*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ*
*И*
*ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ*
*№ 1, 2014*
*Электронный журнал,*
*рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010*
*ISSN 1817-2172*

*http://www.math.spbu.ru/diffjournal*
*e-mail: jodiff@mail.ru*

*Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*

# ПРЯМЫЕ ИЗОКЛИНЫ АВТОНОМНЫХ КУБИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо, Д.С. Ушхо

Инженерно-физический факультет Адыгейского государственного университета
Россия, 385000, г. Майкоп, ул. Первомайская, дом 208, e-mail: stvb2006@rambler.ru

**Аннотация**

В данной работе изучаются вопросы, связанные с прямыми изоклинами автономной дифференциальной системы, правые части которой представляют собой полиномы третьей степени. Для этой системы, имеющей максимальное число параллельных между собой прямых изоклин, дана оценка сверху общего числа прямых изоклин. Кроме этого, дана оценка сверху числа инвариантных прямых кубической системы, имеющей хотя бы одно состояние равновесия и пять параллельных между собой прямых изоклин. Рассмотрены достаточные условия отсутствия предельных циклов у системы, имеющей три инвариантные прямые и максимальное число параллельных между собой прямых изоклин.

**Abstract**

The questions related to straight-line isoclines of autonomous differential system with the third order polynomial right-hand side are studied. For this system with the maximum number of parallel between themselves straight-line isoclines the estimation of an upper bound on the general number of straight-line isoclines is given. Moreover the estimation of an upper bound on the number of invariant straight lines of cubic system with at least one equilibrium state and five parallel straight-line isoclines between themselves are obtained. Sufficient conditions of absence of limit cycles in the system with three invariant straight lines and the maximum number of parallel between themselves straight-line isoclines are considered.

## 1. Введение

Методы качественного интегрирования системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y), \end{cases} \tag{1}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – аналитические функции в области $D \subset R^2$, широко используются при решении различных прикладных задач [1, 2]. Особое место среди них занимают системы, правые части которых представляют многочлены с действительными коэффициентами. Это обусловлено их фундаментальной ролью в теории дифференциальных систем в качестве математических моделей.

Современная качественная теория полиномиальных дифференциальных систем традиционно решает вопросы, касающиеся, в основном, исследования классических проблем: различения центра и фокуса; изохронности центра и фокуса; существования, отсутствия, единственности, взаимного расположения и оценки числа предельных циклов, так или иначе связанных с 16-ой проблемой Гильберта. Обзор работ, посвященных 16-ой проблеме Гильберта, можно найти в статьях [3, 4]. Среди этого многообразия работ следует выделить монографию [5], являющуюся классической и ставшей библиографической редкостью, учебное пособие [6], работы [7, 8], которые посвящены изучению топологической структуры сложной особой точки системы (1).

Так как в данной работе основными объектами в исследовании являются особая точка, состояние равновесия, прямая изоклина, то напомним в каком контексте они определяются и понимаются. Точка плоскости, являющаяся состоянием равновесия системы (1), одновременно является и особой точкой соответствующего системе дифференциального уравнения фазовых траекторий $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, и наоборот. Несмотря на то, что понятие изоклины общепринято для уравнения, мы, тем не менее, введем понятие прямой изоклины системы как изоклины уравнения ее фазовых траекторий. Под инвариантной прямой дифференциальной системы будем понимать линейный частный интеграл этой системы или, что то же самое, интегральную прямую дифференциального уравнения фазовых траекторий этой системы.

В качественной теории дифференциальных уравнений важная роль отводится такому объекту как «изоклины». В фундаментальной работе В.В. Немыцкого [9] указывается на широкие возможности качественного исследования системы (1) с помощью главных изоклин, при этом имея в виду «метод двух изоклин» (метод Н.П. Еругина). В настоящее время этот метод весьма активно применяется (см., например, [4, 10, 11]).

Среди изоклин системы (1) существенную роль играют прямолинейные (прямые) изоклины. Об актуальности вопросов, связанных с прямыми изоклинами, говорит и тот факт, что задача нахождения состояний равновесия системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j \equiv P_n(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{n} b_{ij} x^i y^j \equiv Q_n(x,y), \end{cases} \tag{2}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R$, $(P_n, Q_n) = 1$, даже при $n = 2$ становится трудно разрешимой. Однако знание уравнения хотя бы одной прямой изоклины системы (2) уже при $n = 2$ делает эту задачу реально разрешимой. При этом: а) может быть полностью решена задача определения местоположения всех состояний равновесия системы; в) существенно упрощается решение вопросов, связанных с взаимным расположением предельных циклов; с) появляются возможности в оценке сверху числа особых точек второй группы и установлении топологической структуры сложной особой точки.

В шестидесятые годы прошлого столетия изучением прямых изоклин квадратичных систем занимались авторы работ [12-14]. Дальнейшее развитие теория прямых изоклин получила в работах [15-20]. Например, в работе [15] доказывается утверждение: через состояние равновесия $O(0;0)$ системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P_r(x,y) + P_s(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q_r(x,y) + Q_s(x,y), \end{cases} \tag{3}$$

где $P_t, Q_t$ – однородные многочлены степени $t$, $t = r, s$, проходит хотя бы одна прямая изоклина, и их число не превосходит $r+s$, если $r$ и $s$ – числа разной четности. Здесь правые части уравнений системы (3) считаются взаимно простыми.

Для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i=r}^{n} P_i(x,y) \equiv \overline{P}(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{j=s}^{n} Q_J(x,y) \equiv \overline{Q}(x,y), \end{cases} \tag{4}$$

где $n, r, s \in N$, $n \geq 2$, $(\overline{P}, \overline{Q}) = 1$, $P_i(Q_j)$ – однородные многочлены степеней $i(j)$, если $r = s$, то $s < n$, доказана теорема [21]: через состояние равновесия $(0;0)$ системы (4) проходит не более $r+n$ $(s+n)$ прямых изоклин, если $r \leq s$, $P_r(x,y) \not\equiv 0$ $(s \leq r, Q_s(x,y) \not\equiv 0)$.

Из этой теоремы следует, что число прямых изоклин системы (4), инцидентных точке $(0;0)$ при условии $(\overline{P}, \overline{Q}) = 1$ не превосходит $2n-1$.

В теории прямых изоклин для системы (2) определенный интерес представляет задача определения максимального числа параллельных между собой прямых изоклин, что позволяет существенно упростить исследование в целом поведения ее траекторий. Так, в статье [22] доказано, что система (2) при условии наличия у нее хотя бы одного состояния равновесия и взаимной простоты правых частей этой системы, имеет не более $2n-1$ параллельных прямых изоклин. Оценка числа параллельных прямых изоклин системы (2) при $n = 3$, которую будем называть кубической, получена в статье [23]. В ней же осуществлено разбиение множества $M$, состоящего из пяти параллельных прямых изоклин, на непересекающиеся подмножества. При этом указанное разбиение может быть осуществлено только одним из пяти способов:

1) $M = \{\ell_1^{m_1}, \ell_2^{m_1}, \ell_3^{m_1}\} \cup \{\ell_4^{m_2}, \ell_5^{m_2}\}$, $m_1 \neq m_2$;

2) $M=\left\{\ell_1^{m_1},\ell_2^{m_1},\ell_3^{m_1}\right\}\cup\left\{\ell_4^{m_2}\right\}\cup\left\{\ell_5^{m_3}\right\}$, $(m_1-m_2)(m_1-m_3)(m_2-m_3)\neq 0$;

3) $M=\left\{\ell_1^{m_1},\ell_2^{m_1}\right\}\cup\left\{\ell_3^{m_2},\ell_4^{m_2}\right\}\cup\left\{\ell_5^{m_3}\right\}$, $(m_1-m_2)(m_1-m_3)(m_2-m_3)\neq 0$;

4) $M=\left\{\ell_1^{m_1},\ell_2^{m_2}\right\}\cup\left\{\ell_3^{m_2}\right\}\cup\left\{\ell_4^{m_3}\right\}\cup\left\{\ell_5^{m_4}\right\}$, $m_i\neq m_j$, если $i\neq j, i, j\in\{1,2,3,4\}$;

5) $M=\bigcup_{i=1}^{5}\left\{\ell_i^{m_i}\right\}$, все $m_i$ – попарно различные числа.

Под символом $\ell_i^{m_j}$ понимается прямая $\ell_i$, на которой индуцировано направление $m_j$. Прямые $\ell_i$ и $\ell_j$ различны, если $i\neq j$.

В данной работе изучаются вопросы, связанные с прямыми изоклинами кубической системы. В частности, пункт 2 посвящен оценке сверху общего числа прямых изоклин кубической системы, имеющей максимальное число параллельных между собой прямых изоклин. В пункте 3 дается оценка сверху числа инвариантных прямых кубической системы, имеющей хотя бы одно состояние равновесия и пять параллельных между собой прямых изоклин. В пункте 4 рассматриваются достаточные условия отсутствия предельных циклов кубической системы, имеющей три инвариантные прямые и максимальное число параллельных между собой прямых изоклин.

## 2. Оценка общего числа прямых изоклин кубической системы, имеющей максимальное число параллельных между собой прямых изоклин

Пусть кубическая система имеет пять параллельных между собой прямых изоклин и хотя бы одно состояние равновесия. Естественно поставить вопрос: может ли эта система иметь прямые изоклины, отличные от уже имеющихся пяти параллельных прямых изоклин. Заметим, что в [24] показано, что общее число прямых изоклин кубической дифференциальной системы не превосходит десяти.

Ответом на поставленный вопрос являются нижеследующие теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть кубическая система имеет хотя бы одно состояние равновесия и пять параллельных между собой прямых изоклин. Если множество* $M$*, состоящее из этих пяти прямых, разбито на непустые непересекающиеся* *подмножества способом* 2) *или* 5), *то эта система, кроме данных пяти прямых, не имеет ни одной прямой изоклины.*

**Доказательство.** Пусть множество $M$ разбито способом 2). Тогда в силу [23], не уменьшая общности, можно рассматривать систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y-kx-b_1)(y-kx-b_2)(y-kx-b_3), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y-kx-b_4)[(y-kx-b)(b_{02}y+(b_{11}+b_{02}k)x+b_{01}+b_{02}b)+b_{00}+b_{01}b+b_{02}b^2], \end{cases} \tag{5}$$

$b_i \neq b_j$, если $i \neq j$, $i, j \in \{1,2,3,4\}$, $b = b_k$, $k = \overline{1,4}$, $|b_{00}|+|b_{01}|+|b_{02}|>0$.

Предположим, что система (5) имеет прямую изоклину $\ell_0$: $y-kx-b_0=0$, отличную от прямых $\ell_i$: $y-kx-b_i=0$, $i=\overline{1,4}$ и $\ell$: $y-kx-b=0$. Так как система (5) имеет не более пяти параллельных между собой прямых изоклин, то $\ell_0$ пересекает все пять параллельных между собой прямых изоклин системы (5). Пусть система (5) индуцирует на $\ell_0$ направление $m_0$, при этом, очевидно, что $m_0 \in R \setminus \{0\}$. Обозначим через $m$ направление, индуцированное системой (5) на прямой $\ell$. В этом случае $m \in R \setminus \{0\}$. Таким образом, возможны два предположения: *a*) $m_0 = m$; *b*) $m_0 \neq m$. Если имеет место случай *a*), то четыре точки $A_{i0} = \ell_0 \cap \ell_i$, $i=\overline{1,4}$, являются состояниями равновесия системы (5).

В случае *b*) рассуждаем следующим образом. Кубическая дифференциальная система не может иметь более трех прямых изоклин, на которых индуцировано одно и то же направление [25]. Поэтому система (5) имеет на прямой $\ell_0$, по крайней мере, четыре состояния равновесия $A_i = \ell_0 \cap \ell_i$, $i=\overline{1,3}$, $B = \ell_0 \cap \ell$. Таким образом, приходим к противоречию с тем, что кубическая дифференциальная система имеет на прямой не более трех состояний равновесия.

В случае разбиения множества $M$ способом 5), аналогичными рассуждениями, как и выше, приходим к такому же противоречию. Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Пусть кубическая система имеет хотя бы одно состояние равновесия и пять параллельных между собой прямых изоклин. Если множество* $M$*, состоящее из этих пяти прямых, разбито на непустые непересекающиеся подмножества способом* 1) *или* 4)*, то эта система имеет ровно шесть прямых изоклин.*

**Доказательство.** Пусть кубическая система имеет пять параллельных между собой прямых изоклин – множество $M$, которое разбито на непустые непересекающиеся подмножества способом 1). Тогда, как показано в [23], эту систему можно привести к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y-kx-b_1)(y-kx-b_2)(y-kx-b_3), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y-kx-b_4)(y-kx-b_5)(Ax+By+C), \end{cases} \tag{6}$$

где $b_i \neq b_j$, если $i \neq j$, $i, j \in \{1,2,3,4,5\}$.

Так как система (6) имеет хотя бы одно состояние равновесия, то $\ell$: $Ax+By+C=0$ – изоклина нуля этой системы, пересекающаяся с изоклиной бесконечности в трех точках. Система (6) не имеет прямой изоклины, отличной от прямых $\ell_i$: $y-kx-b_i=0$, $i=\overline{1,5}$ и $\ell$.

В самом деле, если бы существовала такая прямая, то на ней было бы индуцировано направление $m$, где $m \in R \setminus \{0\}$, и система (6) имела бы на ней более трех состояний равновесия, что недопустимо для кубической дифференциальной системы.

Пусть множество $M$ разбито на подмножества способом 4). Переведем прямые $\ell_1^{m_1}$ и $\ell_2^{m_1}$ в изоклины бесконечности, а $\ell_3^{m_2}$ – в изоклину нуля (согласно [24] это всегда можно сделать). Тогда система (2) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y-kx-b_1)(y-kx-b_2)[(y-kx-b_5)(\alpha x+\beta y+\gamma)-(y-kx-b_4)(\alpha x+\beta y+\omega)], \\ \dfrac{dy}{dt} = (y-kx-b_3)[m_4(y-kx-b_5)(\alpha x+\beta y+\gamma)-m_5(y-kx-b_4)(\alpha x+\beta y+\omega)], \end{cases} \tag{7}$$

где $m_4-m_5 \neq 0$, $m_4 \cdot m_5 \neq 0$, $\gamma \neq \omega$, $\ell_i \neq b_j$, если $i \neq j$, $i, j \in \{1,2,3,4,5\}$.

Очевидно, система (7) имеет прямую изоклину бесконечности, отличную от прямых $\ell_i$: $y - kx - b_i = 0$, $i = 1{,}2$. Допущение о существовании прямой изоклины системы (7), не совпадающей ни с одной из пяти параллельных между собой прямых изоклин и не являющейся изоклиной бесконечности, приводит к противоречию с тем, что на любой прямой система (7) имеет не более трех состояний равновесия. Теорема доказана.

**Теорема 3.** *Пусть кубическая система имеет хотя бы одну особую точку и пять параллельных между собой прямых изоклин. Если множество* $M$, *состоящее из этих пяти прямых, разбито на непустые непересекающиеся подмножества способом* 3), *то эта система имеет не более семи прямых изоклин.*

**Доказательство.** Не уменьшая общности, рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y - kx - b_1)(y - kx - b_2)(Ax + By + C), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y - kx - b_3)(y - kx - b_4)[\alpha(y - kx - b) + m(Ax + By + C)], \end{cases} \tag{8}$$

где $\alpha \cdot m \neq 0$.

Согласно [23] систему (2) при $n = 3$ можно привести к системе (8) в рассматриваемом случае.

Из вида правых частей уравнений системы (8) следует, что система (8), вообще говоря, может иметь одну прямую изоклину бесконечности и одну прямую изоклину нуля, отличные от пяти параллельных между собой прямых изоклин. Кроме этого, из вида системы (8) можно установить, что никакая прямая, отличная от пяти параллельных между собой прямых изоклин и от главных изоклин системы (8), не может быть изоклиной этой системы. Теорема доказана.

Пример 1. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y - x - 1)(y - x - 2)(y + x - 9), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y - x - 3)(y - x - 4)(y - x - 5 + y + x - 9) \end{cases}$$

имеет семь прямых изоклин, в том числе: $y - x - i = 0$, $i = \overline{1,5}$, $x + y - 9 = 0$, $y - 7 = 0$.

Из теорем 1-3 следует

**Теорема 4.** *Если кубическая система имеет хотя бы одно состояние равновесия и пять параллельных между собой прямых изоклин, то общее число прямых изоклин этой системы не более семи.*

## 3. Инвариантные прямые кубической системы (случай пяти параллельных между собой прямых изоклин)

Любая инвариантная прямая системы (2) является ее прямой изоклиной. Поэтому мы можем сделать некоторые заключения о существовании и числе инвариантных прямых этой системы при наличии у нее хотя бы одного состояния равновесия и максимального числа параллельных между собой прямых изоклин.

**Теорема 5.** *Пусть кубическая система имеет хотя бы одно состояние равновесия и пять параллельных между собой прямых изоклин. Если множество $M$, состоящее из этих пяти прямых изоклин, разбито на непустые непересекающиеся подмножества способом* 2)*, то эта система имеет: либо одну, либо три инвариантные прямые, либо вовсе не имеет инвариантных прямых.*

**Доказательство.** В силу теоремы 1 инвариантная прямая системы обязательно находится среди пяти параллельных между собой прямых изоклин. Пусть уравнения этих прямых изоклин имеют вид: $y-kx-b_i=0$, $i=\overline{1,5}$, причем $b_i \neq b_j$, если $i \neq j$, $i, j \in \{1,2,3,4,5\}$.

Если $k \neq m_j$, $j=\overline{1,3}$, то кубическая система не имеет ни одной инвариантной прямой. Если $k=m_2 \vee k=m_3$, то система имеет одну единственную инвариантную прямую. Если $k=m_1$, то система имеет три инвариантные прямые. Теорема доказана.

Пример 2. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y-x-1)(y-x-2)(y-x-3), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y-x-4)[(y-x-5)(y+x+3)-3] \end{cases}$$

имеет пять параллельных между собой прямых изоклин $y-x-i=0$, $i=\overline{1,5}$, ни одна из которых не является инвариантной прямой.

Пример 3. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y-1)(y-2)(y-3), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y-4)[(y-5)(y+x+3)-3] \end{cases}$$

имеет пять параллельных между собой прямых изоклин $y-i=0$, $i=\overline{1,5}$, в том числе одну инвариантную прямую $y-4=0$.

Прямой 4. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (x-1)(x-2)(x-3), \\ \dfrac{dy}{dt} = (x-4)[(x-5)(y+x+3)-3] \end{cases}$$

имеет пять параллельных между собой прямых изоклин $x-i=0$, $i=\overline{1,5}$, в том числе три инвариантные прямые $x-j=0$, $j=\overline{1,3}$.

**Теорема 6.** *Пусть кубическая система имеет хотя бы одно состояние равновесия и пять параллельных между собой прямых изоклин. Если множество* $M$, *состоящее из этих пяти прямых изоклин, разбито на непустые непересекающиеся подмножества способом* 5), *то система* (2) *имеет либо одну инвариантную прямую, либо вовсе не имеет инвариантных прямых.*

**Доказательство.** Пусть $y-kx-b_i=0$, $i=\overline{1,5}$ – уравнения прямых изоклин кубической системы, причем $b_i \neq b_j$, когда $i \neq j$, $i, j \in \{1,2,3,4,5\}$. Если $k \neq m_i$ $\forall\, i \in \{1,2,3,4,5\}$, то у кубической системы нет ни одной инвариантной прямой в силу теоремы 1. Если $k = m_j$, $j \in \{1,2,3,4,5\}$, то прямая $y-kx-b_j=0$ – единственная инвариантная прямая системы. Теорема доказана.

Пример 5. Ни одна из пяти прямых изоклин системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y-x-1)[2(y-x-3)(y-x-4)+(y-x-5)(y+x)], \\ \dfrac{dy}{dt} = (y-x-2)[10(y-x-3)(y-x-4)+3(y-x-5)(y+x)] \end{cases}$$

$y-x-i=0$, $i=\overline{1,5}$ не является инвариантной прямой.

Пример 6. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y-x-1)[2(y-x-3)(y-x-4)+(y-x-5)(y+x)], \\ \dfrac{dy}{dt} = (y-x-2)[10(y-x-3)(y-x-4)+2(y-x-5)(y+x)] \end{cases}$$

имеет пять параллельных между собой прямых изоклин $y-x-i=0$, $i=\overline{1,5}$, причем $y-x-3=0$ – единственная инвариантная прямая этой системы.

**Теорема 7.** *Пусть кубическая система имеет хотя бы одно состояние равновесия и пять параллельных между собой прямых изоклин. Если множество* $M$, *состоящее из этих пяти прямых изоклин, разбито на непустые непересекающиеся подмножества способом* 1), *то система* (2) *имеет либо одну, либо две, либо три, либо четыре инвариантные прямые, либо совсем не имеет инвариантных прямых.*

**Доказательство.** Согласно [24] существует аффинное преобразование переменных $x$ и $y$, переводящее систему (2) в систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y-kx-b_1)(y-kx-b_2)(y-kx-b_3), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y-kx-b_4)(y-kx-b_5)(Ax+By+C), \end{cases} \tag{9}$$

где $b_i \neq b_j$, если $i \neq j$, $i, j \in \{1,2,3,4,5\}$.

Если $A \cdot k \neq 0$, то никакая прямая из шести прямых изоклин системы (9) не является инвариантной. Если $k \neq 0$, $A=0$, то $By+C=0$ – единственная инвариантная прямая системы (9). Если $k=0$, $A \neq 0$, то система (9) имеет две инвариантные прямые $y-b_4=0$ и $y-b_5=0$. Если $k=\infty$, то вместо системы (9) рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (x - B_1)(x - B_2)(x - B_3), \\ \dfrac{dy}{dt} = (x - B_4)(x - B_5)(Mx + Ny + L). \end{cases} \tag{10}$$

Очевидно, в системе (10) $N \neq 0$, так как иначе система не имеет состояний равновесия. Если в системе (10) $M \neq 0$, то только три прямые $x - B_i = 0$, $i = \overline{1,3}$, являются инвариантными. Если $M = 0$, система (10), кроме прямых $x - B_i = 0$, $i = \overline{1,3}$, имеет еще одну инвариантную прямую $Ny + L = 0$. Теорема доказана.

Пример 7. Не существует инвариантной прямой дифференциальной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y - 2x + 3)(y - 2x + 4)(y - 2x + 5), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y - 2x + 6)(y - 2x + 7)(x + y + 10). \end{cases}$$

Пример 8. Из шести прямых изоклин системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y - 3)(y - 4)(y - 5), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y - 6)(y - 7)(x + y + 4) \end{cases}$$

только две прямые $y - 6 = 0$ и $y - 7 = 0$ являются инвариантными.

Пример 9. Единственной инвариантной прямой дифференциальной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y - 2x + 3)(y - 2x + 4)(y - 2x + 5), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y - 2x + 6)(y - 2x + 7)(y + 10) \end{cases}$$

является прямая $y + 10 = 0$.

Пример 10. Дифференциальная система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (x - 5)(x - 10)(x + 10), \\ \dfrac{dy}{dt} = (x - 20)(x + 18)(x + y + 3) \end{cases}$$

имеет шесть прямых изоклин, в том числе три из них являются инвариантными прямыми: $x - 5 = 0$, $x - 10 = 0$, $x + 10 = 0$.

Пример 11. Четыре прямые: $x-5=0$, $x-10=0$, $x+10=0$, $y+3=0$ являются инвариантными для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=(x-5)(x-10)(x+10), \\ \frac{dy}{dt}=(x-20)(x+18)(y+3). \end{cases}$$

**Теорема 8.** *Пусть кубическая система имеет хотя бы одно состояние равновесия и пять параллельных между собой прямых изоклин. Если множество* $M$ *всех этих прямых разбито на непустые непересекающиеся подмножества способом* 4), *то система* (2) *имеет либо одну, либо две инвариантные прямые, либо не имеет инвариантных прямых.*

**Доказательство.** Не уменьшая общности, рассмотрим систему (7).

$$\text{Если } k\cdot\left[k-\frac{m_5(b_5-b_3)}{(b_5-b_1)(b_5-b_2)}\right]\cdot\left[k-\frac{m_4(b_4-b_3)}{(b_4-b_1)(b_4-b_2)}\right]\neq 0, \tag{11}$$

то ни одна из пяти параллельных между собой прямых изоклин системы (7) не является инвариантной прямой. Следовательно, если у системы (7) есть инвариантная прямая при условии (11), то согласно теореме 2 этой прямой может быть только изоклина бесконечности, то есть прямая $x-\mu=0$. При этом, если наряду с (11) выполняется условие

$$\gamma-\omega+\beta(b_4-b_5)=0,\ \mu k(\omega-\gamma)+\alpha\mu(b_5-b_4)+b_5\gamma-b_4\omega=0, \tag{12}$$

то, действительно, $x-\mu=0$ – инвариантная прямая системы (7). Легко проверить, что, в частности, при $\mu=0$, $\gamma=-\beta b_4$, $\omega=-\beta b_5$ условие (12) выполняется, а значит, $x=0$ – инвариантная прямая системы (7).

Если $k\neq 0$, но $\left[k-\frac{m_5(b_5-b_3)}{(b_5-b_1)(b_5-b_2)}\right]\cdot\left[k-\frac{m_4(b_4-b_3)}{(b_4-b_1)(b_4-b_2)}\right]=0$, то одна из прямых $y-kx-b_4=0$ и $y-kx-b_5=0$ является инвариантной прямой системы (7). Если выполняется условие (11), но нарушается (12), то система (7) не имеет инвариантных прямых.

В случае $k=\infty$ рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (x - B_1)(x - B_2)[(x - B_5)(\alpha x + \beta y + \gamma) - (x - B_4)(\alpha x + \beta y + \omega)], \\ \dfrac{dy}{dt} = (x - B_3)[m_4(x - B_5)(\alpha x + \beta y + \gamma) - m_5(x - B_4)(\alpha x + \beta y + \omega)]. \end{cases} \qquad (13)$$

Как видим, две прямые $x - B_1 = 0$ и $x - B_2 = 0$, и только они, являются инвариантными прямыми системы (13). Теорема доказана.

Пример 12. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y - x - 1)(y - x - 2)[(y - x - 5)(x + 3y + 2) - (y - x - 4)(x + 3y + 1)], \\ \dfrac{dy}{dt} = (y - x - 3)[2(y - x - 5)(x + 3y + 2) - 3(y - x - 4)(x + 3y + 1)] \end{cases}$$

не имеет инвариантных прямых.

Пример 13. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y - x - 1)(y - x - 2)[(y - x - 5)(x + 3y + 2) - (y - x - 4)(x + 3y + 1)], \\ \dfrac{dy}{dt} = (y - x - 3)[13(y - x - 5)(x + 3y + 2) - 6(y - x - 4)(x + 3y + 1)] \end{cases}$$

имеет единственную инвариантную прямую $y - x - 5 = 0$.

Пример 14. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (x - 1)(x - 2)[(x - 5)(x + y + 4) - (x - 4)(x + y + 2)], \\ \dfrac{dy}{dt} = (x - 3)[3(x - 5)(x + y + 4) - 5(x - 4)(x + y + 2)] \end{cases}$$

имеет две инвариантные прямые $x - 1 = 0$ и $x - 2 = 0$.

**Теорема 9.** *Пусть кубическая система имеет хотя бы одно состояние равновесия и пять параллельных между собой прямых изоклин. Если множество* $M$, *состоящее из этих пяти прямых изоклин, разбито на непустые непересекающиеся подмножества способом* 3), *то система* (2) *имеет либо одну, либо две, либо три инвариантные прямые, либо не имеет инвариантных прямых.*

**Доказательство.** Не уменьшая общности, рассмотрим систему (8).

Очевидно, если

$$\left[ k - \frac{m(b - b_3)(b - b_4)}{(b - b_1)(b - b_2)} \right] \cdot (mA - \alpha k)Bk \neq 0, \qquad (14)$$

то система (8) не имеет инвариантных прямых.

Пусть неравенство (14) не выполняется. Тогда, если $(mA-\alpha k)Bk \neq 0$, но $k=\dfrac{m(b-b_3)(b-b_4)}{(b-b_1)(b-b_2)}$, то $y-kx-b=0$ – единственная инвариантная прямая системы (8). Если $k=0$, $B=0$, то система (8) имеет три инвариантные прямые. Если $k=0$, $B \neq 0$, то система (8) имеет две инвариантные прямые. Теорема доказана.

Пример 15. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=(y-x-1)(y-x-2)(x+y+6), \\ \dfrac{dy}{dt}=(y-x-3)(y-x-4)[5(y-x-5)+3(x+y+6)] \end{cases}$$

не имеет инвариантных прямых.

Пример 16. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=(y-x-1)(y-x-2)(x+y+6), \\ \dfrac{dy}{dt}=(y-x-3)(y-x-4)[5(y-x-5)+6(x+y+6)] \end{cases}$$

имеет единственную инвариантную прямую $y-x-5=0$.

Пример 17. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=(y-1)(y-2)(x+y+6), \\ \dfrac{dy}{dt}=(y-3)(y-4)[5(y-5)+6(x+y+6)] \end{cases}$$

имеет две инвариантные прямые $y-3=0$ и $y-4=0$.

Из теорем 5-9 следует

**Теорема 10.** *Если кубическая система имеет хотя бы одно состояние равновесия и пять параллельных между собой прямых изоклин, то число инвариантных прямых этой системы не превосходит четырех.*

## 4. Параллельные прямые изоклины, инвариантные прямые и предельные циклы кубической системы

Известно, что кубическая дифференциальная система при наличии у нее двух параллельных инвариантных прямых и алгебраического предельного цикла в виде эллипса не имеет других предельных циклов [26]. Однако существуют кубические системы, обладающие тремя инвариантными прямыми и хотя бы одним предельным циклом, вообще говоря, неалгебраическим.

В качестве примера рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 3y - 4x^2 + 4xy - x^3 + x^2 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = (-18 - 6\varepsilon)x + (3 + 3\varepsilon)y + (-3 - 2\varepsilon)xy + (\varepsilon - 2)y^2 + xy^2 - y^3. \end{cases} \qquad (15_\varepsilon)$$

Можно убедиться в том, что $\forall \varepsilon \in R$ система $(15_\varepsilon)$ имеет три инвариантные прямые $x+1=0$, $x+3=0$, $y+3=0$. Начало координат $(0;0)$ системы $(15_0)$* является состоянием равновесия типа «центр» или «фокус». Для различения центра и фокуса вычислим третью фокусную величину [27]: $\alpha_3(0;0) = -\dfrac{\pi}{2\sqrt{5}} < 0$, откуда следует, что точка $(0;0)$ – сложный однократный устойчивый фокус. Поэтому при переходе от системы $(15_0)$ к системе $(15_\varepsilon)$, где $\varepsilon$ – сколь угодно малое положительное число, точка $(0;0)$ превращается в простой неустойчивый фокус, который окружает, по крайней мере, один простой устойчивый предельный цикл [27]. В связи с приведенным примером определенный интерес представляют достаточные условия отсутствия предельных циклов кубической системы, если она имеет три инвариантные прямые.

**Теорема 11.** *Пусть $M$ – множество, состоящее из пяти параллельных между собой прямых изоклин кубической системы, имеющей хотя бы одно состояние равновесия. Если эта система имеет такие три инвариантные прямые, что хотя бы две из них принадлежат множеству $M$, то кубическая система не имеет предельных циклов.*

**Доказательство.** Пусть все три инвариантные прямые принадлежат множеству $M$. Тогда кубическую систему можно привести к виду:

---

* Система $(15_0)$ получается из системы $(15_\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{3} B_{ij} x^i y^j, \end{cases} \tag{16}$$

где $B_{ij} \in R$, $a_i$ $(i=\overline{1,3})$ – попарно различные числа.

Из (16) видно, что любое состояние равновесия системы (16) расположено на одной из инвариантных прямых $x-a_i=0$, $i=\overline{1,3}$, поэтому оно не может быть окружено предельным циклом.

Исследуем случай, когда только две инвариантные прямые из трех принадлежат множеству $M$, которому соответствует только способ 3) разбиения $M$ на непустые непересекающиеся подмножества. Для этого рассмотрим систему (8). Путем преобразования поворота эту систему приведем к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y-b_1)(y-b_2)(Ax+c) \equiv \overline{P}, \\ \dfrac{dy}{dt} = (y-b_3)(y-b_4)[\alpha(y-b_5)+m(Ax+c)] \equiv \overline{Q}, \end{cases} \tag{17}$$

где $A \cdot \alpha \cdot m \neq 0$, все $b_i$, $i=\overline{1,5}$ – попарно различные числа.

Инвариантными прямыми системы (17) являются: $y-b_3=0$, $y-b_4=0$, $Ax+C=0$.

Воспользуемся критерием Дюлака, взяв в качестве функции Дюлака функцию $D(x,y)=[(y-b_3)(y-b_4)(Ax+c)]^{-1}$. Тогда

$$(\overline{P}\cdot D)_x' + (\overline{Q}\cdot D)_y' = \frac{\alpha}{Ax+C}. \tag{18}$$

Выражение (18) знакопостоянно в полуплоскостях $Ax+C>0$ и $Ax+C<0$. Поэтому система (17) не имеет замкнутых траекторий и никаких замкнутых контуров, состоящих из траекторий этой системы [28]. Следовательно, у системы нет предельных циклов. Теорема доказана.

В работе [29] доказано, что если кубическая система имеет четыре инвариантные прямые, то она может иметь предельный цикл. При этом для существования предельного цикла необходимо, чтобы четыре инвариантные прямые образовывали параллелограмм и предельный цикл располагался внутри этого параллелограмма.

**Теорема 12.** *Пусть $M$ – множество, состоящее из пяти параллельных между собой прямых изоклин кубической системы. Если эта система имеет четыре инвариантные прямые, то она не имеет предельных циклов.*

**Доказательство.** Кубическая система в случае наличия хотя бы одного состояния равновесия и пяти параллельных между собой прямых изоклин может иметь четыре инвариантные прямые только тогда, когда множество $M$ разбито на непустые непересекающиеся подмножества способом 1). Как показано при доказательстве теоремы 7, четыре инвариантные прямые системы не образуют параллелограмм, и согласно [29] система не имеет предельных циклов. Теорема доказана.

## Литература

1. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007. 349 с.

2. Wilson H.R. Spikes, decisions and actions. The dynamical foundations of neuroscience. New York: Oxford University Press, 2005. 307 p.

3. Ильяшенко Ю.С. Столетняя история 16-й проблемы Гильберта. В: «Глобус: Общематематический семинар. Вып. 1». М.: МЦНМО, 2004. С. 8-21.

4. Gaiko V.A. Global Bifurcation Theory and Hilbert's Sixteenth Problem. Series: Mathematics and its applications. Vol. 559. Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2003. 182 p.

5. Андреев А.Ф. Особые точки дифференциальных уравнений. Минск: Вышэйшая школа, 1979. 136 с.

6. Андреев А. Ф. Введение в локальную качественную теорию дифференциальных уравнений: Учеб. пособие. СПб.: Издательство С.-Петерб. университета, 2001. 160 с.

7. Ушхо А.Д. Бесконечно удаленные особые точки кубической системы в специальном случае / Ушхо А.Д. // Дифференциальные уравнения и процессы

управления. 2011. № 1. С. 17-33. (Электронный журнал Санкт-Петербургского госуниверситета, рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010. Доступен URL: http://wvvw.math.spbu.rU/difQournal/j/RU/collection.html)

8. Ушхо А.Д. Траектории кубической дифференциальной системы на плоскости, имеющей инвариантные прямые шести различных направлений // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2012. № 2. С. 224-231.

9. Немыцкий В.В. Некоторые современные проблемы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В.В. Немыцкий // УМН. 1965. Т. 20. Вып. 4(124). С. 3-36.

10. Gaiko V.A. Limit Cycle Bifurcations in a Quadratic System with Two Parallel Straight Line – Isoclines / Reports 08-06 of the Department of Applied Mathematical Analysis Delft: Delft University of Technology, 2008. 13 p.

11. Gaiko V.A. On an application of two isoclines method to investigation of two dimensional dynamical systems // Advanc. Synerg. 1994. Vol. 2. P. 104-109.

12. Берлинский А.Н. Некоторые вопросы качественного исследования дифференциального уравнения $dy/dx = P(x,y)/Q(x,y)$, где $P$ и $Q$ – многочлены не выше второй степени. Дис. канд. физ.-мат. наук. Ташкент, 1959. 115 с.

13. Берлинский А.Н. О поведении интегральных кривых одного дифференциального уравнения / А.Н. Берлинский // Известия высших учебных заведений. 1960. № 2(15). С. 3-18.

14. Шахова Л.В. О прямых изоклинах / Л.В. Шахова // Труды Самаркандского государственного университета им. Алишера Навои. 1964. № 144. С. 93-105.

15. Чересиз В.М. Об изоклинах полиномиальных векторных полей / В.М. Чересиз // Сибирский математический журнал, 1994. Т. 35. № 6. С. 1390-1396.

16. Sokulski J. On the number of invariant lines for polynomial vector fields // Nonlinearity. 1996. No. 9. P. 479–485.

17. Zhang Xiang, Ye Yanqian. On the Number of Invariant Lines for Polynomial Systems // Proceedings of the American Mathematical Society. 1998. Vol. 126. No. 8. P. 2249-2265.

18. Artes J.C., Grunbaum B., Llibre J. On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems // Pacific Journal of Mathematics. 1998. Vol. 184. No. 2. P. 207-230.

19. Schlomiuk D., Vulpe N. Planar quadratic vector fields with invariant lines of total multiplicity at least five // Qualitative Theory of Dynamical Systems. 2004. Vol. 5. Issue 1. P. 135-194.

20. Schlomiuk D., Vulpe N. Planar quadratic differential systems with invariant straight lines of total multiplicity four // Nonlinear Analysis-theory Methods & Applications. 2008. Vol. 68. №. 4. P. 681-715.

21. Ушхо А.Д. Полиномиальные дифференциальные системы на плоскости: прямолинейные изоклины, оси симметрии, особые точки на экваторе сферы Пуанкаре / А.Д. Ушхо // Автореферат дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. Воронеж: ВГУ, 2011. С. 8.

22. Ушхо А.Д. Параллельные прямые изоклины полиномиальных дифференциальных систем на плоскости / А.Д. Ушхо // Вестник АГУ. Серия «Естественно-математические и технические науки». 2011. № 3(86). С. 9-13.

23. Ушхо А.Д. Параллельные прямые изоклины кубических дифференциальных систем на плоскости /А.Д. Ушхо // Вестник АГУ. Серия «Естественно-математические и технические науки». 2009. Вып 2(49). С. 16-25.

24. Ушхо Д.С. Прямые изоклины и канонические формы полиномиальных дифференциальных систем на плоскости. Майкоп: АГУ, 2007. 93 с.

25. Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. К вопросу о прямых изоклинах полиномиальных дифференциальных систем на плоскости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2010. №1. С. 156-162.

26. Столяров В.В. О предельных циклах и ограниченности одной динамической системы / В.В. Столяров // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. №10. С. 1823-1824.

27. Андронов А.А. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. М.: Наука, 1967. 488 с.

28. Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. М.: Наука, 1976. 496 с.

29. Ушхо Д.С. О сосуществовании предельных циклов и линейных частных интегралов кубических дифференциальных систем на плоскости / Д.С. Ушхо, А.Д. Ушхо // Труды ФОРА. 2004. №9. С. 20-24.