s})$ система (4) гиперболична с константами a и λ (определение гиперболичности на отрезке приведено в [2]).

Обозначим через $M_j^+(t)$ и $M_j^-(t)$ устойчивое и неустойчивое пространства системы (4) на отрезке (τ_j,τ_{j+1}).

II. Выполнены неравенства $\dim M_j^+(\tau_{j+1})<\dim M_{j+1}^+(\tau_{j+1})$ $(j=\overline{0,s-1})$.

III. Пространства $M_j^-(\tau_{j+1})$ и $M_{j+1}^+(\tau_{j+1})$ пересекаются трансверсально, причем углы между ними удовлетворяют неравенствам $\angle(M_j^-(\tau_{j+1}),M_{j+1}^+(\tau_{j+1}))>\alpha$.

Пусть функция $T(\alpha,\lambda,a)$ определена при положительных аргументах и удовлетворяет неравенствам

$$36a^2\exp\left(\frac{-\lambda T}{3}\right)<\frac{\alpha}{8}\sin\frac{\alpha}{4},\quad 3a\left(\frac{2}{\sin(\alpha/2)}+1\right)\exp\left(\frac{-\lambda T}{3}\right)<1. \tag{5}$$

Теорема. *Предположим, что любая система (4) удовлетворяет приведенным выше условиям I–III и для любого j выполнены следующие неравенства*

$$\tau_{j+1}-\tau_j\ge T=T(a,\lambda,\alpha),\quad (j=\overline{0,s}).$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что если система (2) удовлетворяет условию (3), то найдется множество Q_Y, инвариантное по отношению к H_Y, и такой гомеоморфизм $\varphi: Q_X\to Q_Y$, что для любых $x_0\in Q_X$, $t\in\mathbb{R}$

$$|x(t,0,x_0)-y(t,0,\varphi x_0)|<\varepsilon. \tag{6}$$

Доказательство. Не умаляя общности, будем считать, что условие (3) справедливо для всех $(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}$. В противном случае, мы можем соответствующим образом переопределить возмущение $Y(t,x)$ вне компакта Ω, не меняя его на самом компакте. Очевидно, что все инвариантные подмножества множества Ω при этом сохранятся.

Если M и N – два подпространства $\mathbb{R}^n$ одной размерности, можно ввести угловое расстояние между ними по формуле

$$\mathrm{d}_\angle(M,N) = \max_{x\in M} \angle(x,N).$$

Справедливость следующего утверждения вытекает из теоремы Перрона [6].

Лемма 1. *Пусть линейная система*

$$\dot{x} = A(t)x \tag{7}$$

гиперболична на некотором промежутке $J=(t_1,t_2)\subset\mathbb{R}$ *с константами* a *и* λ *и при этом* $|A(t)|\le M$. *Тогда найдутся такие положительные числа* D *и* ε_1, *зависящие только от* a, λ *и* M, *что при любом выборе матрицы* $B(t)$, *удовлетворяющей условию* $|B(t)|\le\sigma\le\varepsilon_1$, *система*

$$\dot{x} = (A(t)+B(t))x \tag{8}$$

гиперболична на J *с константами* $a+D\sigma$, $\lambda-D\sigma$, *причем если* $M_1^+(t)$ *и* $M_1^-(t)$ *– некоторые устойчивое и неустойчивое пространства системы (7), то соответствующие пространства* $M_2^+(t)$ *и* $M_2^-(t)$ *для системы (8) можно выбрать так, что*

$$\dim M_1^\pm = \dim M_2^\pm \quad \textit{и} \quad \sup_{t\in J} \mathrm{d}_\angle(M_1^\pm(t), M_2^\pm(t)) \le D\sigma. \tag{9}$$

При этом, если $t_2-t_1>T(a,\lambda,\pi/2)$, *то первое из условий (9) выполняется независимо от выбора пространств* $M_j^\pm$.

Фиксируем число T, удовлетворяющее неравенствам (5), и выберем число ε_1, существующее в силу приведенной выше леммы для констант $3a$ и $\lambda/3$ и промежутка $J=\mathbb{R}$.

Определим индекс как упорядоченное по возрастанию подмножество множества $\{0,1,\dots,n\}$. Пусть $I_1=\{n_0,\dots,n_k\}$, $I_2=\{m_0,\dots,m_r\}$ – индексы. Будем говорить, что $I_1<I_2$, если $r>k$ и найдется целое число $0\le s\le r-k$ такое, что $n_i=m_{i+s}$ $(i=\overline{1,k})$. Это отношение является частичным порядком на множестве индексов.

Сопоставим каждой точке $x_0\in Q_X$ индекс $I(x_0)=\{k_0,\dots,k_s\}$, где k_i – размерности пространств M_i^+ системы (4) на отрезках (τ_i,τ_{i+1}).

Выберем моменты времени $\tau_i(x_0)$ следующим образом. Будем считать $\tau_1(x_0)$ наименьшим числом, для которого можно подобрать числа $\tau_2, \ldots, \tau_s$ так, чтобы система (4) удовлетворяла условиям I–III с фиксированными константами a, λ, α и T. В качестве $\tau_2(x_0)$ возьмем наименьшее из чисел, для которых существуют такие $\tau_3, \ldots, \tau_s$, что указанные выше условия выполняются. Таким образом, каждой точке x_0 можно поставить в соответствие моменты времени $\tau_i(x_0)$ $(i = \overline{1, s})$. Рассмотрим отрезок $J(x_0) = (\tau_1(x_0) - 2T, \tau_s(x_0) + 2T)$.

Определим расстояние между решениями таким образом:

$$d(x_1, x_2) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t, 0, x_1) - x(t, 0, x_2)|.$$

Это расстояние, которое может быть равно $+\infty$, строго положительно при любых различных x_1, x_2. Помимо этого для любого отрезка $J = [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ определим

$$d_J(x_1, x_2) = \sup_{t\in J} |x(t, 0, x_1) - x(t, 0, x_2)|.$$

Рассмотрим множество систем

$$\dot{x} = P(t, x_0)x, \quad x_0 \in Q_X, \tag{10}$$

матрицы коэффициентов которых определены по формулам

$$P(t, x_{01}, \ldots, x_{0n}) = \frac{1}{(2\Delta)^n} \int\limits_{x_{01}-\Delta}^{x_{01}+\Delta} \ldots \int\limits_{x_{0n}-\Delta}^{x_{0n}+\Delta} A(t, \xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n,$$

где $x_0 = \mathrm{col}(x_{01}, \ldots, x_{0n})$, а $\Delta > 0$ – произвольное число. Далее, следуя [7], будем выбирать вместо $A(t, x_0)$ в качестве матриц коэффициентов систем линейного приближения “сглаженные” по x_0 матрицы $P(t, x_0)$.

Условимся обозначать буквой K константы, которые зависят только от параметров n, a, α, λ и M. Выбирая Δ достаточно малым, можно добиться того, чтобы для любого наперед заданного $\sigma > 0$ неравенство $|P(t, x_0) - A(t, x_0)| < \sigma$ имело место для любых t и x_0. Это следует из равномерной непрерывности по x_0 матриц $A(t, x_0)$. Помимо этого $P(t, x_0) \in C^1_{x_0}$, причем ее частные производные ограничены по норме некоторой константой K_1/Δ. Семейство систем (10) удовлетворяет условиям I–III, если Δ достаточно мало, причем соответствующие константы можно считать сколь угодно мало отличающимися от a, λ, α и T. Тогда, не умаляя общности, можно считать, что неравенства (5) остаются справедливыми. Далее будем полагать Δ достаточно малым и фиксированным (его выбор определяется значениями параметров n, a, α, λ и M).

Из леммы 1 и теоремы о дифференцируемости по начальным данным и параметру вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.

1. В условиях доказываемой теоремы для любой точки x_0 индекс $I(x_0)$ определен однозначно, если выполнены оценки (5). При этом индекс, вычисленный при помощи системы (10), совпадает с индексом, найденным при помощи системы (4).

2. Для любой точки x_1 из окрестности $U(x_0) = \{x_1 : d_{J_{x_0}}(x_0, x_1) \leq \varepsilon_1\}$ справедливо отношение $I(x_1) \geq I(x_0)$.

3. Если $x_n \to x_0$, то найдется N такое, что $I(x_n) \geq I(x_0)$ для любого $n > N$.

4. Найдется такая константа $K_2 > 0$, что для любого $x_1 \in U(x_0)$ существует $m \geq 0$ такое, что для всех $i = \overline{1, s}$ имеют место оценки

$$|\tau_i(x_0) - \tau_{i+m}(x_1)| \leq K_2 d_{J_{x_0}}(x_0, x_1), \tag{11}$$

причем для любого $i = \overline{0, s}$ на отрезках $(\tau_i(x_0), \tau_{i+1}(x_0))$ и $(\tau_{i+m}(x_1), \tau_{i+m+1}(x_1))$ размерности устойчивых пространств системы (10) и системы $\dot{x} = P(t, x_1)x$ совпадают.

Обозначим через C^0 пространство непрерывных ограниченных вектор-функций f. В качестве нормы возьмем стандартную $\|f\| = \sup\limits_t |f(t)|$. Обозначим через $\mathcal{P}$ функционал, определенный по формуле $\mathcal{P}f = f(0)$. Введем в рассмотрение линейную неоднородную систему

$$\dot{x} = P(t, x_0)x + f(t). \tag{12}$$

Лемма 3. *Существуют такие числа K_3 и K_4, что при выполнении условий доказываемой теоремы для любого $x \in Q_X$ найдется линейный оператор $\mathcal{L}_x : C^0 \to C^0$, для которого имеют место следующие утверждения.*

1. Для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ и любой $f \in C^0$ функция $\mathcal{L}_{x_0}f$ является ограниченным решением системы (12).

2. Норма $\|\mathcal{L}_{x_0}\| \leq K_3$ для любого $x_0 \in Q_X$.

3. Если

$$d(x_1, x_2) \leq \varepsilon_1, \tag{13}$$

то

$$\|\mathcal{L}_{x_1} - \mathcal{L}_{x_2}\| \leq K_4 d(x_1, x_2). \tag{14}$$

4. Семейство функционалов $\{\mathcal{P}\mathcal{L}_x : x \in Q_X\}$ *непрерывно по* x.

Доказательство. Пусть L и N – подпространства $\mathbb{R}^n$, пересекающиеся трансверсально, причем $\angle(L, N) \geq \alpha/2$ и $\dim L + \dim N > n$. Пусть $V = L \cap N$, тогда $\dim V \geq 1$. Обозначим через L' и N' ортогональные дополнения к V в пространствах L и N соответственно. В этом случае существуют проекторы $P_{N'}$, $P_{L'}$ и P_V на пространства N', L' и V соответственно такие, что $P_{N'} + P_{L'} + P_V = E$ и $\max\{\|P_{N'}\|, \|P_{L'}\|, \|P_V\|\} \leq 1/\sin(\alpha/2)$.

Рассмотрим пространства $\bar{L} = L + x_1$ и $\bar{N} = N + x_2$, где $x_{1,2}$ – векторы, удовлетворяющие неравенствам $|x_i| < \rho$ $(i = 1, 2)$. Тогда пространства $\bar{L} = L + x_1$ и $\bar{N} = N + x_2$ пересекаются трансверсально, а наименьший по норме вектор $\xi \in \bar{L} \cap \bar{N}$ может быть найден по формуле

$$\xi = P_{N'} x_1 + P_{L'} x_2, \tag{15}$$

причем $|\xi| \leq 2\rho/\sin(\alpha/2)$.

Рассмотрим для каждого $k = \overline{1, n-1}$ грассманово многообразие G_n^k, точками которого являются k-мерные линейные подпространства $\mathbb{R}^n$. Это компактное многообразие размерности $k(n-k)$. Рассмотрим на нем меру μ_k, порожденную мерой Лебега в $\mathbb{R}^{k(n-k)}$. Не умаляя общности, можно считать, что $\mu_k(G_n^k) = 1$. Отметим, что угловое расстояние задает метрику на грассмановых многообразиях. Эта метрика определяет топологию на G_n^k и согласована с мерой μ_k в том смысле, что мера любого открытого множества будет положительна, а мера шаров малого радиуса мала.

Пространства $M_0^{\pm}$ и $M_s^{\pm}$ для каждого x_0 определены однозначно, но для конечных отрезков это не так, поэтому для однозначного определения решений, равномерно ограниченных на конечных отрезках (τ_i, τ_{i+1}), приходится воспользоваться следующим алгоритмом.

Фиксируем $x_0 \in Q_X$ и рассмотрим некоторое число $k \in I(x_0)$. Пусть $i \in \{1, \ldots, s-1\}$ таково, что $k = k_i = \dim M_i$. Назовем пространство $M \in G_n^k$ допустимым устойчивым на отрезке (τ_i, τ_{i+1}) (значения $\tau_i(x_0)$ определены выше), если для любых $\tau_{i+1} > t > s > \tau_i$, $u \in \Phi(s, \tau_i)M$ справедливы оценки $|\Phi(t, s)u| \leq 3a \exp(-\lambda(t-s)/3)|u|$, где $\Phi(t, s)$ – матрица Коши системы (10). Аналогично введем понятие допустимого неустойчивого пространства. Если N – некоторое допустимое пространство на отрезке (τ_i, τ_{i+1}), определим для любого $t \in \mathbb{R}$ пространство $N(t) = \Phi(t, \tau_i)N$. Обозначим множество допустимых устойчивых пространств на отрезке (τ_i, τ_{i+1}) через Δ_i^+, а множество допустимых неустойчивых пространств через Δ_i^-. Все эти множества являются замкнутыми, причем, как легко видеть, при любом выборе точки x_0 свойство $\mu_{k_i}(\Delta_i^\pm) > 0$ имеет место для любого $i = \overline{1, s-1}$. При этом можно считать параметр T столь большим, что при каждом фиксированном i любое допустимое устойчивое пространство на соответствующем отрезке трансверсально пересекается с любым допустимым неустойчивым, и для любых $t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, $M_{1,2}^+ \in \Delta_i^+$, $M_{1,2}^- \in \Delta_i^-$ справедливы оценки

$$\angle(M_1^+(t), M_2^+(t)) \le \alpha/4, \quad \angle(M_1^-(t), M_2^-(t)) \le \alpha/4. \tag{16}$$

Зафиксируем для каждого $i = \overline{1, s-1}$ некоторые допустимые устойчивое и неустойчивое пространства M_i^+ и M_i^-. Из условия их трансверсального пересечения следует, что для любого $t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$ найдутся проекторы $\Pi_i^+(t)$ и $\Pi_i^-(t)$ на пространства $M_i^+(t)$ и $M_i^-(t)$ соответственно такие, что $\Pi_i^+(t) + \Pi_i^-(t) \equiv E$, $\Pi_i^\pm(t)|_{M_i^\pm(t)} = E$, $\Pi_i^\pm(t)|_{M_i^\mp(t)} = 0$. Эти проекторы определены однозначно, непрерывно зависят от выбора t и пространств M_i^+ и M_i^-.Эти проекторы в силу свойств допустимых пространств оцениваются по норме некоторой константой, зависящей только от свойств системы (1).

Из формул (16) и условия теоремы следует, что $\angle(M_{i-1}^-(\tau_i), M_i^+(\tau_i)) \ge \alpha/2$.

Пусть $f \in C^0$. Полагаем

$$\mathcal{L}_i[x_0, M_i^+, M_i^-]f = \psi_i,$$

$$\psi_i(t) = \int\limits_{\tau_i}^{t} \Phi(t,s)\Pi_i^+(s)f(s)\,ds - \int\limits_{t}^{\tau_{i+1}} \Phi(t,s)\Pi_i^-(s)f(s)\,ds.$$

Легко проверить, что функции $\psi_i(t)$ являются решениями системы (12) на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Найдется такое $\widetilde{K}_3 > 0$, что $\|\mathcal{L}_i[x_0, M_i^+, M_i^-)]\| \le \widetilde{K}_3$ для любых $x_0 \in Q_X$, $i = \overline{0, s}$.

Рассмотрим на каждом из промежутков $(-\infty, \tau_1], [\tau_1, \tau_2], \ldots, [\tau_s, +\infty)$ аффинные пространства

$$\bar{M}_i^\pm(t) = M_i^\pm(t) + \psi_i(t).$$

Тогда точка $\xi_1(M_0^-(\tau_1), M_1^+(\tau_1))$, наименьшая по норме на $\bar{M}_0^-(\tau_1) \cap \bar{M}_1^+(\tau_1)$, линейно зависит от f, поскольку функции ψ_0 и ψ_1 – образы линейных операторов от f, а ξ_1 может быть найдено по формуле (15), если положить

$x_1 = \psi_0(\tau_1)$, $x_2 = \psi_1(\tau_1)$, $L = M_0^-$, $N = M_1^+$. Помимо этого найдется такое число $\hat{K}_3 > 0$, что $|\xi_1| \le \hat{K}_3\|f\|$, и сам вектор ξ_1 непрерывно зависит от M_1^+.

Обозначим через $L_1 = L_1(\tau_1)$ ортогональное дополнение пересечения $M_0^-(\tau_1) \cap M_1^+(\tau_1)$ до всего подпространства $M_0^-(\tau_1)$, а через $\bar{L}_1 = \bar{L}_1(\tau_1)$ пространство $L_1 + \xi_1$. Положим $L_1(t) = \Phi(t,\tau_1)L_1$, $\bar{L}_1(t) = L_1(t) + \psi_1(t)$ для любого $t \in [\tau_1, \tau_2]$.

Определим точку ξ_2 как наименьшую по норме точку из $\bar{L}_1(\tau_2) \cap \bar{M}_2^+(\tau_2)$. Аналогично построим пространства $L_2(t)$ и $\bar{L}_2(t)$ и т.д.

Как показано при доказательстве теоремы 1.2 из [2], в силу (5) найдется константа K_3 такая, что решение $\phi(t)$ системы (12) с начальными данными $\phi(\tau_s) = \xi_s$ удовлетворяет оценке

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\phi(t)| \le K_3\|f\|.$$

Все точки ξ_i линейно зависят от вектор-функции f.Таким образом, само решение $\phi(t)$ тоже линейно зависит от f, т.е. можно положить $\mathcal{L}_{x_0}[M_1^+, M_1^-, \ldots, M_{s-1}^+, M_{s-1}^-]f = \phi$. Построенные операторы непрерывно зависят от $M_1^+, M_1^-, \ldots, M_{s-1}^+, M_{s-1}^-$.

Неоходимо, чтобы строимый оператор был свободен от выбора допустимых пространств. Чтобы добиться этого результата воспользуемся процедурой осреднения. Определим для $N \in G_n^{k_i}$ $(i = \overline{1, s-1})$ число устойчивости $\gamma_i^+(N)$ как наименьшее из чисел γ таких, что для любого $x \in N$ и любых t, s, удовлетворяющих условиям $\tau_i \le s \le t \le \tau_{i+1}$, справедливы оценки $|\Phi(t,s)x| \le$ $\le a\gamma\exp(-\lambda(t-s)/\gamma)|x|$. Величина $\gamma_i^+(N)$ определена, положительна при любом выборе N и непрерывно зависит от своего аргумента.

Фиксируем некоторую C^∞-гладкую монотонную функцию $\zeta : [0,\infty) \to [0,\infty)$, обладающую следующими свойствами: 1) $\zeta(x) = 1$, если $x \le 2$; 2) $\zeta(x) = 0$, если $x \ge 2,5$. Положим $\widetilde{\omega}_i^+(N) = \zeta(\gamma_i^+(N))$ для любых $i = \overline{1, s-1}$ и $N \in G_n^{k_i}$. Тогда для любого i

$$\int\limits_{G_n^{k_i}} \widetilde{\omega}_i^+(N)\, d\mu_{k_i}(N) > 0.$$

Обозначим

$$\omega_i^+(N) = \widetilde{\omega}_i^+(N) \Big/ \int\limits_{G_n^{k_i}} \widetilde{\omega}_i^+\, d\mu_{k_i}.$$

Отметим, что из условия $\omega_i^+(N) > 0$ следует, что N является допустимым устойчивым пространством на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$.

По аналогии введем в рассмотрение понятие чисел неустойчивости $\gamma_i^-(N)$ для пространств $N \in G_n^{n-k_i}$ и построим функции $\omega_i^-(N)$.

Введем для удобства записи обозначения

$$G_{x_0} = \prod_{i=1}^{s-1} (G_n^{k_i} \times G_n^{n-k_i}), \quad M = (M_1^+, M_1^-, \dots, M_{s-1}^+, M_{s-1}^-),$$

$$\omega(M) = \prod_{i=1}^{s-1} (\omega_i^+(M_i^+)\omega_i^-(M_i^-)), \quad \mu_{x_0} = \prod_{i=1}^{s-1} (\mu_{k_i} \times \mu_{n-k_i}).$$

Определим оператор $\mathcal{L}_{x_0}$ по формуле

$$\mathcal{L}_{x_0} f = \int\limits_{G_{x_0}} \omega(M) \mathcal{L}_{x_0}[M] f \, d\mu_{x_0}(M). \tag{17}$$

Построенная вектор-функция является решением системы (12) и при этом $\|\mathcal{L}_{x_0}\| \leq K_3$.

Установим справедливость утверждения 3 доказываемой леммы. Заметим, что из условия $d(x_1, x_0) < \varepsilon_1$ следует, что $I(x_1) = I(x_0)$, причем соответствующие точки τ_i для x_1 и x_0 будут близки в смысле (11).

Фиксируем $i = \overline{1, s-1}$ и рассмотрим для точки x_1 пару пространств M^+ и M^-, являющихся допустимыми устойчивым и неустойчивым для системы $\dot{x} = P(t, x_1)x$ на отрезке $[\tau_i(x_1), \tau_{i+1}(x_1)]$. Тогда для любого t из этого отрезка найдутся проекторы $\Pi^+(t)$ и $\Pi^-(t)$ на пространства $M^+(t)$ и $M^-(t)$ соответственно, оцениваемые по норме некоторой константой $\hat{K}_4(a, \lambda)$, непрерывные по t и такие, что $\Pi^+(t) + \Pi^-(t) \equiv E$. Обозначим через $\Phi_j(t, s)$ матрицы Коши систем $\dot{x} = P(t, x_j)x$ $(j = 1, 2)$. Определим $F_i(M^+, M^-) = (N^+, N^-)$, где

$$N^+ = \left\{ x = \xi^+ - \int\limits_{\tau_i(x_1)}^{\tau_{i+1}(x_1)} \Phi_1(t, \tau_i(x_1)) \Pi^-(t) (P(t, x_2) - P(t, x_1)) x \, dt, \quad \xi^+ \in M^+ \right\},$$

$$N^- = \left\{ x = \xi^- - \int\limits_{\tau_i(x_1)}^{\tau_{i+1}(x_1)} \Phi_1(t, \tau_i(x_1)) \Pi^-(t) (P(t, x_2) - P(t, x_1)) x \, dt, \quad \xi^- \in M^- \right\}.$$

Очевидно, что $N^\pm$ являются линейными пространствами. Как следует из результатов теории гиперболических систем, $\dim N^\pm = \dim M^\pm$, так как при любых фиксированных ξ^+ и ξ^- уравнения, определяющие $N^\pm$, имеют единственные решения. Определим пространства $N^\pm(t) = \Phi_2(t,\tau_i(x_0))N^\pm$ для любого $t \in \mathbb{R}$ и обозначим $F_i^\pm(M^+,M^-) = N^\pm$. Из теоремы Перрона следует, что найдется константа $\bar{K}_4$ такая, что для любых допустимых пространств M^+ и M^- и любых точек $x_{1,2}$, удовлетворяющих (13),

$$\max(\mathrm{d}_\angle(M^+,F_i^+(M^+,M^-)),\mathrm{d}_\angle(M^-,F_i^-(M^+,M^-))) \leq \bar{K}_4 d(x_1,x_2),$$
$$\|DF_i(M^+,M^-) - E\| \leq \bar{K}_4 d(x_1,x_2), \tag{18}$$
$$\|\mathcal{L}_i[x_1,M^+,M^-] - \mathcal{L}_i[x_2,F_i(M^+,M^-)]\| \leq \bar{K}_4 d(x_1,x_2),$$
$$G_{x_1} = G_{x_2}, \mu_{x_1} = \mu_{x_2}.$$

Отсюда, в частности, следует, что отображение F_i взаимно однозначно. Докажем данное утверждение методом от противного. Предположим, F_i не является взаимнооднозначным. Тогда найдутся такие допустимые пространства $M_0^\pm$ и $M_1^\pm$, что

$$F_i(M_0^+,M_0^-) = F_i(M_1^+,M_1^-). \tag{19}$$

Пусть $\Pi_j^\pm$ – определенные выше проекторы на пространства $M_j^\pm$ $(j = 0,1)$. Рассмотрим для любого $p \in [0,1]$ пространства $M_p^\pm = \{x \in Q_X : p\Pi_1^\pm x + (1-p)\Pi_0^\pm x = 0\}$. Тогда из определения F_i и формулы (19) следует, что $F_i(M_0^+,M_0^-) = F_i(M_p^+,M_p^-)$ для любого $p \in [0,1]$, что противоречит при малых p второму из неравенств (18).

Также из формулы (18) следует, что если ε_1 достаточно мало, то из условий $\gamma^+(M^+) < 2.75$, $\gamma^-(M^-) < 2.75$ получаем, что пространства $F_i^+(M^+,M^-)$ и $F_i^-(M^+,M^-)$ являются для системы

$$\dot{x} = P(t,x_2)x$$

на отрезке $[\tau_i(x_2),\tau_{i+1}(x_2)]$ допустимым устойчивым и допустимым неустойчивым соответственно.

Пусть $M = (M_1^+,M_1^-,\ldots,M_{s-1}^+,M_{s-1}^-)$. Определим

$$F(M) = (F_1(M_1^+,M_1^-),\ldots,F_{s-1}(M_{s-1}^+,M_{s-1}^-)).$$

Сделаем преобразование переменных под знаком интеграла в (17), заменив M на $F(M)$. Это преобразование возможно, так как функции $\omega_i^\pm$ отличны от нуля только для допустимых пространств, для которых отображения F_i

определены. Таким образом, определив произвольным образом F_i для недопустимых пар и обозначив через $J[M]$ якобиан полученного преобразования, имеем

$$\mathcal{L}_{x_0}f = \int\limits_{G_{x_0}} \omega(F(M))\mathcal{L}_{x_0}[F(M)]fJ[M]\,d\mu_{x_0}(M). \tag{20}$$

Подставляя в (17) x_1 вместо x_0 и сравнивая полученное выражение с (20), убеждаемся, что справедливость оценки (14) следует из (18).

Осталось установить справедливость утверждения 4. Фиксируем $x_0 \in Q_X$. Пусть $x_1 \in U(x_0)$, тогда $I(x_1) \geq I(x_0)$. Пусть m – число, определенное для точки x_1 в силу п. 4 леммы 2. Возьмем на каждом из отрезков $(\tau_m(x_1), \tau_{m+1}(x_1))$ и $(\tau_{m+s}(x_1), \tau_{m+s+1}(x_1))$ по паре допустимых пространств $N_A^{\pm}(t)$ и $N_Z^{\pm}(t)$ соответственно. Для любого наперед заданного $\Theta > 0$ любое допустимое пространство $N_A^{\pm}(t)$ сколь угодно близко к $M_0^{\pm}(t)$ на отрезке $[\tau_1(x_0) - \Theta, \tau_1(x_0)]$, а пространство $N_Z^{\pm}(t)$ – к $M_s^{\pm}(t)$ на отрезке $[\tau_s(x_0), \tau_s(x_0) + \Theta]$, если x_1 достаточно близко к x_0. В этом случае число Θ можно взять большим. Определим для каждого $f \in C^0$ решение $\hat{\mathcal{L}}f$ системы

$$\dot{x} = P(t, x_1)x + f(t) \tag{21}$$

таким образом, как если бы было $I(x_0) = I(x_1)$, $\tau_m(x_1) = -\infty$, $\tau_{m+s+1}(x_1) = +\infty$, а пространства $N_A^{\pm}(t)$ и $N_Z^{\pm}(t)$ были бы единственными допустимыми на соответствующих лучах. Полученное решение, вообще говоря, не будет ограниченным, однако, на любом наперед заданном конечном отрезке $J \subset \mathbb{R}$ оно будет сколь угодно близко к $\mathcal{L}_{x_0}f$ (равномерно по всем $N_A^{\pm}(t)$ и $N_Z^{\pm}(t)$), если x_1 близко к x_0. Таким образом, в силу теоремы о непрерывности по начальным данным и параметру достаточно показать, что

$$\mathcal{L}_{x_1}f(\tau_{s+m}(x_1)) - \hat{\mathcal{L}}f(\tau_{s+m}(x_1)) \to 0 \quad \text{при} \quad x_1 \to x_0. \tag{22}$$

Как следует из доказательства теоремы 1.2 работы [2], для любого $\sigma > 0$ найдется такая константа $\hat{T} > 0$, что для любой системы (21) и любого j из условия $\tau_{j+1}(x_1) - \tau_j(x_1) > \hat{T}$ следует, что если $\psi_{1,2}$ – решения системы (21) ($|\psi_j| \leq 2K_3\|f\|$), то $|\psi_1(\tau_j(x_1)) - \psi_2(\tau_j(x_1))| \leq$ $\leq \sigma\|f\|$. Однако, неравенства

$$\tau_{m+1}(x_1) - \tau_m(x_1) > 2\hat{T}, \quad \tau_{s+m+1}(x_1) - \tau_{s+m}(x_1) > 2\hat{T},$$

$$\sup_{\tau_{m+1}(x_1) - 2\hat{T} \leq t \leq \tau_{m+s}(x_1) + 2\hat{T}} \|\hat{\mathcal{L}}f(t)\| \leq 2K_3\|f\|$$

справедливы для всех x_1 из некоторой окрестности точки x_0, что и показывает справедливость (22). Отсюда следует непрерывность семейства $\{\mathcal{P}\mathcal{L}_x\}$ в точке x_0. Лемма 3 доказана.

Приступим к построению гомеоморфизма $\varphi x = x + \eta x$. Полаем $K_5 = \max\{K_3, K_4\}$. Не умаляя общности, будем считать, что $x(t,0,x_0) \equiv x_0 = 0$. Этого можно добиться заменой $x = y + x(t,0,x_0)$. Представим правую часть системы (1) в виде

$$X(t,x) = P(t,x_0)x + S(t,x).$$

Обозначим $R(t,x) = S(t,x) + Y(t,x)$. Отметим, что, взяв в определении $P(t,x_0)$ достаточно малое Δ, можно выбрать константу ε_2, зависящую только от свойств системы (1), такую, что имеют место оценки

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ |x|\le\varepsilon_2}\left|\frac{\partial R}{\partial x}(t,x)\right| \le \frac{1}{4K_5}.$$

Фиксируем $\varepsilon \in (0, \min(\varepsilon_1/2, \varepsilon_2))$. Построим последовательные приближения $\eta_k(t,x_0)$ по формулам

$$\eta_0(t,x_0) \equiv 0; \quad \eta_k(t,x_0) = \mathcal{L}_{x_0}[R(\cdot, \eta_{k-1}(\cdot, x_0))](t) \quad \text{при} \quad k\in\mathbb{N},$$

где $\mathcal{L}_{x_0}$ – оператор, определенный в силу леммы 3. Заметим, что функции $\eta_k(t,x_0)$ при любом k являются ограниченными решениями систем

$$\dot{x} = P(t,x_0)x + R(t, \eta_{k-1}(t,x_0)).$$

Все последовательные приближения определены при любых $k\in\mathbb{N}$ и $t\in\mathbb{R}$.

Лемма 4. *Существует число $\delta_1 > 0$ такое, что если $Y(t,x)$ удовлетворяет (3) для $\delta < \delta_1$, то при любом выборе $k\in\mathbb{N}$ и $t\in\mathbb{R}$ имеет место оценка*

$$|\eta_k(t,x_0) - \eta_{k-1}(t,x_0)| \le 2^{-k}\varepsilon. \tag{23}$$

Доказательство. Выбрав $\delta_1 = (\varepsilon/4)K_5$, докажем справедливость (23) по индукции. При $k = 1$ это очевидно.

Пусть при некотором $k = m$ рассматриваемое неравенство имеет место. Тогда

$$|\eta_{m+1}(t,x_0) - \eta_m(t,x_0)| = |\mathcal{L}_{x_0}[R(\cdot,\eta_m(\cdot,x_0)) - R(\cdot,\eta_{m-1}(\cdot,x_0))](t)| \le$$

$$\le K_3 \sup_{s\in\mathbb{R}} |R(s,\eta_m(s,x_0)) - R(s,\eta_{m-1}(s,x_0))| \le$$

$$\leq 2^{-1} \sup_{s\in\mathbb{R}} |\eta_m(s,x_0) - \eta_{m-1}(s,x_0)| \leq 2^{-m-1}\varepsilon,$$

что и означает справедливость (23) при $k = m+1$. Лемма 4 доказана.

Таким образом, последовательность $\eta_k(t,x)$ сходится равномерно. Полагаем $\eta_*(t,x) = \lim\limits_{k\to+\infty} \eta_k(t,x)$, $\eta x_0 = \eta_*(0,x_0)$. Заметим, что $|\eta_*(t,x_0)| \leq \varepsilon$ для любых $t \in \mathbb{R}$, $x_0 \in Q_X$. Покажем, что функция

$$x(t,x_0) + \eta_*(t,x_0)$$

является решением системы (2).

Будем, как и ранее, не умаляя общности, считать, что $x(t,0,x_0) \equiv 0$. Тогда в силу непрерывности оператора $\mathcal{L}_{x_0}$ справедливо соотношение $\eta_*(t,x_0) = \mathcal{L}_{x_0} R(\cdot, \eta_*(\cdot,x_0))(t)$. Значит, $\eta_*(t,x_0)$ является решением системы

$$\dot{x} = P(t,x_0)x + R(t,\eta_*(t,x_0)),$$

а стало быть, и системы (2).

Итак, если определить $\varphi x_0 = x_0 + \eta x_0$, то решение $y(t,\varphi x_0) = x(t,x_0) + \eta_*(t,x_0)$ системы (2) удовлетворяет соотношению (6). Осталось показать, что φ – гомеоморфизм. Доказательство этого факта разобьем на 3 этапа.

Лемма 5. *Отображение φ непрерывно.*

Доказательство. Достаточно установить непрерывность η. Используя утверждения леммы 3 (п. 2) и теоремы об интегральной непрерывности, легко доказать по индукции, что функции $\eta_k(0,x)$ непрерывны по x при любом k. Тогда непрерывность отображения η следует из равномерной сходимости приближений $\eta_k(0,x)$ в силу теоремы Вейерштрасса. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Отображение φ взаимно однозначно.*

Доказательство. Пусть точки $x_{1,2} \in Q_X$ таковы, что

$$\varphi x_1 = \varphi x_2. \tag{24}$$

Тогда из условия (6) следует, что $d(x_1,x_2) \leq 2\varepsilon \leq \varepsilon_1$, т.е. выполнено условие (13), а тем самым и соотношение (14).

Из (24) получаем, что $y(t,0,\varphi x_1) \equiv y(t,0,\varphi x_2)$, т.е.

$$x(t,x_1) + \eta_*(t,x_1) \equiv x(t,x_2) + \eta_*(t,x_2).$$

Следовательно, получаем

$$x(t,x_1) - x(t,x_2) \equiv \eta_*(t,x_2) - \eta_*(t,x_1) =$$

$$= \mathcal{L}_{x_2} R(\cdot, \eta_*(\cdot, x_2))(t) - \mathcal{L}_{x_1} R(\cdot, \eta_*(\cdot, x_1))(t) =$$
$$= \mathcal{L}_{x_2}[R(\cdot, \eta_*(\cdot, x_2)) - R(\cdot, \eta_*(\cdot, x_1))](t) + [\mathcal{L}_{x_2} - \mathcal{L}_{x_1}] R(\cdot, \eta_*(\cdot, x_1))(t). \quad (25)$$

Норма правой части равенства (25) оценивается выражением $K_3 \varepsilon d(x_1, x_2) + K_4 d(x_1, x_2)\varepsilon \leq \leq d(x_1, x_2)/2$ в силу выбора ε. Отсюда $d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_2)/2$ и, значит, $x_1 = x_2$. Лемма 6 доказана.

Суммируя полученные результаты, убеждаемся, что φ является гомеоморфизмом множества Q_X.

Положим $Q_Y = \varphi_Y Q_X$. Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что это множество инвариантно. Предположим, что это не так и $H_Y(Q_Y) \setminus Q_Y \neq \emptyset$. Случай, когда $Q_Y \setminus H_Y(Q_Y) \neq \emptyset$ разбирается аналогичным образом. Пусть $y_1 \in H_Y(Q_Y) \setminus Q_Y$. Пусть $y_0 \in Q_Y$ таково, что $y_1 = H_Y(y_0)$. Рассмотрим $x_0 = \varphi^{-1}(y_0)$. Для этих точек x_0 и y_0 и любого $t \in \mathbb{R}$ имеет место соотношение $|x(t, 0, x_0) - y(t, 0, y_0)| < \varepsilon$, эквивалентное следующему условию

$$|x(t, \Theta, x_1) - y(t, \Theta, y_1)| < \varepsilon \qquad t \in \mathbb{R}. \quad (26)$$

В силу периодичности правых частей систем (1) и (2) это означает, что

$$|x(t, 0, x_1) - y(t, 0, y_1)| < \varepsilon \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда по аналогии с леммой 6 легко видеть, что $y_1 \in K_Y$. Теорема доказана.

Следствие. *В предположениях доказанной выше теоремы существует непрерывно дифференцируемое по $t \in \mathbb{R}$ семейство гомеоморфизмов, обладающее следующими свойствами.*

1. Если $x(t) = x(t, 0, x_0)$ – решение системы (1), то $\varphi_t x(t)$ – решение системы (2).

2. Если id *– тождественное отображение, то $\|\varphi_t - \mathrm{id}\| < \varepsilon$ для любого $t \in \mathbb{R}$.*

Гомеоморфизм φ_t можно определить по формуле $\varphi_t x_0 = y(t, 0, \varphi x(0, t, x_0))$, где φ – отображение, существующее в силу доказанной теоремы.

Список литературы

[1] *Аносов Д.В.*// Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразий отрицательной кривизны. // Тр. матем. института им. В.А.Стеклова. 1967. С. 99.

[2] *Крыжевич С.Г., Плисс В.А.* // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 10. С. 1325–1333.

[3] *Плисс В.А.*// Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 5. С. 883–891.

[4] *Плисс В.А.*// Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 9. С. 1599–1616.

[5] *Плисс В.А.*// Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 10. С. 1891–1892.

[6] *Плисс В.А.*// Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 5. С. 828–835.

[7] *Robbin J.V.*// A structural stability theorem .// Annals of Mathematics. 1971. V. 94. № 3. P. 447–493.

[8] *Robinson C.*// Structural stability of C1 flows.// Lecture Notes in Math. 1975. V. 468. P. 262–277.

[9] *Mane R.*// A proof of the C^1 stability conjecture.// Math. de l'Institut des Hautes Etudes Sci. 1987. P. 161–210.

[10] *Каток А. Б., Хасселблат Б.*// Введение в современную теорию динамических систем.// М.,"Факториал". 1999. 768 с.

[11] *Пилюгин С. Ю.*// Пространства динамических систем.//М. 1980. 272 с.

[12] *Perron O.*// Math. Z. 1929. Bd 29. S. 129–160.

Санкт-Петербургский государственный университет Поступила в редакцию 2008 г.