ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2013
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Динамические системы на многообразиях

ИНВАРИАНТЫ ГОЛОМОРФНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.Ю. Тыщенко

Гродненский государственный университет
230023, Гродно, ул. Ожешко, 22
e-mail: valentinet@mail.ru

Основы теории инвариантов были заложены А. Кэли [1] и Д. Гильбертом [2]. Начиная с работ Э. Лаггера [3], Ж. Альфана [4], Р. Лиувилля [5], П. Аппеля [6] и П. Пенлеве [7] теория инвариантов была распространена и на случай дифференциальных уравнений. Современный вид теория инвариантов дифференциальных уравнений приняла в работах К. С. Сибирского [8, 9] и Г. Р. Белицкого [10]. В настоящей работе изучаются некоторые функциональные инварианты многомерных дискретных динамических систем (в основном голоморфных), а также связанные с ними объекты (главным образом слабо накрывающие слоения [11]). При этом для многомерных дискретных динамических систем указан возможный переход от дискретного случая к непрерывному (в частности, к голоморфному) при сохранении исследуемых свойств. Отметим, что основополагающее влияние на данную статью произвела монография [12].

В следующих двух пунктах приведем необходимые нам в дальнейшем вспомогательные сведения [13, 14].

1. Многомерные дискретные динамические системы. Рассмотрим биголоморфизмы

$$f_j : U \to \mathbb{K}^n,\ j = \overline{1,m}, \tag{1.1}$$

где область $U \subset \mathbb{K}^n,\ n > 1,\ \mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$. Поставим в биективное соответствие биголоморфизмам (1.1) автономную (стационарную) многомерную дискретную систему уравнений

$$x(k+e_j) = f_j(x(k)),\ j = \overline{1,m}, \tag{2.1}$$

где $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n,\ f_j(x) = (f_{1j}(x),\ldots,f_{nj}(x)),\ j = \overline{1,m},\ k = (k_1,\ldots,k_m) \in \mathbb{Z}^m,\ e_j = (\delta_1^j,\ldots,\delta_m^j),\ j = \overline{1,m}$, символ Кронекера $\delta_k^j = \left[\begin{array}{l} 1,\ k=j, \\ 0,\ k \neq j. \end{array}\right.$

Определение 1.1. Решением *автономной многомерной системы* (2.1) *будем называть такое отображение* $\varphi : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{K}^n$, *что* $\varphi(k+e_j) = f_j(\varphi(k)),\ \forall k \in \mathbb{Z}^m,\ j = \overline{1,m}$.

Определение 2.1. *Автономную многомерную систему* (2.1) *будем называть* **вполне разрешимой**, *если для любой точки* $(k^0, x^0) \in \mathbb{Z}^m \times U$ *существует единственное решение* $\varphi : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{K}^n$ *этой системы, удовлетворяющее начальному условию*

$$\varphi(k^0) = x^0. \tag{3.1}$$

Теорема 1.1. *Автономная многомерная система* (2.1) *вполне разрешима тогда и только тогда, когда имеют место тождества*

$$f_k \circ f_j(x) = f_j \circ f_k(x),\ \forall x \in U,\ j = \overline{1,m},\ k = \overline{1,m}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть система (2.1) вполне разрешима. Тогда на основании определения 2.1 имеем соотношения $\varphi((k^0 + e_j) + e_k) = \varphi((k^0 + e_k) + e_j)$, из которых получаем, что $f_k \circ f_j(\varphi(k^0)) = f_j \circ f_k(\varphi(k^0)),\ j = \overline{1,m},\ k = \overline{1,m}$. Теперь с учетом произвольности выбора начального условия $x^0 = \varphi(k^0)$ получаем тождества (4.1).

Достаточность. Пусть имеют место тождества (4.1). Тогда непосредственным образом приходим к выводу, что искомое единственное решение задачи (2.1) – (3.1) определяется соотношениями

$$\varphi(k) = \prod_{j=1}^{m} f_j^{s_j}(x^0), \tag{5.1}$$

где $k = k^0 + \sum\limits_{j=1}^{m} s_j e_j,\ s_j \in \mathbb{Z},\ j = \overline{1,m}$, а произведения обозначают суперпозиции соответствующих отображений. Теорема 1.1 доказана.

На основании представлений (5.1) следуя [15] приходим к выводу, что при $m = 1$ и в случае полной разрешимости при $m > 1$ соответствующие автономной многомерной дискретной системе уравнений (2.1) отображения (1.1) образуют многомерную дискретную динамическую систему (D_m).

2. Многопараметрические семейства многомерных дискретных динамических систем. Рассмотрим m–параметрическое $(1 \leqslant m < n)$ голоморфное семейство биголоморфизмов

$$f(x,t),\ x \in U \subset \mathbb{K}^n,\ \forall t \in \Omega \subset \mathbb{K}^m,\ f(x,t^0) = x,\ \forall x \in U,\ t^0 \in \Omega, \tag{1.2}$$

где $f(x,t) = (f_1(x,t), \ldots, f_n(x,t)),\ \forall x \in U,\ \forall t \in \Omega$, определяющее при каждых m значениях параметров $t = (t_1, \ldots, t_m)$ из области Ω многомерную дискретную динамическую систему вида (D_m). На основании этого семейства строим вспомогательные коммутирующие между собой (при $m > 1$) линейные дифференциальные операторы

$$L_j = \sum_{i=1}^{n} F_{ij}(x)\partial_{x_i},\ \forall x \in U,\ j = \overline{1,m}, \tag{2.2}$$

а также соответствующие им векторные поля

$$F_j(x) = (F_{1j}(x), \ldots, F_{nj}(x)),\ \forall x \in U,\ j = \overline{1,m}, \tag{3.2}$$

и вполне разрешимую [12] (при $m > 1$) автономную систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx = \sum_{j=1}^{m} F_j(x)dt_j, \tag{4.2}$$

где $F_{ij}(x) = \partial_{t_j} f_i(x,t)|_{t=t^0},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$. Непосредственными вычислениями на основании семейства (1.2) и соотношений, определяющих линейные дифференциальные операторы (2.2), векторные поля (3.2) и дифференциальную систему (4.2), получаем тождество

$$\begin{gathered} f(x,t) = x + \sum_{l_1+\ldots+l_m=1}^{+\infty} \frac{L_1^{l_1} \circ \ldots \circ L_m^{l_m} x}{l_1! \ldots l_m!}(t_1 - t_1^0)^{l_1} \ldots (t_m - t_m^0)^{l_m}, \\ \forall x \in U,\ \forall t \in O(t^0) \subset \Omega, \end{gathered} \tag{5.2}$$

где $l_j \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ j = \overline{1,m},\ L_j^0 x = x,\ \forall x \in U,\ L_j^k,\ k \in \mathbb{N}$, есть суперпозиция k линейных дифференциальных операторов $L_j,\ j = \overline{1,m},\ t^0 = (t_1^0, \ldots, t_m^0),\ O(t^0)$ есть некоторая окрестность точки t^0.

3. Симметрии, допускаемые многомерными дискретными динамическими системами.

Определение 1.3. *Будем говорить, что многомерная дискретная динамическая система* (D_m) **допускает** *биголоморфизм* g, *если определяющие ее биголоморфизмы* (1.1) *инвариантны относительно этого биголоморфизма, т.е.* $g \circ f_j \circ g^{-1}(x) = f_j(x),\ \forall x \in U,\ j = \overline{1,m}.$

Рассмотрим теперь случай, когда система (D_m) допускает однопараметрическую группу биголоморфизмов (локальную группу Ли) g_α, определяемую соотношениями $g(x,\alpha),\ \forall x \in U \subset \mathbb{K}^n,\ \forall \alpha \in \Theta \subset \mathbb{K},\ g(x,\alpha_0) = x,\ \forall x \in U,\ \alpha_0 \in \Theta$, с инфинитезимальным оператором $\mathfrak{L}(x,\partial x) = (\xi(x),\partial x)$, где $\xi(x) = (\xi_1(x),\ldots,\xi_n(x)),\ \partial x = (\partial_{x_1},\ldots,\partial_{x_n}),\ (\cdot,\cdot)$ есть операция скалярного произведения. Тогда, используя представление $g(x,\alpha) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\mathfrak{L}^n x}{n!}(\alpha - \alpha_0)^n,\ \forall x \in U,\ \forall \alpha \in \Theta$, где $\mathfrak{L}^0 x = x,\ \forall x \in U$, из соотношений $f_j(g(x,\alpha)) = g(f_j(x),\alpha),\ \forall x \in U,\ \forall \alpha \in \Theta,\ j = \overline{1,m}$ (отражающих тот факт, что система (D_m) допускает группу Ли g_α), переходим к равносильным соотношениям $(\mathfrak{L}^n f_j(x),\partial x) = (\mathfrak{L}^n x|_{x=f_j(x)},\partial x),\ \forall x \in U,\ j = \overline{1,m},\ \forall n \in \mathbb{N}$. Непосредственными вычислениями получаем, что последние соотношения эквивалентны следующим:

$$(\mathfrak{L} f_j(x),\partial x) = (\mathfrak{L} x|_{x=f_j(x)},\partial x),\ \forall x \in U,\ j = \overline{1,m}. \tag{1.3}$$

Таким образом, мы получили такое утверждение.

Теорема 1.3 [16]. *Многомерная дискретная динамическая система* (D_m) *допускает группу Ли* g_α *с инфинитезимальным оператором* $\mathfrak{L}$ *тогда и только тогда, когда имеют место тождества* (1.3).

4. Симметрии, допускаемые многопараметрическими семействами многомерных дискретных динамических систем. Пусть $m-$параметрическое голоморфное семейство биголоморфизмов (1.2) допускает биголоморфизм g. Аналогично рассуждениям из предыдущего пункта, используя представление (5.2), из соотношений $f(g(x),t) = g(f(x,t)),\ \forall x \in U,\ \forall t \in O(t^0)$, переходим к эквивалентным соотношениям:

$$(L_j g(x),\partial x) = (L_j x|_{x=g(x)},\partial x),\ \forall x \in U,\ j = \overline{1,m}. \tag{1.4}$$

В результате имеем такое утверждение.

Теорема 1.4. $m-$*параметрическое голоморфное семейство биголоморфизмов* (1.2) *допускает биголоморфизм* g *тогда и только тогда, когда имеют место тождества* (1.4).

И, наконец, в случае, когда семейство биголоморфизмов (1.2) допускает группу Ли g_α с инфинитезимальным оператором $\mathfrak{L}$, используя тождество (5.2), непосредственными вычислениями на основании хода доказательства теоремы 1.3 получаем утверждение.

Теорема 2.4. *m–параметрическое голоморфное семейство биголоморфизмов* (1.2) *допускает группу Ли g_α с инфинитезимальным оператором $\mathfrak{L}$ тогда и только тогда, когда имеют место тождества $[L_j, \mathfrak{L}] = 0,\ \forall x \in U,\ j = \overline{1,m}$, где коммутаторы линейных дифференциальных операторов $[L_j, \mathfrak{L}] = L_j\mathfrak{L} - \mathfrak{L}L_j,\ \forall x \in U,\ j = \overline{1,m}$.*

5. Абсолютные инварианты многомерных дискретных динамических систем.

Определение 1.5. *Голоморфную функцию $I : U \to \mathbb{K}$ будем называть* **абсолютным инвариантом** *многомерной дискретной динамической системы* (D_m), *если $I(f_j(x)) = I(x),\ \forall x \in U,\ j = \overline{1,m}$.*

Определение 2.5. *Инъективную (по всем существенно входящим в задание аргументам при фиксированных значениях остальных) голоморфную функцию $I : U \to \mathbb{K}$ будем называть* **невырожденным абсолютным инвариантом** *многомерной дискретной динамической системы* (D_m), *если $I(f_j(x)) = I(x),\ \forall x \in U,\ j = \overline{1,m}$. При этом наименьшее возможное число функционально независимых невырожденных абсолютных инвариантов системы* (D_m) *будем называть* **базисом невырожденных абсолютных инвариантов**, *а само число –* **размерностью базиса**.

Требование инъективности в определении 2.5 присутствует для исключения, например, явлений такого вида: функция $sin\ x_1$ является абсолютным инвариантом дискретной динамической системы $(x_1 + 2\pi, x_2)$, в то время как функция x_1 этим свойством не обладает.

Определение 3.5. *Многомерную дискретную динамическую систему* (D_m) *будем называть* **невырожденной**, *если:*

1) *матрицы Якоби $Df_j(x),\ \forall x \in U,\ j = \overline{1,m}$, в совокупности линейно независимы в каждой точке $x \in U$;*

2) *всякая из матриц пучка, образованного любой парой из вышеуказаных матриц Якоби, имеет в каждой точке $x \in U$, ранг, не меньший, чем $n - m$;*

3) *якобианы (определители матриц Якоби $Df_j(x)$) $J(f_j(x)) \neq 0,\ \forall x \in U,\ j = \overline{1,m}$;*

4) *биголоморфизмы $f_j(x) \neq id$ – тождественному отображению, $\forall x \in U,\ j = \overline{1,m}$.*

Лемма 1.5. *Пусть $I : U \to \mathbb{K}$ есть невырожденный абсолютный инвариант многомерной дискретной динамической системы* (D_m). *Тогда функция $I(g^{-1}) : V \to \mathbb{K}$ является невырожденным абсолютным инвариантом многомерной дискретной динамической системы, определяемой биголоморфизмами $g \circ f_j \circ g^{-1} : V \to \mathbb{K}^n,\ j = \overline{1,m}$, где биголоморфизм $g : U \to V$.*

Доказательство данного утверждения осуществляется непосредственным образом на основании определения 2.5 и следующих цепочек соотношений $I(g^{-1} \circ (g \circ f_j \circ g^{-1}(x))) = I(f_j(g^{-1}(x))) = I(g^{-1}(x)),\ \forall x \in V,\ j = \overline{1,m}$.

Лемма 2.5. *Невырожденная многомерная дискретная динамическая система* (D_1) *не может иметь базис невырожденных абсолютных инвариантов размерности n.*

Доказательство. Пусть размерность базиса невырожденных абсолютных инвариантов невырожденной многомерной дискретной динамической системы (D_1) равна n. Тогда в некоторой окрестности $O(x^0)$ точки $x^0 \in U$ базис невырожденных абсолютных инвариантов можно заменить эквивалентным базисом $x_i,\ i = \overline{1,n},\ \forall x \in O(x^0)$. Поэтому все точки из этой окрестности являются неподвижными, что противоречит невырожденности дискретной динамической системы (D_1).

Непосредственными вычислениями на основании определения 2.5 приходим к следующему утверждению.

Лемма 3.5. *Пусть $I_i,\ i = \overline{1,l},\ l < n$, есть функционально независимые невырожденные абсолютные инварианты невырожденной многомерной дискретной динамической системы* (D_1) *и при этом векторы $(D_{x_1}I_i, \ldots, D_{x_l}I_i),\ i = \overline{1,l}$, линейно независимы в каждой точке x области U. Тогда с помощью замены $g = \{I_i,\ i = \overline{1,l},\ x_i,\ i = \overline{l+1,n}\}$ от невырожденной многомерной дискретной динамической системы* (D_1) *переходим к невырожденной многомерной дискретной динамической системе, определяемой биголоморфизмом $g \circ f_1 \circ g^{-1} = \{x_i,\ i = \overline{1,l},\ f_{i1}(I_1, \ldots, I_l, x_{l+1}, \ldots, x_n),\ i = \overline{l+1,n}\}$.*

Лемма 4.5. *Размерность базиса невырожденных абсолютных инвариантов невырожденной многомерной дискретной динамической системы* (D_m) *не превосходит $n - m$.*

Доказательство. Пусть функции $I_i,\ i = \overline{1,l},\ n - m < l \le n$, определяют базис невырожденных абсолютных инвариантов невырожденной многомерной дискретной динамической системы (D_m). Не умаляя общности, будем считать, что выполняются условия леммы 3.5 (чего всегда можно добиться перенумерованием переменных). Тогда на основании этой леммы приходим к выводу, что после соответствующей замены для образов биголоморфизмов (1.1) не выполняются условия невырожденности.

Лемма 5.5. *Размерность базиса невырожденных абсолютных инвариантов невырожденной многомерной дискретной динамической системы* (D_1) *равна* $n-1$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда биголоморфизм (1.1) положительно ориентирован. В силу следствия из [17] и его комплексного аналога в некоторой окрестности $O(x^0)$ точки $x^0 \in U$ биголоморфизм (1.1) биголоморфно эквивалентен заданному в окрестности начала координат пространства $\mathbb{K}^n$ биголоморфизму $x_i,\ i=\overline{1,n-1},\ x_n+1$, имеющему невырожденные абсолютные инварианты $x_i,\ i=\overline{1,n-1}$. Теперь в силу лемм 1.5 и 2.5 приходим к утверждению леммы.

Пусть теперь биголоморфизм (1.1) является отрицательно ориентированным. На основании следствия из [17] можно сделать вывод, что в некоторой окрестности $O(x^0)$ точки $x^0 \in U$ биголоморфизм (1.1) биголоморфно эквивалентен заданному в окрестности начала координат пространства $\mathbb{K}^n$ биголоморфизму $x_i,\ i=\overline{1,n-1},\ -x_n+1$, имеющему невырожденные абсолютные инварианты $x_i,\ i=\overline{1,n-1}$. Далее аналогичным образом, как и в ориентируемом случае, получаем утверждение леммы.

Теорема 1.5 [16]. *Размерность базиса невырожденных абсолютных инвариантов невырожденной многомерной дискретной динамической системы* (D_m) *равна* $n-m$.

Доказательство. С помощью биголоморфизма из хода доказательства леммы 5.5 от невырожденной многомерной дискретной динамической системы (D_m) переходим к невырожденной многомерной дискретной динамической системе $(\mathrm{D}_m^{(1)})$, у которой определяющий биголоморфизм $f_1=\{x_i,\ i=\overline{1,n-1},\ \varepsilon x_n+1\},\ \varepsilon^2=1$. На основании тождеств (4.1) приходим к выводу, что у невырожденной многомерной дискретной динамической системы $(\mathrm{D}_m^{(1)})$ другие определяющие биголоморфизмы $f_j=\{f_{ij}(x_1,\ldots,x_{n-1}),\ i=\overline{1,n-1},\ f_{nj}(x)\},\ j=\overline{2,m}$. Далее рассматриваем сужение невырожденной многомерной дискретной динамической системы $(\mathrm{D}_m^{(1)})$ на подпространство $\mathbb{K}^{n-1}\subset\mathbb{K}^n$, соответствующее переменным $x_i,\ i=\overline{1,n-1}$. Применяя аналогичные рассуждения еще $m-1$ раз, приходим к невырожденной многомерной дискретной динамической системе $(\mathrm{D}_m^{(m)})$, у которой сужения f_j^* определяющих ее биголоморфизмов f_j на подпространство $\mathbb{K}^{n-m}\subset\mathbb{K}^n$, соответствующее переменным $x_i,\ i=\overline{1,n-m}$, имеют вид $f_j^*=id,\ j=\overline{1,m}$. Поэтому невырожденная многомерная дискретная динамическая система $(\mathrm{D}_m^{(m)})$ имеет абсолютные невырожденные инварианты $x_i,\ i=\overline{1,n-m}$. Отсюда на основании определения 2.5, лемм 1.5 и 4.5 приходим к утверждению теоремы 1.5.

Теорема 2.5. *Пусть многомерная дискретная динамическая система* (D_m) *допускает биголоморфизм* g *и имеет абсолютный инвариант* I. *Тогда функция* $I(g)$ *также является абсолютным инвариантом этой системы.*

Доказательство. Непосредственными вычислениями на основании определений 2.5 и 1.3 проверяем справедливость тождеств $I(g\circ f_j(x))=I(f_j\circ g(x))=I(g(x)),\ \forall x\in U,\ j=\overline{1,m}$, из которых получаем, что функция $I(g)$ есть невырожденный абсолютный инвариант дискретной динамической система системы (D_m).

Аналогично теореме 2.5 получаем следующее утверждение.

Теорема 3.5. *Пусть многомерная дискретная динамическая система* (D_m) *допускает группу Ли* g_α *с инфинитезимальным оператором* $\mathfrak{L}$ *и имеет абсолютный инвариант* $I(x),\ \forall x\in U$. *Тогда семейство функций* $I(g(x,\alpha)),\ \forall x\in U,\ \forall\alpha\in\Theta$, *также определяет абсолютные инварианты этой системы.*

Теорема 4.5 [16]. *Пусть многомерная дискретная динамическая система* (D_m) *допускает группу Ли* g_α *с инфинитезимальным оператором* $\mathfrak{L}$ *и имеет абсолютный инвариант* I. *Тогда функция* $\mathfrak{L}(I)$ *также является абсолютным инвариантом этой системы.*

Доказательство данного утверждения проводится на основании определения 1.5, соотношений (1.3) и тождеств $\mathfrak{L}I(x)_{|x=f_j(x)}=\mathfrak{L}I(f_j(x))=\mathfrak{L}I(x),\ \forall x\in U,\ j=\overline{1,m}$.

6. Абсолютные инварианты многопараметрических семейств многомерных дискретных динамических систем. Рассмотрим $m-$параметрическое голоморфное семейство биголоморфизмов (1.2). Непосредственными вычислениями на основании определения 2.5, тождества (5.2) и [12, с. 26] имеем такое утверждение.

Теорема 1.6 [16]. *Для того, чтобы голоморфная функция была невырожденным абсолютным инвариантом* $m-$*параметрического голоморфного семейства биголоморфизмов* (1.2), *необходимо и достаточно, чтобы она была первым интегралом дифференциальной системы* (4.2).

Определение 1.6. $m-$*параметрическое голоморфное семейство биголоморфизмов* (1.2) *будем называть* **невырожденным**, *если оно определяет* *при каждых m линейно независимых значениях параметров $t \neq t^0$ из области Ω невырожденные многомерные дискретные динамические системы вида* (D_m).

Пусть m–параметрическое голоморфное семейство биголоморфизмов является невырожденным. Тогда на основании теоремы 1.5 получаем утверждение.

Теорема 2.6 [12, с. 114]. *Пусть при $1 \leqslant m < n$ векторные поля* (3.2) *линейно несвязаны* [12, с. 11] *в области U. Тогда размерность базиса первых автономных интегралов дифференциальной системы* (4.2) *равна $n - m$.*

И, наконец, на основании теорем 2.5 – 4.5 имеем такие утверждения.

Теорема 3.6. *Пусть m–параметрическое голоморфное семейство биголоморфизмов* (1.2) *допускает биголоморфизм g и имеет невырожденный абсолютный инвариант I. Тогда функция $I(g)$ также является невырожденным абсолютным инвариантом этого семейства.*

Теорема 4.6. *Пусть m–параметрическое голоморфное семейство биголоморфизмов* (1.2) *допускает группу Ли g_α с инфинитезимальным оператором $\mathfrak{L}$ и имеет невырожденный абсолютный инвариант $I(x)$, $\forall x \in U$. Тогда семейство функций $I(g(x, \alpha))$, $\forall x \in U$, $\forall \alpha \in \Theta$, также определяет невырожденные абсолютные инварианты этого семейства.*

Теорема 5.6. *Пусть m–параметрическое голоморфное семейство биголоморфизмов* (1.2) *допускает группу Ли g_α с инфинитезимальным оператором $\mathfrak{L}$ и имеет невырожденный абсолютный инвариант I. Тогда функция $\mathfrak{L}(I)$ также является абсолютным инвариантом этого семейства.*

7. Относительные инварианты многомерных дискретных динамических систем.

Определение 1.7 *Голоморфную функцию $I : U \to \mathbb{K}$ будем называть* **относительным инвариантом** *многомерной дискретной динамической системы* (D_m), *если $I(f_j(x)) = \Phi_j(I(x), x)$, $\Phi_j(0, x) = 0$, $\forall x \in U$, $j = \overline{1, m}$.*

Теорема 1.7. *Пусть многомерная дискретная динамическая система* (D_m) *допускает биголоморфизм g и имеет относительный инвариант I. Тогда функция $I(g)$ также является относительным инвариантом этой системы.*

Доказательство проводится на основании тождеств $I(g \circ f_j(x)) = I(f_j \circ g(x)) = \Phi_j(I(g(x)), g(x))$, $\Phi_j(0, g(x)) = 0$, $\forall x \in U$, $j = \overline{1, m}$.

Аналогично теореме 1.7 получаем утверждение.

Теорема 2.7. *Пусть многомерная дискретная динамическая система* (D_m) *допускает группу Ли* g_α *с инфинитезимальным оператором* $\mathfrak{L}$ *и имеет относительный инвариант* $I(x),\ \forall x \in U$. *Тогда семейство функций* $I(g(x,\alpha)),\ \forall x \in U,\ \forall \alpha \in \Theta$, *также определяет относительные инварианты этой системы.*

8. Относительные инварианты многопараметрических семейств многомерных дискретных динамических систем. Рассмотрим $m-$параметрическое голоморфное семейство биголоморфизмов (1.2). Непосредственными вычислениями на основании определения 1.7, тождества (5.2) и [12, с. 161] имеем такое утверждение.

Теорема 1.8 [16]. *Для того, чтобы голоморфная функция была относительным инвариантом* $m-$*параметрического голоморфного семейства биголоморфизмов* (1.2), *необходимо и достаточно, чтобы она была частным интегралом дифференциальной системы* (4.2).

Теперь на основании теорем 1.7 и 2.7 получаем такие утверждения.

Теорема 2.8. *Пусть* $m-$*параметрическое голоморфное семейство биголоморфизмов* (1.2) *допускает биголоморфизм* g *и имеет относительный инвариант* I. *Тогда функция* $I(g)$ *также является относительным инвариантом этого семейства.*

Теорема 3.8. *Пусть* $m-$*параметрическое голоморфное семейство биголоморфизмов* (1.2) *допускает группу Ли* g_α *с инфинитезимальным оператором* $\mathfrak{L}$ *и имеет относительный инвариант* $I(x),\ \forall x \in U$. *Тогда семейство функций* $I(g(x,\alpha)),\ \forall x \in U,\ \forall \alpha \in \Theta$, *также определяет относительные инварианты этого семейства.*

В следующих четырех пунктах проведем расширенное изложение работы [18].

9. Базис невырожденных абсолютных инвариантов комплексных линейных невырожденных многомерных дискретных динамических систем. Рассмотрим комплексную линейную невырожденную многомерную дискретную динамическую систему $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m)$, образованную невырожденными линейными отображениями

$$A_j x,\ \forall x \in \mathbb{C}^n,\ j = \overline{1,m}, \tag{1.9}$$

где $1 \leqslant m < n$, невырожденные квадратные матрицы $A_j = ||a_{ikj}||$ размера n состоят из элементов $a_{ikj} \in \mathbb{C},\ i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}.$

Сначала построим базис невырожденных абсолютных инвариантов для невырожденного линейного отображения

$$A_j x, \ \forall x \in \mathbb{C}^n, \ j \in \{1, \ldots, m\}. \tag{2.9}$$

Для этого будем искать относительные инварианты отображения (2.9) в виде

$$L(x) = M^T x, \tag{3.9}$$

где T есть операция транспонирования, $M = (M_1, \ldots, M_n), \ M_i \in \mathbb{C}, \ i = \overline{1, n}$. Тогда имеем тождество

$$L(A_j x) = M^T A_j x, \ \forall x \in \mathbb{C}^n. \tag{4.9}$$

Теперь на основании соотношений (3.9) и (4.9) приходим к выводу, что если имеет место тождество

$$M^T A_j x = \lambda M^T x, \ \forall x \in \mathbb{C}^n, \ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{5.9}$$

то линейная функция (3.9) является относительным инвариантом отображения (2.9).

Тождество (5.9) эквивалентно линейной однородной системе алгебраических уравнений

$$(A_j - \lambda I)M = 0, \tag{6.9}$$

где I есть единичная матрица. Система (6.9) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда определитель

$$det\ (A_j - \lambda I) = 0. \tag{7.9}$$

Теперь из характеристического уравнения (7.9) отображения (2.9) находим корни λ, которые будут ненулевыми в силу $det\ A_j \neq 0$ (это вытекает из невырожденности отображения (2.9)).

Согласно [19, с. 177] матрицу A_j представим в виде $A_j = SJS^{-1}$, где $S \in GL(n, \mathbb{C}), \ J = diag\{J_{11}, \ldots, J_{1p_1}, \ldots, J_{rp_r}\}$ есть нормальная жорданова форма матрицы $A_j, \ J_{lk}$ есть блоки Жордана размера s_{lk}, соответствующие корню λ_l характеристического уравнения (7.9), $k = \overline{1, p_l}, \ l = \overline{1, r}$. С помощью невырожденного линейного отображения перейдем в новый базис, соответствующий нормальной жордановой форме J. Разобьем новый базис на части так, чтобы каждая часть соответствовала определенному блоку Жордана J_{lk}. Тогда пространство $\mathbb{C}^n$ распадается на прямую сумму подпространств $\mathbb{C}_{lk}$, каждое из которых определяется базисом, соответствующим блоку Жордана

J_{lk} и имеет размерность s_{lk}. Система (6.9) в новом базисе преобразуется к виду

$$(J - \lambda I)K = 0, \tag{8.9}$$

где $K = S^{-1}M$.

Рассмотрим систему (8.9) в базисе, соответствующем пространству $\mathbb{C}_{lk}$. Имеем систему уравнений

$$(J_{lk} - \lambda_l I_{lk})K_{lk} = 0,\ k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{1, r}, \tag{9.9}$$

где I_{lk} есть единичная матрица размера s_{lk}. Непосредственными вычислениями, используя вид блока Жордана J_{lk}, убеждаемся, что система (9.9) и система

$$(J_{lk} - \lambda_l I_{lk})K_{lk}^{\nu} = \nu K_{lk}^{\nu-1},\ \nu = \overline{1, s_{lk} - 1}, \tag{10.9}$$

имеют s_{lk} линейно независимых нетривиальных решений

$$\begin{gathered} K_{lk}^0 = (1, 0, \ldots, 0),\ K_{lk}^1 = (1, 1, 0, \ldots, 0),\ K_{lk}^2 = (1, 2, 2, 0, \ldots, 0), \\ \ldots,\ K_{lk}^{s_{lk}-1} = (1, s_{lk} - 1, (s_{lk} - 1)(s_{lk} - 2), \ldots, (s_{lk} - 1)!, (s_{lk} - 1)!), \end{gathered} \tag{11.9}$$

где $K_{lk}^0 = K_{lk}$. После перехода в старый базис с учетом соотношений (9.9) – (11.9) имеем, что

$$\begin{gathered} L_{lk}^{\nu}(A_j x) = \lambda_l L_{lk}^{\nu}(x) + \nu L_{lk}^{\nu-1}(x),\ \forall x \in \mathbb{C}^n, \\ \nu = \overline{0, s_{lk} - 1},\ k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{1, r}, \end{gathered} \tag{12.9}$$

где соответствующие коэффициенты линейных однородных функций $L_{lk}^{\nu}(x)$ получены из K_{lk}^{ν} после возвращения из нового базиса в старый.

Так как линейное отображение, осуществляющее переход из нового базиса в старый, является невырожденным, а векторы K_{lk}^{ν} линейно независимы в новом базисе, то вновь полученные функции также являются линейно независимыми. Поэтому тождество

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j L_{l_j k_j}^{\nu_j}(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{C}^n, \tag{13.9}$$

имеет место лишь при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Следовательно, определитель системы линейных однородных уравнений, на которую распадается тождество (13.9), отличен от нуля. Этот определитель совпадает с определителем матрицы Якоби системы n функций $L_{l_j k_j}^{\nu_j}(x)$. Поэтому данные функции являются функционально независимыми.

Построим вспомогательные функции $v_p^{lk}(x)$ таким образом, что

$$L_{lk}^{\nu}(x) = \sum_{p=1}^{\nu} C_{\nu-1}^{p-1} v_p^{lk}(x) L_{lk}^{\nu-p}(x),\ \nu = \overline{1, s_{lk}-1}. \qquad (14.9)$$

Система (14.9) всегда разрешима относительно $v_p^{lk}(x)$, т.к. ее главный определитель равен $\{L_{lk}^0(x)\}^{s_{lk}-1}$. Докажем, что для функций $v_p^{lk}(x)$ справедливы тождества

$$v_p^{lk}(A_j x) \equiv v_p^{lk}(x) + (-1)^{p+1}\frac{(p-1)!}{\lambda_l^p},\ p = \overline{1, s_{lk}-1}. \qquad (15.9)$$

Справедливость тождеств (15.9) при $p = 1$ и $p = 2$ проверяется непосредственно на основе (12.9). Доказательство при $p > 2$ будем вести методом математической индукции. Предположим, что тождества (15.9) выполняются при $p = \overline{1, \mu-1}$. Подставляя вместо x выражение $A_j x$ в уравнение при $\nu = \mu$ из системы (14.9) и принимая во внимание (12.9) и (15.9) при $\nu = \overline{0, \mu}$ и $p = \overline{1, \mu-1}$, соответственно, получаем, что $\lambda_l L_{lk}^{\mu}(x) + \mu L_{lk}^{\mu-1}(x) \equiv \lambda_l \sum\limits_{p=1}^{\mu-1} C_{\mu-1}^{p-1} v_p^{lk}(x) L_{lk}^{\mu-p}(x) + \sum\limits_{p=1}^{\mu-1} C_{\mu-1}^{p-1}(\mu - p) v_p^{lk}(x) L_{lk}^{\mu-p-1}(x) + \lambda_l \sum\limits_{p=1}^{\mu-1} C_{\mu-1}^{p-1}(-1)^{p+1}\frac{(p-1)!}{\lambda_l^p} L_{lk}^{\mu-p}(x) + \sum\limits_{p=1}^{\mu-1} C_{\mu-1}^{p-1}(\mu-p)(-1)^{p+1}\frac{(p-1)!}{\lambda_l^p} L_{lk}^{\mu-p-1}(x) + \lambda_l v_\mu^{lk}(A_j x) L_{lk}^0(x)$. Упрощая последнее тождество и учитывая, что $L_{lk}^0(x) \not\equiv 0$, имеем $v_\mu^{lk}(A_j x) \equiv v_\mu^{lk}(x) + (-1)^{\mu+1}\dfrac{(\mu-1)!}{\lambda_l^\mu}$.

Теперь из тождеств (12.9) и (15.9) получаем

$$\begin{gathered} ln\ L_{lk}^0(A_j x) \equiv ln\ L_{lk}^0(x) + ln\ \lambda_l,\ k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{1, r}; \\ v_g^{lk}(A_j x) \equiv v_g^{lk}(x) + (-1)^{g+1}\frac{(g-1)!}{\lambda_l^g}, \\ g = \overline{1, s_{lk}-1},\ k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{1, r}; \end{gathered} \qquad (16.9)$$

где $\sum\limits_{l=1}^{r}\sum\limits_{k=1}^{p_l} s_{lk} = n$.

На основании соотношений (16.9) получаем n функций $\Phi_k(x),\ k = \overline{1, n}$, со свойством

$$\Phi_k(A_j x) \equiv \Phi_k(x) + \alpha_k,\ k = \overline{1, n}, \qquad (17.9)$$

где $\alpha_k \in \mathbb{C},\ k = \overline{1, n}$. Поэтому на основании тождеств (17.9) с учетом построения функций $\Phi_k(x)$ и указанной выше функциональной независимости функций $L_{lk}^{\nu}(x)$ мы всегда можем построить $n-1$ функционально независимых невырожденных абсолютных инвариантов вида

$$\gamma_{k_1}\Phi_{k_1}(x)+\gamma_{k_2}\Phi_{k_2}(x), \tag{18.9}$$

где $\gamma_{k_j}\in\mathbb{C},\ j=\overline{1,2}$, для линейного отображения (2.9). Теперь с учетом невырожденности линейного отображения (2.9) и теоремы 1.5 приходим к выводу, что (18.9) есть базис невырожденных абсолютных инвариантов этого отображения.

Для построения базиса невырожденных абсолютных инвариантов комплексной линейной невырожденной многомерной дискретной динамической системы ($\mathbb{C}\mathrm{L}_m$) введем вспомогательные операторы $\Delta_\tau H(x)=H(A_\tau x)-H(x),\ \tau=\overline{1,m}$, действующие на голоморфные функции $H(x)$. Нетрудно видеть, что функция $H(x)$ является абсолютным инвариантом системы ($\mathbb{C}\mathrm{L}_m$) тогда и только тогда, когда

$$\Delta_\tau H(x)\equiv 0,\ \tau=\overline{1,m}. \tag{19.9}$$

Непосредственно проверяем, что линейное отображение (2.9) не имеет нетривиальных (тождественно не равных постоянной величине) абсолютных инвариантов вида

$$\begin{gathered}\Delta_\tau lnL_{lk}^0(x),\ k=\overline{1,p_l},\ l=\overline{1,r};\\ \Delta_\tau v_g^{lk}(x),\ g=\overline{1,s_{lk}-1},\ k=\overline{1,p_l},\ l=\overline{1,r};\ \tau=\overline{1,m},\ \tau\neq j,\end{gathered} \tag{20.9}$$

а также то, что операторы $\Delta_\tau,\ \tau=\overline{1,m}$, перестановочны (это вытекает из условий (4.1)). Поэтому из (16.9) имеем, что $\Delta_j\Delta_\tau lnL_{lk}^0(x)\equiv\Delta_\tau\Delta_j lnL_{lk}^0(x)\equiv 0,\ k=\overline{1,p_l},\ l=\overline{1,r};\ \Delta_j\Delta_\tau v_g^{lk}(x)\equiv\Delta_\tau\Delta_j v_g^{lk}(x)\ \equiv 0,\ g=\overline{1,s_{lk}-1},\ k=\overline{1,p_l},\ l=\overline{1,r};\ \tau=\overline{1,m},\ \tau\neq j$, а отсюда в силу отсутствия нетривиальных абсолютных инвариантов (20.9) у линейного отображения (2.9) и тождеств (16.9) получаем соотношения вида $\Delta_\tau lnL_{lk}^0(x)\equiv\mu_{l\tau},\ \mu_{l\tau}\in\mathbb{C},\ k=\overline{1,p_l},\ l=\overline{1,r};\ \Delta_\tau v_g^{lk}(x)\equiv\mu_{lk\tau}^g,\ \mu_{lk\tau}^g\in\mathbb{C},\ g=\overline{1,s_{lk}-1},\ k=\overline{1,p_l},\ l=\overline{1,r};\ \tau=\overline{1,m}$. В итоге мы получаем n функций $\Psi_k(x),\ k=\overline{1,n}$, со свойством

$$\Delta_\tau\Psi_k(x)\equiv\alpha_{k\tau},\ \alpha_{k\tau}\in\mathbb{C},\ k=\overline{1,n},\ \tau=\overline{1,m}. \tag{21.9}$$

Поэтому на основе критерия (19.9) и тождеств (21.9) с учетом построения функций $\Psi_k(x)$ и функциональной независимости функций $L_{jk}^{\nu}(x)$ мы имеем $n-m$ функционально независимых абсолютных невырожденных инвариантов вида

$$\sum_{j=1}^{m+1}\gamma_{sk_j}\Psi_{k_j}(x),\ s=\overline{1,n-m}, \tag{22.9}$$

где $\gamma_{sk_j} \in \mathbb{C},\ j = \overline{1, m+1}$, системы ($\mathbb{C}\mathrm{L}_m$). Теперь в силу теоремы 1.5 приходим к выводу, что это есть базис невырожденных абсолютных инвариантов комплексной линейной невырожденной многомерной дискретной динамической системы ($\mathbb{C}\mathrm{L}_m$).

10. Базис невырожденных абсолютных инвариантов вещественных линейных невырожденных многомерных дискретных динамических систем. Рассмотрим вещественную линейную невырожденную многомерную дискретную динамическую систему ($\mathbb{R}\mathrm{L}_m$), образованную невырожденными линейными отображениями $A_j x,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ j = \overline{1, m}$, где $1 \leqslant m < n$, невырожденные квадратные матрицы $A_j = ||a_{ikj}||$ размера n состоят из элементов $a_{ikj} \in \mathbb{R},\ i = \overline{1, n},\ k = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m}$.

Как и в предыдущем пункте, сначала построим базис невырожденных абсолютных инвариантов для невырожденного линейного отображения

$$A_j x,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ j \in \{1, \ldots, m\}. \tag{1.10}$$

Далее аналогичным образом приходим к характеристическому уравнению (7.9). Пусть оно имеет 2μ комплексно сопряженных корней $\lambda_l = a_l \pm i\, b_l,\ a_l \in \mathbb{R},\ b_l \in \mathbb{R},\ b_l \neq 0,\ i$ есть мнимая единица, $l = \overline{1, \mu}$; и $r - 2\mu$ вещественных корней $\lambda_l,\ l = \overline{2\mu + 1, r}$. Далее на основании аналога соотношений (16.9) имеем тождества

$$\begin{gathered}
ln(Re^2 L^0_{lk}(A_j x) + Im^2 L^0_{lk}(A_j x)) \equiv ln(Re^2 L^0_{lk}(x) + Im^2 L^0_{lk}(x)) + \\
+ ln(a_l^2 + b_l^2),\ k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{1, \mu}; \\
arctg \frac{Im\ L^0_{lk}(A_j x)}{Re\ L^0_{lk}(A_j x)} \equiv arctg \frac{Im\ L^0_{lk}(x)}{Re\ L^0_{lk}(x)} + arctg \frac{b_l}{a_l}, \\
k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{1, \mu}; \\
ln\ |L^0_{lk}(A_j x)| \equiv ln\ |L^0_{lk}(x)| + ln\ |\lambda_l|,\ k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{2\mu + 1, r}; \\
Re\ v^{lk}_g(A_j x) \equiv Re\ v^{lk}_g(x) + (-1)^{g+1}(g-1)! Re\ \lambda_l^{-g}, \\
g = \overline{1, s_{lk} - 1},\ k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{1, \mu}; \\
Im\ v^{lk}_g(A_j x) \equiv Im\ v^{lk}_g(x) + (-1)^{g+1}(g-1)! Im\ \lambda_l^{-g}, \\
g = \overline{1, s_{lk} - 1},\ k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{1, \mu}; \\
v^{lk}_g(A_j x) \equiv v^{lk}_g(x) + (-1)^{g+1} \frac{(g-1)!}{\lambda_l^g}, \\
g = \overline{1, s_{lk} - 1},\ k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{2\mu + 1, r};
\end{gathered} \tag{2.10}$$

где $L^0_{lk}(x) \equiv Re\ L^0_{lk}(x) + i\ Im\ L^0_{lk}(x),\ Re\ L^0_{lk} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ Im\ L^0_{lk} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{1, \mu};\ v^{lk}_g(x) \equiv Re\ v^{lk}_g(x) + i\ Im\ v^{lk}_g(x),\ Re\ v^{lk}_g : V \to \mathbb{R},\ Im\ v^{lk}_g :$

$V \to \mathbb{R},\ V \subset \mathbb{R}^n,\ g = \overline{1, s_{lk}-1},\ k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{1, \mu}$. Используя тождества (2.10), непосредственным образом получаем n вещественных функций $\Phi_k(x),\ k = \overline{1, n}$, со свойством (17.9), где $\alpha_k \in \mathbb{R},\ k = \overline{1, n}$. Теперь на основании этих функций аналогично комплексному случаю строим вещественные базисы невырожденных абсолютных инвариантов для: 1) вещественного линейного отображения (1.10) посредством $n-1$ вещественных функций вида (18.9), где $\gamma_{k_j} \in \mathbb{R},\ j = \overline{1, 2}$; 2) вещественной линейной невырожденной многомерной дискретной динамической системы ($\mathbb{R}\mathrm{L}_m$) посредством $n-m$ вещественных функций вида (22.9), где $\gamma_{sk_j} \in \mathbb{R},\ s = \overline{1, n-m},\ j = \overline{1, m+1}$.

11. Базис невырожденных абсолютных инвариантов комплексных дробно–линейных невырожденных многомерных дискретных динамических систем. Рассмотрим комплексную дробно–линейную невырожденную многомерную дискретную динамическую систему ($\mathbb{C}\mathrm{PL}_m$), образованную невырожденными линейными отображениями

$$A_j x,\ \forall x \in \mathbb{C}P^n,\ j = \overline{1, m}, \tag{1.11}$$

где $1 \leqslant m < n$, однородные координаты $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$, невырожденные квадратные матрицы $A_j = ||a_{ikj}||$ размера $n+1$ состоят из элементов $a_{ikj} \in \mathbb{C},\ i = \overline{1, n+1},\ k = \overline{1, n+1},\ j = \overline{1, m}$.

Сначала построим базис невырожденных абсолютных инвариантов для невырожденного дробно–линейного отображения

$$A_j x,\ \forall x \in \mathbb{C}P^n,\ j \in \{1, \ldots, m\}. \tag{2.11}$$

Для этого будем искать относительные инварианты отображения (2.11) в виде

$$L(x) = M^T x, \tag{3.11}$$

где $M = (M_1, \ldots, M_{n+1}),\ M_i \in \mathbb{C},\ i = \overline{1, n+1}$. Тогда имеем тождество

$$L(A_j x) = M^T A_j x,\ \forall x \in \mathbb{C}P^n. \tag{4.11}$$

Теперь на основании соотношений (3.11) и (4.11) приходим к выводу, что если имеет место тождество

$$M^T A_j x = \lambda M^T x,\ \forall x \in \mathbb{C}P^n,\ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{5.11}$$

то линейная функция (3.11) является относительным инвариантом отображения (2.11).

Тождество (5.11) эквивалентно линейной однородной системе алгебраических уравнений

$$(A_j - \lambda I)M = 0. \tag{6.11}$$

Система (6.11) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда определитель

$$det\ (A_j - \lambda I) = 0. \tag{7.11}$$

Теперь из характеристического уравнения (7.11) отображения (2.11) находим корни λ, которые будут ненулевыми в силу $det\ A_j \neq 0$ (это вытекает из невырожденности отображения (2.11)).

Матрицу A_j представим в виде $A_j = SJS^{-1}$, где $S \in GL(n, \mathbb{C})$, $J = diag\{J_{11}, \ldots, J_{1p_1}, \ldots, J_{rp_r}\}$ есть нормальная жорданова форма матрицы A_j, J_{lk} есть блоки Жордана размера s_{lk}, соответствующие корню λ_l характеристического уравнения (7.11), $k = \overline{1, p_l}$, $l = \overline{1, r}$. С помощью невырожденного дробно–линейного отображения перейдем в новый базис, соответствующий нормальной жордановой форме J. Разобьем новый базис на части так, чтобы каждая часть соответствовала определенному блоку Жордана J_{lk}. Тогда пространство однородных координат x распадается объединение подпространств x_{lk}, каждое из которых определяется базисом, соответствующим блоку Жордана J_{lk} и имеет размерность s_{lk}. Система (6.11) в новом базисе преобразуется к виду

$$(J - \lambda I)K = 0, \tag{8.11}$$

где $K = S^{-1}M$.

Рассмотрим систему (8.11) в базисе, соответствующем пространству x_{lk}. Имеем систему уравнений

$$(J_{lk} - \lambda_l I_{lk})K_{lk} = 0,\ k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{1, r}. \tag{9.11}$$

Непосредственными вычислениями, используя вид блока Жордана J_{lk}, убеждаемся, что система (9.11) и система

$$(J_{lk} - \lambda_l I_{lk})K_{lk}^{\nu} = \nu K_{lk}^{\nu-1},\ \nu = \overline{1, s_{lk} - 1}, \tag{10.11}$$

имеют s_{lk} линейно независимых нетривиальных решений

$$\begin{gathered} K_{lk}^0 = (1, 0, \ldots, 0),\ K_{lk}^1 = (1, 1, 0, \ldots, 0),\ K_{lk}^2 = (1, 2, 2, 0, \ldots, 0), \\ \ldots,\ K_{lk}^{s_{lk}-1} = (1, s_{lk} - 1, (s_{lk} - 1)(s_{lk} - 2), \ldots, (s_{lk} - 1)!, (s_{lk} - 1)!), \end{gathered} \tag{11.11}$$

где $K_{lk}^0 = K_{lk}$. После перехода в старый базис с учетом соотношений (9.11) – (11.11) имеем, что

$$\begin{gathered} L_{lk}^{\nu}(A_j x) = \lambda_l L_{lk}^{\nu}(x) + \nu L_{lk}^{\nu-1}(x),\ \forall x \in \mathbb{C}P^n, \\ \nu = \overline{0, s_{lk} - 1},\ k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{1, r}, \end{gathered} \tag{12.11}$$

где соответствующие коэффициенты линейных однородных функций $L_{lk}^{\nu}(x)$ получены из K_{lk}^{ν} после возвращения из нового базиса в старый.

Так как дробно–линейное отображение, осуществляющее переход из нового базиса в старый, является невырожденным, а векторы K_{lk}^{ν} линейно независимы в новом базисе, то вновь полученные функции также являются линейно независимыми. Поэтому тождество

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j L_{l_j k_j}^{\nu_j}(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{C}P^n, \tag{13.11}$$

имеет место лишь при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{n+1} = 0$. Следовательно, определитель системы линейных однородных уравнений, на которую распадается тождество (13.11), отличен от нуля. Этот определитель совпадает с определителем матрицы Якоби системы $n+1$ функций $L_{l_j k_j}^{\nu_j}(x)$. Поэтому данные функции являются функционально независимыми.

Построим вспомогательные функции $v_p^{lk}(x)$ таким образом, что

$$L_{lk}^{\nu}(x) = \sum_{p=1}^{\nu} C_{\nu-1}^{p-1} v_p^{lk}(x) L_{lk}^{\nu-p}(x), \ \nu = \overline{1, s_{lk}-1}. \tag{14.11}$$

Система (14.11) всегда разрешима относительно $v_p^{lk}(x)$, т.к. ее главный определитель равен $\{L_{lk}^0(x)\}^{s_{lk}-1}$. Как и в пункте 9, доказываем справедливость тождеств

$$v_p^{lk}(A_j x) \equiv v_p^{lk}(x) + (-1)^{p+1} \frac{(p-1)!}{\lambda_l^p}, \ p = \overline{1, s_{lk}-1}. \tag{15.11}$$

Теперь из тождеств (12.11) и (15.11) получаем

$$\begin{gathered} ln\ L_{lk}^0(A_j x) \equiv ln\ L_{lk}^0(x) + ln\ \lambda_l, \ k = \overline{1, p_l}, \ l = \overline{1, r}; \\ v_g^{lk}(A_j x) \equiv v_g^{lk}(x) + (-1)^{g+1} \frac{(g-1)!}{\lambda_l^g}, \\ g = \overline{1, s_{lk}-1}, \ k = \overline{1, p_l}, \ l = \overline{1, r}; \end{gathered} \tag{16.11}$$

где $\sum\limits_{l=1}^{r} \sum\limits_{k=1}^{p_l} s_{lk} = n+1$.

На основании соотношений (16.11) получаем $\sum\limits_{l=1}^{r} p_l$ линейных однородных функций $\varphi_k(x), \ k = \overline{1, \sum\limits_{l=1}^{r} p_l}$, и $n + 1 - \sum\limits_{l=1}^{r} p_l$ функций $\varphi(x)$ нулевой степени однородности, таких, что

$$\Phi_k(A_j x) \equiv \Phi_k(x) + \alpha_k,\ k = \overline{1, n+1}, \tag{17.11}$$

где $\Phi_k(x) \equiv ln\ \varphi_k(x),\ \alpha_k \in \mathbb{C},\ k = \overline{1, n+1}$. Поэтому на основании тождеств (17.11) с учетом построения функций $\Phi_k(x)$ и указанной выше функциональной независимости функций $L_{lk}^{\nu}(x)$ мы всегда можем построить $n-1$ функционально независимых невырожденных абсолютных инвариантов нулевой степени однородности вида

$$\gamma_{k_1}\Phi_{k_1}(x) + \gamma_{k_2}\Phi_{k_2}(x) + \gamma_{k_3}\Phi_{k_3}(x), \tag{18.11}$$

где $\gamma_{k_j} \in \mathbb{C},\ j = \overline{1,3}$, для дробно–линейного отображения (2.11). Теперь с учетом невырожденности дробно–линейного отображения (2.11) и теоремы 1.5 приходим к выводу, что (18.11) есть базис невырожденных абсолютных инвариантов этого отображения.

Для построения базиса невырожденных абсолютных инвариантов комплексной линейной невырожденной многомерной дискретной динамической системы ($\mathbb{C}\mathrm{PL}_m$) введем вспомогательные операторы $\Delta_\tau H(x) = H(A_\tau x) - H(x),\ \tau = \overline{1, m}$, действующие на голоморфные функции $H(x)$. Нетрудно видеть, что функция $H(x)$ является абсолютным инвариантом системы ($\mathbb{C}\mathrm{PL}_m$) тогда и только тогда, когда

$$\Delta_\tau H(x) \equiv 0,\ \tau = \overline{1, m}. \tag{19.11}$$

Непосредственно проверяем, что линейное отображение (2.11) не имеет нетривиальных (тождественно не равных постоянной величине) абсолютных инвариантов вида

$$\begin{gathered} \Delta_\tau lnL_{lk}^0(x),\ k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{1, r}; \\ \Delta_\tau v_g^{lk}(x),\ g = \overline{1, s_{lk}-1},\ k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{1, r};\ \tau = \overline{1, m},\ \tau \neq j, \end{gathered} \tag{20.11}$$

а также то, что операторы $\Delta_\tau,\ \tau = \overline{1, m}$, перестановочны (это вытекает из условий (4.1)). Поэтому из (16.11) имеем, что $\Delta_j\Delta_\tau lnL_{lk}^0(x) \equiv \Delta_\tau\Delta_j lnL_{lk}^0(x) \equiv 0,\ k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{1, r};\ \Delta_j\Delta_\tau v_g^{lk}(x) \equiv \Delta_\tau\Delta_j v_g^{lk}(x) \equiv 0,\ g = \overline{1, s_{lk}-1},\ k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{1, r};\ \tau = \overline{1, m},\ \tau \neq j$, а отсюда в силу отсутствия нетривиальных абсолютных инвариантов (20.11) у дробно–линейного отображения (2.11) и тождеств (16.11) получаем соотношения вида $\Delta_\tau lnL_{lk}^0(x) \equiv \mu_{l\tau},\ \mu_{l\tau} \in \mathbb{C},\ k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{1, r};\ \Delta_\tau v_g^{lk}(x) \equiv \mu_{lk\tau}^g,\ \mu_{lk\tau}^g \in \mathbb{C},\ g = \overline{1, s_{lk}-1},\ k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{1, r};\ \tau = \overline{1, m}$. В итоге мы получаем $\sum\limits_{l=1}^{r} p_l$ линейных однородных функций $\psi_k(x),\ k=\overline{1,\sum\limits_{l=1}^{r}p_l}$, и $n+1-\sum\limits_{l=1}^{r}p_l$ функций $\psi(x)$ нулевой степени однородности со свойством

$$\Delta_\tau\Psi_k(x)\equiv\alpha_{k\tau},\ \alpha_{k\tau}\in\mathbb{C},\ k=\overline{1,n+1},\ \tau=\overline{1,m}, \tag{21.11}$$

где $\Psi_k(x)\equiv ln\ \psi_k(x),\ k=\overline{1,n+1}$. Поэтому на основе критерия (19.11) и тождеств (21.11) с учетом построения функций $\Psi_k(x)$ и функциональной независимости функций $L^{\nu}_{jk}(x)$ мы имеем $n-m$ функционально независимых абсолютных невырожденных инвариантов вида

$$\sum_{j=1}^{m+1}\gamma_{sk_j}\Psi_{k_j}(x),\ s=\overline{1,n-m}, \tag{22.11}$$

где $\gamma_{sk_j}\in\mathbb{C},\ j=\overline{1,m+1}$, системы ($\mathbb{C}\mathrm{PL}_m$). Теперь в силу теоремы 1.5 приходим к выводу, что это есть базис невырожденных абсолютных инвариантов комплексной дробно–линейной невырожденной многомерной дискретной динамической системы ($\mathbb{C}\mathrm{PL}_m$).

12. Базис невырожденных абсолютных инвариантов вещественных дробно–линейных невырожденных многомерных дискретных динамических систем. Рассмотрим вещественную дробно–линейную невырожденную многомерную дискретную динамическую систему ($\mathbb{R}\mathrm{PL}_m$), образованную невырожденными линейными отображениями $A_jx,\ \forall x\in\mathbb{R}P^n,\ j=\overline{1,m}$, где $1\leqslant m<n$, невырожденные квадратные матрицы $A_j=||a_{ikj}||$ размера $n+1$ состоят из элементов $a_{ikj}\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n+1},\ k=\overline{1,n+1},\ j=\overline{1,m}$.

Как и в предыдущем пункте, сначала построим базис невырожденных абсолютных инвариантов для невырожденного линейного отображения

$$A_jx,\ \forall x\in\mathbb{R}P^n,\ j\in\{1,\ldots,m\}. \tag{1.12}$$

Далее аналогичным образом приходим к характеристическому уравнению (7.11). Пусть оно имеет 2μ комплексно сопряженных корней $\lambda_l=a_l\pm i\,b_l,\ a_l\in\mathbb{R},\ b_l\in\mathbb{R},\ b_l\neq 0,\ l=\overline{1,\mu}$; и $r-2\mu$ вещественных корней $\lambda_l,\ l=\overline{2\mu+1,r}$. Далее на основании аналога соотношений (16.11) имеем тождества

$$ln(Re^2L^0_{lk}(A_jx)+Im^2L^0_{lk}(A_jx))\equiv ln(Re^2L^0_{lk}(x)+Im^2L^0_{lk}(x))+$$
$$+ln(a_l^2+b_l^2),\ k=\overline{1,p_l},\ l=\overline{1,\mu};$$
$$arctg\frac{Im\ L^0_{lk}(A_jx)}{Re\ L^0_{lk}(A_jx)}\equiv arctg\frac{Im\ L^0_{lk}(x)}{Re\ L^0_{lk}(x)}+arctg\frac{b_l}{a_l},$$

$$
\begin{gathered}
k=\overline{1,p_l},\ l=\overline{1,\mu};\\
ln\ |L_{lk}^0(A_jx)|\equiv ln\ |L_{lk}^0(x)|+ln\ |\lambda_l|,\ k=\overline{1,p_l},\ l=\overline{2\mu+1,r};\\
Re\ v_g^{lk}(A_jx)\equiv Re\ v_g^{lk}(x)+(-1)^{g+1}(g-1)!Re\ \lambda_l^{-g},\\
g=\overline{1,s_{lk}-1},\ k=\overline{1,p_l},\ l=\overline{1,\mu};\\
Im\ v_g^{lk}(A_jx)\equiv Im\ v_g^{lk}(x)+(-1)^{g+1}(g-1)!Im\ \lambda_l^{-g},\\
g=\overline{1,s_{lk}-1},\ k=\overline{1,p_l},\ l=\overline{1,\mu};\\
v_g^{lk}(A_jx)\equiv v_g^{lk}(x)+(-1)^{g+1}\frac{(g-1)!}{\lambda_l^g},\\
g=\overline{1,s_{lk}-1},\ k=\overline{1,p_l},\ l=\overline{2\mu+1,r};
\end{gathered}
\tag{2.12}
$$

где $L_{lk}^0(x)\equiv Re\ L_{lk}^0(x)+i\ Im\ L_{lk}^0(x),\ Re\ L_{lk}^0:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ Im\ L_{lk}^0:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ k=\overline{1,p_l},\ l=\overline{1,\mu};\ v_g^{lk}(x)\equiv Re\ v_g^{lk}(x)+i\ Im\ v_g^{lk}(x),\ Re\ v_g^{lk}:V\to\mathbb{R},\ Im\ v_g^{lk}:V\to\mathbb{R},\ V\subset\mathbb{R}^n,\ g=\overline{1,s_{lk}-1},\ k=\overline{1,p_l},\ l=\overline{1,\mu}$. Используя тождества (2.12), непосредственным образом получаем $n+1$ вещественных функций нулевой степени однородности $\Phi_k(x),\ k=\overline{1,n+1}$, со свойством (17.11), где $\alpha_k\in\mathbb{R},\ k=\overline{1,n+1}$. Теперь на основании этих функций аналогично комплексному случаю строим вещественные базисы невырожденных абсолютных инвариантов для: 1) вещественного дробно–линейного отображения (1.12) посредством $n-1$ вещественных функций вида (18.11), где $\gamma_{k_j}\in\mathbb{R},\ j=\overline{1,3}$; 2) вещественной дробно–линейной невырожденной многомерной дискретной динамической системы ($\mathbb{R}\mathrm{PL}_m$) посредством $n-m$ вещественных функций вида (22.11), где $\gamma_{sk_j}\in\mathbb{R},\ s=\overline{1,n-m},\ j=\overline{1,m+2}$.

13. Базис невырожденных абсолютных инвариантов линейных невырожденных многопараметрических семейств многомерных дискретных динамических систем. Рассмотрим комплексное линейное невырожденное m–параметрическое семейство биголоморфизмов

$$
A(t)x,\ \forall x\in\mathbb{K}^n,\ \forall t\in\mathbb{K}^m,\ A(t^0)=I,\ t^0\in\mathbb{K}^m,\ 1\leqslant m<n,
\tag{1.13}
$$

и соответствующие ему: 1) коммутирующие между собой и линейно несвязанные почти везде на $\mathbb{K}^n$ (при $m>1$) линейные дифференциальные операторы $L_j=\sum\limits_{i=1}^{n}L_{ij}(x)\partial_{x_j},\ \forall x\in\mathbb{K}^n,\ j=\overline{1,m}$; 2) линейные векторные поля $L_j(x)=(L_{1j}(x),\ldots,L_{nj}(x)),\ \forall x\in\mathbb{K}^n,\ j=\overline{1,m}$; 3) вполне разрешимую линейную автономную систему уравнений в полных дифференциалах $dx=\sum\limits_{j=1}^{m}L_j(x)dt_j$, где

$$
L_{ij}(x)=\partial_{t_j}(A(t)x)_i|_{t=t^0},\ i=\overline{1,n},j=\overline{1,m},
\tag{2.13}
$$

а $(\cdot)_i$ есть i–я проекция вектора $(\cdot)$. В силу $A(t^0) = I$ и (2.13) получаем представление $A(t) = exp\left(\sum\limits_{j=1}^{m} B_j(t_j - t_j^0)\right)x,\ \forall x \in \mathbb{K}^n,\ \forall t \in \mathbb{K}^m$, где перестановочные между собой (при $m > 1$) постоянные матрицы $B_j = ln\ A(t_1^0, \ldots, t_{j-1}^0, t_j^0 + 1, t_{j+1}^0, \ldots, t_m^0),\ j = \overline{1, m}$. В силу теорем 1.5, 1.6 и 2.6 линейное невырожденное m–параметрическое семейство биголоморфизмов (вещественное или комплексное) (1.13) и соответствующая ему линейная невырожденная многомерная дискретная динамическая система, образованная невырожденными линейными отображениями $exp(B_j)x,\ \forall x \in \mathbb{K}^n,\ j = \overline{1, m}$, имеют общий базис невырожденных абсолютных инвариантов. Далее на основании результатов пунктов 9 и 11 мы строим базис невырожденных абсолютных инвариантов для линейного невырожденного m–параметрического семействоа биголоморфизмов (1.13).

14. Базис невырожденных абсолютных инвариантов дробно–линейных невырожденных многопараметрических семейств многомерных дискретных динамических систем. Рассмотрим комплексное дробно–линейное невырожденное m–параметрическое семейство биголоморфизмов

$$A(t)x,\ \forall x \in \mathbb{K}P^n,\ \forall t \in \mathbb{K}^m,\ A(t^0) = I,\ t^0 \in \mathbb{K}^m,\ 1 \leqslant m < n, \tag{1.14}$$

и соответствующие ему: 1) коммутирующие между собой и линейно несвязанные почти везде на $\mathbb{K}P^n$ (при $m > 1$) линейные дифференциальные операторы $L_j = \sum\limits_{i=1}^{n} L_{ij}(x)\partial_{x_j},\ \forall x \in \mathbb{K}P^n,\ j = \overline{1, m}$; 2) дробно–линейные векторные поля $L_j(x) = (L_{1j}(x), \ldots, L_{nj}(x)),\ \forall x \in \mathbb{K}P^n,\ j = \overline{1, m}$; 3) вполне разрешимую дробно–линейную автономную систему уравнений в полных дифференциалах $dx = \sum\limits_{j=1}^{m} L_j(x)dt_j$, где

$$L_{ij}(x) = \partial_{t_j}(A(t)x)_i|_{t=t^0},\ i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}. \tag{2.14}$$

Как и в предыдущем пункте, на основании $A(t^0) = I$ и (2.14) получаем представление $A(t) = exp\left(\sum\limits_{j=1}^{m} B_j(t_j - t_j^0)\right)x,\ \forall x \in \mathbb{K}P^n,\ \forall t \in \mathbb{K}^m$, где перестановочные между собой (при $m > 1$) постоянные матрицы $B_j = ln\ A(t_1^0, \ldots, t_{j-1}^0, t_j^0 + 1, t_{j+1}^0, \ldots, t_m^0),\ j = \overline{1, m}$. В силу теорем 1.5, 1.6 и 2.6 дробно–линейное невырожденное m–параметрическое семейство биголоморфизмов (вещественное или комплексное) (1.14) и соответствующая ему дробно–линейная невырожденная многомерная дискретная динамическая система, образованная невырожденными дробно–линейными отображениями $exp(B_j)x, \ \forall x \in \mathbb{K}^n, \ j = \overline{1,m}$, имеют общий базис невырожденных абсолютных инвариантов. И на основании результатов пунктов 10 и 12 мы строим базис невырожденных абсолютных инвариантов для дробно–линейного невырожденного m–параметрического семейства биголоморфизмов (1.14).

В следующих двух пунктах будет проведено расширенное изложение работы [20].

15. Классификации слоений, определяемых комплексными линейными невырожденными многомерными дискретными динамическими системами. Рассмотрим комплексные линейные невырожденные многомерные дискретные динамические системы ($\mathbb{C}\mathrm{L}^1_m$) и ($\mathbb{C}\mathrm{L}^2_m$), образованные невырожденными линейными отображениями $A_j x, \ \forall x \in \mathbb{C}^n, \ j = \overline{1,m}$, и $B_j x, \ \forall x \in \mathbb{C}^n, \ j = \overline{1,m}$, соответственно, где $1 \leqslant m < n$, начало координат O пространства $\mathbb{C}^n$ есть единственная неподвижная точка каждой из этих систем.

Определение 1.15. *Многомерные дискретные динамические системы* ($\mathbb{C}\mathrm{L}^1_m$) *и* ($\mathbb{C}\mathrm{L}^2_m$) *будем называть* **слабо топологически эквивалентными,** *если существует гомеоморфизм $h : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, переводящий слои регулярного слоения (слоения, у которого все слои имеют одинаковую размерность), образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* ($\mathbb{C}\mathrm{L}^1_m$), *в слои регулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* ($\mathbb{C}\mathrm{L}^2_m$).

Определение 2.15. *Многомерные дискретные динамические системы* ($\mathbb{C}\mathrm{L}^1_m$) *и* ($\mathbb{C}\mathrm{L}^2_m$) *будем называть* **сильно топологически эквивалентными,** *если существует гомеоморфизм $h : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, переводящий слои сингулярного слоения (слоения, у которого размерности слоев могут меняться при переходе от точки к точке), образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* ($\mathbb{C}\mathrm{L}^1_m$), *в слои сингулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* ($\mathbb{C}\mathrm{L}^2_m$).

Определение 3.15. *Многомерные дискретные динамические системы* ($\mathbb{C}\mathrm{L}^1_m$) *и* ($\mathbb{C}\mathrm{L}^2_m$) *будем называть* **слабо гладко эквивалентными,** *если существует диффеоморфизм $h : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, переводящий слои регулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* ($\mathbb{C}\mathrm{L}^1_m$), *в слои регулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* ($\mathbb{C}\mathrm{L}^2_m$).

Определение 4.15. *Многомерные дискретные динамические системы* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^1)$ *и* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^2)$ *будем называть* **сильно гладко эквивалентными,** *если существует диффеоморфизм* $h : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, *переводящий слои сингулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^1)$, *в слои сингулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^2)$.

Определение 5.15. *Многомерные дискретные динамические системы* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^1)$ *и* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^2)$ *будем называть* **слабо** $\mathbb{R}$**–голоморфно (т.е. вещественно голоморфно** [21, 22]**) эквивалентными,** *если существует* $\mathbb{R}$–*биголоморфизм* $h : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, *переводящий слои регулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^1)$, *в слои регулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^2)$.

Определение 6.15. *Многомерные дискретные динамические системы* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^1)$ *и* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^2)$ *будем называть* **сильно** $\mathbb{R}$**–голоморфно эквивалентными,** *если существует* $\mathbb{R}$–*биголоморфизм* $h : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, *переводящий слои сингулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^1)$, *в слои сингулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^2)$.

Определение 7.15. *Многомерные дискретные динамические системы* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^1)$ *и* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^2)$ *будем называть* **слабо голоморфно (т.е. комплексно голоморфно) эквивалентными,** *если существует биголоморфизм* $h : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, *переводящий слои регулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^1)$, *в слои регулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^2)$.

Определение 8.15. *Многомерные дискретные динамические системы* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^1)$ *и* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^2)$ *будем называть* **сильно голоморфно эквивалентными,** *если существует биголоморфизм* $h : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, *переводящий слои сингулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^1)$, *в слои сингулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^2)$.

В дальнейшем будем предполагать, что матрицы A_j (матрицы B_j) имеют простую структуру и собственные значения a_{kj} (собственные значения b_{kj}), $k = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$. В силу условий (4.1) матрицы $A_j,\ j = \overline{1,m}$ (матрицы $B_j,\ j = \overline{1,m}$), в совокупности перестановочны. Поэтому с учетом простоты структуры всех указанных матриц системы $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^1)$ и $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^2)$ с помощью невырожденных линейных отображений пространства $\mathbb{C}^n$ приводим к системам $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^3)$ и $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^4)$, образованным невырожденными линейными отображениями $diag\{a_{1j},\ldots,a_{nj}\}x,\ \forall x\in\mathbb{C}^n,\ j=\overline{1,m}$, и $diag\{b_{1j},\ldots,b_{nj}\}x,\ \forall x\in\mathbb{C}^n,\ j=\overline{1,m}$, соответственно.

Определение 9.15. *Матрицы размера $n\times m,\ m<n$, у которых все миноры порядка m отличны от нуля, будем называть* **невырожденными**.

Далее будем рассматривать случай, когда матрицы $||a_{kj}||_{n\times m}$ и $||b_{kj}||_{n\times m}$ невырождены.

На основании теоремы 1.5 и пункта 9 с учетом невырожденности матрицы $||a_{kj}||_{n\times m}$ (матрицы $||b_{kj}||_{n\times m}$) непосредственными вычислениями приходим к выводу, что система $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^3)$ (система $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^4)$ определяет на $\mathbb{C}^n\backslash\Big(\cup_{l=0}^{m-1}L_l\Big)$ (на $\mathbb{C}^n\backslash\Big(\cup_{l=0}^{m-1}M_l\Big)$) регулярное слоение $\mathfrak{F}_r^1$:

$$x_{m+k}\prod_{j=1}^{m}x_j^{\alpha_{kj}}=C_k\neq 0,\ k=\overline{1,n-m},\ \{x_k=0\}\backslash\Big(\cup_{l=0}^{m-1}L_l\Big),\ k=\overline{1,n} \quad (1.15)$$

(регулярное слоение $\mathfrak{F}_r^2$:

$$x_{m+k}\prod_{j=1}^{m}x_j^{\beta_{kj}}=C_k\neq 0,\ k=\overline{1,n-m},\ \{x_k=0\}\backslash\Big(\cup_{l=0}^{m-1}M_l\Big),\ k=\overline{1,n});\ (2.15)$$

и на $\mathbb{C}^n$ сингулярное слоение $\mathfrak{F}_s^1$: $x_{m+k}\prod\limits_{j=1}^{m}x_j^{\alpha_{kj}}=C_k\neq 0,\ k=\overline{1,n-m},\ \{x_k=0\}\backslash\Big(\cup_{l=0}^{m-1}L_l\Big),\ k=\overline{1,n},\ L_l,\ l=\overline{0,m-1}$ (сингулярное слоение $\mathfrak{F}_s^2$: $x_{m+k}\prod\limits_{j=1}^{m}x_j^{\beta_{kj}}=C_k\neq 0,\ k=\overline{1,n-m},\ \{x_k=0\}\backslash\Big(\cup_{l=0}^{m-1}M_l\Big),\ k=\overline{1,n},\ M_l,\ l=\overline{0,m-1}$); где L_l и M_l есть слои комплексной размерности $l,\ l=\overline{0,m-1}$.

Определение 10.15. *Многомерные дискретные динамические системы видов $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^1)$ и $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^3)$ будем называть* **слабо гиперболическими**, *если $\alpha_{kj}\notin\mathbb{Q},\ k=\overline{1,n-m},\ j=\overline{1,m}$, и матрица $||a_{kj}||_{n\times m}$ является невырожденной.*

Отметим, что слабо гиперболические системы видов $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^1)$ и $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^3)$ являются системами общего положения в своем классе. В дальнейшем будем рассматривать только слабо гиперболические многомерные дискретные динамические системы.

Определение 11.15. *Слои слоений $\mathfrak{F}_r^\tau$ и $\mathfrak{F}_s^\tau,\ \tau=\overline{1,2}$, определяемые* *соотношениями из* (1.15) *и* (2.15) *при* $C_k \neq 0,\ k = \overline{1, n-m}$, *будем называть* **регулярными**, *а все остальные слои* – **сингулярными**.

В силу слабой гиперболичности рассматриваемых многомерных дискретных динамических систем при их слабой топологической эквивалентности регулярные слои переходят в регулярные, а сингулярные – в сингулярные. Это вытекает из того, что замыкание каждой гиперповерхности из (1.15) и (2.15) при $C_k \neq 0$ содержит точки, не принадлежащие этой гиперповерхности, $k = \overline{1, n-m}$. Поэтому все рассматриваемые нами слоения являются слабо накрывающими [11], что позволяет применить для их исследования аппарат накрывающих слоений [23]. Кроме того, не умаляя общности, далее будем считать, что при определяющем эквивалентности гомеоморфизме инвариантные комплексные гиперплоскости $x_k = 0$ переходят сами в себя, $k = \overline{1, n}$ (ибо этого всегда можно добиться перенумерованием переменных x).

Удалим из слоения $\mathfrak{F}_s^1$ (слоения $\mathfrak{F}_s^2$) инвариантные комплексные гиперплоскости $x_k = 0,\ k = \overline{1, n}$. В результате получаем слоение-сужение $\mathfrak{F}_*^1$ (слоение-сужение $\mathfrak{F}_*^2$), являющееся накрывающим [23, с. 4] на многообразии $\mathbb{C}^{n-m} \times \Big(\mathbb{C}^m \setminus \cup_{j=1}^m \{x_j = 0\}\Big)$ с фазовым слоем $\mathbb{C}^{n-m}$ и базой $\Big(\mathbb{C}^m \setminus \cup_{j=1}^m \{x_j = 0\}\Big)$ (накрытие вытекает из аналитического задания (1.15) (задания (2.15)). На основании рассуждений, приводимых при доказательстве теоремы 1.2.1 из [23], и представлений (1.15) и (2.15) приходим к выводу, что слабая топологическая эквивалентность систем ($\mathbb{C}\mathrm{L}_m^3$) и ($\mathbb{C}\mathrm{L}_m^4$) эквивалентна топологической эквивалентности накрывающих слоений $\mathfrak{F}_*^1$ и $\mathfrak{F}_*^2$. Кроме того, нетрудно видеть, что из сильной топологической эквивалентности этих систем вытекает топологическая эквивалентность накрывающих слоений $\mathfrak{F}_*^1$ и $\mathfrak{F}_*^2$.

Непосредственными вычислениями получаем, что фазовая группа накрывающего слоения $\mathfrak{F}_*^1$ (накрывающего слоения $\mathfrak{F}_*^2$) определяется на фазовом слое $\mathbb{C}^{n-m}$ образующими линейными отображениями $exp(-2\pi i\alpha_{kj})x_{m+k},\ \forall x_{m+k} \in \mathbb{C},\ k = \overline{1, n-m},\ j = \overline{1, m}$ (линейными отображениями $exp(-2\pi i\beta_{kj})x_{m+k},\ \forall x_{m+k} \in \mathbb{C},\ k = \overline{1, n-m},\ j = \overline{1, m}$). Теперь на основании теоремы 1.2.1 [23], теоремы 2.1.1 [23], теоремы 2.1.2 [23], леммы 3 [24], а также того, что: 1) начало координат O пространства $\mathbb{C}^n$ есть неподвижная точка всякого гомеоморфизма $h : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, определяющего сильную топологическую эквивалентность рассматриваемых слабо гиперболических систем; 2) в случае топологической эквивалентности накрывающих слоений $\mathfrak{F}_*^1$ и $\mathfrak{F}_*^2$ один из определяющих эту эквивалентность гомеоморфизмов всегда имеет вид

$$x_j^*|x_j|^{\delta_j},\ Re\ \delta_j > -1,\ j=\overline{1,m},\ x_{m+k}^*|x_{m+k}|^{\gamma_k},\ Re\ \gamma_k > -1, \\ k=\overline{1,n-m},\ \forall x \in \mathbb{C}^n; \tag{3.15}$$

где $z = z \vee \overline{z},\ \forall z \in \mathbb{C}$, черта обозначает операцию комплексного сопряжения, получаем следующее утверждение.

Теорема 1.15. *Для сильной топологической эквивалентности слабо гиперболических многомерных дискретных динамических систем* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^3)$ *и* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^4)$ *необходимо (а для слабой топологической эквивалентности и достаточно) существование таких комплексных чисел* γ_k *с* $Re\ \gamma_k > -1,\ k=\overline{1,n-m}$, *что либо* $\beta_{kj} = \varepsilon_j(\alpha_{kj} + i\gamma_{kj} Im\ \alpha_{kj}),\ \varepsilon_j^2 = 1,\ j=\overline{1,m}$; *либо* $\beta_{kj} = \varepsilon_j(-\overline{\alpha}_{kj} + i\gamma_{kj} Im\ \alpha_{kj}),\ \varepsilon_j^2 = 1;\ j=\overline{1,m}$.

Предположим, что выполняется первая серия условий теоремы 1.15 при $\varepsilon_j = 1,\ j=\overline{1,m},\ k \in \{1,\ldots,n-m\}$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Непосредственными вычислениями убеждаемся, что гомеоморфизм $x_j|x_j|^{\delta_{kj}},\ j=\overline{1,m},\ x_{m+l}|x_{m+l}|^{\gamma_l},\ l \neq k,\ x_{m+k}|x_{m+k}|^{\gamma_k}\prod_{j=1}^k x_j^{\alpha_{kj}}|x_j^{\alpha_{kj}}|^{\gamma_k}(x_j|x_j|^{\delta^{kj}})^{-\beta_{kj}},\ \forall x \in \mathbb{C}^n$, где $\delta_{kj} = (\alpha_{kj} + \gamma_k Re\ \alpha_{kj})\beta_{kj}^{-1} - 1,\ j=\overline{1,m}$, определяет сильную топологическую эквивалентность сингулярных слоений, порожденных однопараметрическими семействами из (1.15) и (2.15) при рассматриваемом нами фиксированном $k \in \{1,\ldots,n-m\}$. В самом деле, на основании введенных соотношений для и первой серии условий теоремы 1.15 имеем, что: 1) знак $sgn\ Re\ (\delta_{kj}+1) = sgn\ Re\ ((\alpha_{kj} + \gamma_k Re\ \alpha_{kj})(\alpha_{kj} + i\gamma_k Im\ \alpha_{kj})^{-1}) = sgn\ Re\ ((\alpha_{kj} + \gamma_k Re\ \alpha_{kj})(\overline{\alpha_{kj} + i\gamma_k Im\ \alpha_{kj}})) = sgn\ ((1 + Re\ \gamma_k)(Re^2\ \alpha_{kj} + Im^2\ \alpha_{kj})) = +1$, а значит, $Re\ \delta_{kj} > -1,\ j=\overline{1,m}$; 2) $\beta_{kj} ln\ x_j + \beta_{kj}\delta_{kj} Re\ ln\ x_j \equiv (\alpha_{kj} + i\gamma_k Im\ \alpha_{kj}) ln\ x_j + \gamma_k(Re\ \alpha_{kj} - iIm\ \alpha_{kj}) Re\ ln\ x_j \equiv \alpha_{kj} ln\ x_j + \gamma_k Re\ (\alpha_{kj} ln\ x_j)$, и поэтому $x_j^{\alpha_{kj}}|x_j^{\alpha_{kj}}|(x_j|x_j|^{\delta_{kj}})^{-\beta_{kj}} \equiv 1,\ j=\overline{1,m}$. Учитывая, что при сильной топологической эквивалентности слабо гиперболических многомерных дискретных динамических систем $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^3)$ и $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^4)$ один из определяющих эту эквивалентность гомеоморфизмов всегда имеет вид (3.15), с учетом приведенного и аналитических заданий (1.15) и (2.15) на основании теоремы 1.2.1 [23] делаем такие выводы.

Теорема 2.15. *Для сильной топологической эквивалентности слабо гиперболических многомерных дискретных динамических систем* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^3)$ *и* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^4)$ *необходимо и достаточно существования таких комплексных чисел* γ_k *с* $Re\ \gamma_k > -1,\ k=\overline{1,n-m}$, *что либо* $\beta_{kj} = \alpha_{kj} + i\gamma_{kj} Im\ \alpha_{kj},\ \delta_{kj} = (\alpha_{kj} + \gamma_k Re\ \alpha_{kj})\beta_{kj}^{-1} - 1\ j=\overline{1,m}$; *либо* $\beta_{kj} = -\overline{\alpha}_{kj} + i\gamma_{kj} Im\ \alpha_{kj},\ \delta_{kj} =$

$(-\overline{\alpha}_{kj}+\gamma_k Re\ \alpha_{kj})\beta_{kj}^{-1}-1,\ k=\overline{1,n-m},\ j=\overline{1,m};\ \delta_{kj}=\delta_{lj},\ k=\overline{1,n-m},\ l=\overline{1,n-m},\ j=\overline{1,m}.$

На основании теорем 2.4.1 и 2.4.2 из [23] аналогично предыдущему получаем утверждения.

Теорема 3.15. *Для слабой гладкой ($\mathbb{R}$–голоморфной) эквивалентности слабо гиперболических многомерных дискретных динамических систем* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^3)$ *и* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^4)$ *необходимо и достаточно, чтобы либо* $\beta_{kj}=\varepsilon_j\alpha_{kj},\ \varepsilon_j^2=1,\ j=\overline{1,m};$ *либо* $\beta_{kj}=-\varepsilon_j\overline{\alpha}_{kj},\ \varepsilon_j^2=1,\ j=\overline{1,m};\ k=\overline{1,n-m}.$

Теорема 4.15. *Для сильной гладкой ($\mathbb{R}$–голоморфной) эквивалентности слабо гиперболических многомерных дискретных динамических систем* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^3)$ *и* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^4)$ *необходимо и достаточно, чтобы либо* $\beta_{kj}=\alpha_{kj},\ k=\overline{1,n-m},\ j=\overline{1,m};$ *либо* $\beta_{kj}=-\overline{\alpha}_{kj},\ k=\overline{1,n-m},\ j=\overline{1,m}.$

Теорема 5.15. *Для слабой голоморфной эквивалентности слабо гиперболических многомерных дискретных динамических систем* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^3)$ *и* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^4)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\beta_{kj}=\varepsilon_j\alpha_{kj},\ \varepsilon_j^2=1,\ j=\overline{1,m},\ k=\overline{1,n-m}.$

Теорема 6.15. *Для сильной голоморфной эквивалентности слабо гиперболических многомерных дискретных динамических систем* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^3)$ *и* $(\mathbb{C}\mathrm{L}_m^4)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\beta_{kj}=\alpha_{kj},\ k=\overline{1,n-m},\ j=\overline{1,m}.$

16. Классификации слоений, определяемых комплексными дробно–линейными невырожденными многомерными дискретными динамическими системами. Рассмотрим комплексные линейные невырожденные многомерные дискретные динамические системы $(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^1)$ и $(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^2)$, образованные невырожденными дробно–линейными отображениями $C_jx,\ \forall x\in\mathbb{C}P^n,\ j=\overline{1,m}$, и $D_jx,\ \forall x\in\mathbb{C}P^n,\ j=\overline{1,m}$, соответственно, где $1\leqslant m<n$, каждая из этих систем имеет ровно $n+1$ неподвижных точек на $\mathbb{C}P^n$.

Определение 1.16. *Многомерные дискретные динамические системы* $(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^1)$ *и* $(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^2)$ *будем называть* **слабо топологически эквивалентными,** *если существует гомеоморфизм* $h:\mathbb{C}P^n\to\mathbb{C}P^n$*, переводящий слои регулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* $(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^1)$*, в слои регулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* $(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^2)$*.*

Определение 2.16. *Многомерные дискретные динамические системы* $(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^1)$ *и* $(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^2)$ *будем называть* **сильно топологически эквивалентными,** *если существует гомеоморфизм* $h:\mathbb{C}P^n\to\mathbb{C}P^n$*, переводящий слои* *сингулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^1_m$), *в слои сингулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^2_m$).

Определение 3.16. *Многомерные дискретные динамические системы* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^1_m$) *и* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^2_m$) *будем называть* **слабо гладко эквивалентными,** *если существует диффеоморфизм* $h : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$, *переводящий слои регулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^1_m$), *в слои регулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^2_m$).

Определение 4.16. *Многомерные дискретные динамические системы* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^1_m$) *и* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^2_m$) *будем называть* **сильно гладко эквивалентными,** *если существует диффеоморфизм* $h : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$, *переводящий слои сингулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^1_m$), *в слои сингулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^2_m$).

Определение 5.16. *Многомерные дискретные динамические системы* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^1_m$) *и* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^2_m$) *будем называть* **слабо $\mathbb{R}$–голоморфно эквивалентными,** *если существует $\mathbb{R}$–биголоморфизм* $h : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$, *переводящий слои регулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^1_m$), *в слои регулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^2_m$).

Определение 6.16. *Многомерные дискретные динамические системы* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^1_m$) *и* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^2_m$) *будем называть* **сильно $\mathbb{R}$–голоморфно эквивалентными,** *если существует $\mathbb{R}$–биголоморфизм* $h : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$, *переводящий слои сингулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^1_m$), *в слои сингулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^2_m$).

Определение 7.16. *Многомерные дискретные динамические системы* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^1_m$) *и* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^2_m$) *будем называть* **слабо голоморфно эквивалентными,** *если существует биголоморфизм* $h : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$, *переводящий слои регулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^1_m$), *в слои регулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^2_m$).

Определение 8.16. *Многомерные дискретные динамические системы* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^1_m$) *и* ($\mathbb{C}\mathrm{PL}^2_m$) *будем называть* **сильно голоморфно эквивалентными,** *если существует биголоморфизм* $h : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$, *переводящий слои* *сингулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* $(\mathbb{C}\mathrm{PL}^1_m)$, *в слои сингулярного слоения, образованного базисом невырожденных абсолютных инвариантов системы* $(\mathbb{C}\mathrm{PL}^2_m)$.

Дальнее будем предполагать, что матрицы C_j (матрицы D_j) имеют простую структуру и собственные значения c_{kj} (собственные значения d_{kj}), $k=\overline{1,n+1},\ j=\overline{1,m}$. В силу условий (4.1) матрицы $C_j,\ j=\overline{1,m}$ (матрицы $D_j,\ j=\overline{1,m}$), в совокупности перестановочны. Поэтому с учетом простоты структуры всех указанных матриц системы $(\mathbb{C}\mathrm{PL}^1_m)$ и $(\mathbb{C}\mathrm{PL}^2_m)$ с помощью невырожденных дробно–линейных отображений пространства $\mathbb{C}P^n$ приводим к системам $(\mathbb{C}\mathrm{PL}^3_m)$ и $(\mathbb{C}\mathrm{PL}^4_m)$, образованным невырожденными дробно–линейными отображениями $diag\{c_{1j},\ldots,c_{nj}\}x,\ \forall x\in\mathbb{C}P^n,\ j=\overline{1,m}$, и $diag\{d_{1j},\ldots,d_{nj}\}x,\ \forall x\in\mathbb{C}P^n,\ j=\overline{1,m}$, соответственно.

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда матрицы $||c_{kj}||_{(n+1)\times m}$ и $||d_{kj}||_{(n+1)\times m}$ невырождены.

На основании теоремы 1.5 и пункта 11 с учетом невырожденности матрицы $||c_{kj}||_{(n+1)\times m}$ (матрицы $||d_{kj}||_{(n+1)\times m}$) непосредственными вычислениями приходим к выводу, что система $(\mathbb{C}\mathrm{PL}^3_m)$ (система $(\mathbb{C}\mathrm{PL}^4_m)$ определяет на $\mathbb{C}P^n\backslash\Big(\cup_{l=0}^{m-1}L_l\Big)$ (на $\mathbb{C}P^n\backslash\Big(\cup_{l=0}^{m-1}M_l\Big)$) регулярное слоение $P\mathfrak{F}^1_r$:

$$\begin{gathered}\frac{x_{m+k}}{x_{n+1}}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{x_j}{x_{n+1}}\right)^{\alpha_{kj}}=C_k\neq 0,\ k=\overline{1,n-m},\\ \{x_k=0\}\backslash\Big(\cup_{l=0}^{m-1}L_l\Big),\ k=\overline{1,n+1}\end{gathered}\tag{1.16}$$

(регулярное слоение $P\mathfrak{F}^2_r$:

$$\begin{gathered}\frac{x_{m+k}}{x_{n+1}}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{x_j}{x_{n+1}}\right)^{\beta_{kj}}=C_k\neq 0,\ k=\overline{1,n-m},\\ \{x_k=0\}\backslash\Big(\cup_{l=0}^{m-1}L_l\Big),\ k=\overline{1,n+1}\end{gathered}\tag{2.16}$$

и на $\mathbb{C}P^n$ сингулярное слоение $P\mathfrak{F}^1_s$: $\dfrac{x_{m+k}}{x_{n+1}}\displaystyle\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{x_j}{x_{n+1}}\right)^{\alpha_{kj}}=C_k\neq 0,\ k=\overline{1,n-m},\ \{x_k=0\}\backslash\Big(\cup_{l=0}^{m-1}L_l\Big),\ k=\overline{1,n+1},\ L_l,\ l=\overline{0,m-1}$ (сингулярное слоение $P\mathfrak{F}^2_s$: $\dfrac{x_{m+k}}{x_{n+1}}\displaystyle\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{x_j}{x_{n+1}}\right)^{\beta_{kj}}=C_k\neq 0,\ k=\overline{1,n-m},\ \{x_k=0\}\backslash\Big(\cup_{l=0}^{m-1}M_l\Big),\ k=\overline{1,n},\ M_l,\ l=\overline{0,m-1}$); где L_l и M_l есть слои комплексной размерности $l,\ l=\overline{0,m-1}$.

Определение 9.16. *Многомерные дискретные динамические системы видов* $(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^1)$ *и* $(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^3)$ *будем называть* **слабо гиперболическими**, *если* $\alpha_{kj} \notin \mathbb{Q},\ k=\overline{1,n-m},\ j=\overline{1,m}$, *и матрица* $||c_{kj}||_{(n+1)\times m}$ *является невырожденной.*

Слабо гиперболические системы видов $(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^1)$ и $(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^3)$ являются системами общего положения в своем классе. Далее будем рассматривать только слабо гиперболические многомерные дискретные динамические системы.

Определение 10.16. *Слои слоений* $P\mathfrak{F}_r^\tau$ *и* $P\mathfrak{F}_s^\tau,\ \tau=\overline{1,2}$, *определяемые соотношениями из* (1.16) *и* (2.16) *при* $C_k \neq 0,\ k=\overline{1,n-m}$, *будем называть* **регулярными**, *а все остальные слои –* **сингулярными**.

В силу слабой гиперболичности рассматриваемых многомерных дискретных динамических систем при их слабой топологической эквивалентности регулярные слои переходят в регулярные, а сингулярные – в сингулярные (данный факт доказывается аналогичным образом, как и в предыдущем пункте). Поэтому, как и ранее, не умаляя общности, будем считать, что при определяющем эквивалентности гомеоморфизме h инвариантные комплексные многообразия $x_k=0$ переходят сами в себя, $k=\overline{1,n+1}$.

Удалим из слоения $P\mathfrak{F}_s^1$ (слоения $P\mathfrak{F}_s^2$) инвариантные комплексные многообразия $x_k=0,\ k=\overline{1,n}$, и $x_{n+1}=0$. В результате получаем слоение-сужение $P\mathfrak{F}_*^1$ (слоение-сужение $P\mathfrak{F}_*^2$), являющееся накрывающим на многообразии $\mathbb{C}P^n \setminus \Big(\cup_{j=1}^m\{x_j=0\}\cup\{x_{n+1}=0\}\Big)$, определяемое семейством функций $x_{m+k}=C_k x_{n+1}\prod\limits_{j=1}^m\left(\dfrac{x_j}{x_{n+1}}\right)^{-\alpha_{kj}},\ x_j\neq 0,\ j=\overline{1,m},\ x_{n+1}\neq 0,\ k=\overline{1,n-m}$ (семейством функций $x_{m+k}=C_k x_{n+1}\prod\limits_{j=1}^m\left(\dfrac{x_j}{x_{n+1}}\right)^{-\beta_{kj}},\ x_j\neq 0,\ j=\overline{1,m},\ x_{n+1}\neq 0,\ k=\overline{1,n-m}$). Фазовая группа накрывающего слоения $P\mathfrak{F}_*^1$ (накрывающего слоения $P\mathfrak{F}_*^2$) определяется независимыми образующими отображениями $exp(-2\pi i\alpha_{kj})x_{m+k},\ \forall x_{m+k}\in\mathbb{C},\ k=\overline{1,n-m},\ j=\overline{1,m}$ (отображениями $exp(-2\pi i\beta_{kj})x_{m+k},\ \forall x_{m+k}\in\mathbb{C},\ k=\overline{1,n-m},\ j=\overline{1,m}$). Теперь с учетом образования накрывающих слоений $\mathfrak{F}_*^1$ и $\mathfrak{F}_*^2$, рассуждениями, аналогичными проведенным в предыдущем пункте, принимая во внимание однородность координат x, на основании теорем 3.1.1, 3.1.2, 3.3.1 – 3.3.4 из [23] получаем такие утверждения.

Теорема 1.16. *Для слабой топологической эквивалентности слабо гиперболических многомерных дискретных динамических систем* $(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^3)$ *и*

$(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^4)$ *необходимо и достаточно существования такого комплексного числа* γ *с* $Re\ \gamma > -1$*, что либо* $\beta_{kj} = \varepsilon_j(\alpha_{kj} + i\gamma Im\ \alpha_{kj}),\ \varepsilon_j^2 = 1,\ \delta_{kj} = (\alpha_{kj} + \gamma Re\ \alpha_{kj})\beta_{kj}^{-1} - 1,\ k = \overline{1, n-m},\ j = \overline{1, m}$*; либо* $\beta_{kj} = \varepsilon_j(-\overline{\alpha}_{kj} + i\gamma Im\ \alpha_{kj}),\ \varepsilon_j^2 = 1,\ \delta_{kj} = (-\overline{\alpha}_{kj} + \gamma Re\ \alpha_{kj})\beta_{kj}^{-1} - 1,\ k = \overline{1, n-m},\ j = \overline{1, m};\ \gamma = \delta_{kj} = \delta_{lj},\ k = \overline{1, n-m},\ l = \overline{1, n-m},\ j = \overline{1, m}.$

Теорема 2.16. *Для сильной топологической эквивалентности слабо гиперболических многомерных дискретных динамических систем* $(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^3)$ *и* $(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^4)$ *необходимо и достаточно существования такого комплексного числа* γ *с* $Re\ \gamma > -1$*, что либо* $\beta_{kj} = \alpha_{kj} + i\gamma Im\ \alpha_{kj},\ \delta_{kj} = (\alpha_{kj} + \gamma Re\ \alpha_{kj})\beta_{kj}^{-1} - 1,\ k = \overline{1, n-m},\ j = \overline{1, m}$*; либо* $\beta_{kj} = -\overline{\alpha}_{kj} + i\gamma Im\ \alpha_{kj},\ \delta_{kj} = (-\overline{\alpha}_{kj} + \gamma Re\ \alpha_{kj})\beta_{kj}^{-1} - 1,\ k = \overline{1, n-m},\ j = \overline{1, m};\ \gamma = \delta_{kj} = \delta_{lj},\ k = \overline{1, n-m},\ l = \overline{1, n-m},\ j = \overline{1, m}.$

Теорема 3.16. *Для слабой гладкой ($\mathbb{R}$–голоморфной) эквивалентности слабо гиперболических многомерных дискретных динамических систем* $(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^3)$ *и* $(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^4)$ *необходимо и достаточно, чтобы либо* $\beta_{kj} = \varepsilon_j\alpha_{kj},\ \varepsilon_j^2 = 1,\ j = \overline{1, m}$*; либо* $\beta_{kj} = -\varepsilon_j\overline{\alpha}_{kj},\ \varepsilon_j^2 = 1,\ j = \overline{1, m};\ k = \overline{1, n-m}.$

Теорема 4.16. *Для сильной гладкой ($\mathbb{R}$–голоморфной) эквивалентности слабо гиперболических многомерных дискретных динамических систем* $(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^3)$ *и* $(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^4)$ *необходимо и достаточно, чтобы либо* $\beta_{kj} = \alpha_{kj},\ k = \overline{1, n-m},\ j = \overline{1, m}$*; либо* $\beta_{kj} = -\overline{\alpha}_{kj},\ k = \overline{1, n-m},\ j = \overline{1, m}.$

Теорема 5.16. *Для слабой голоморфной эквивалентности слабо гиперболических многомерных дискретных динамических систем* $(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^3)$ *и* $(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^4)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\beta_{kj} = \varepsilon_j\alpha_{kj},\ \varepsilon_j^2 = 1,\ j = \overline{1, m},\ k = \overline{1, n-m}.$

Теорема 6.16. *Для сильной голоморфной эквивалентности слабо гиперболических многомерных дискретных динамических систем* $(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^3)$ *и* $(\mathbb{C}\mathrm{PL}_m^4)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\beta_{kj} = \alpha_{kj},\ k = \overline{1, n-m},\ j = \overline{1, m}.$

17. Классификации слоений, определяемых комплексными линейными невырожденными многопараметрическими семействами многомерных дискретных динамических систем общего положения проводятся на основании результатов пункта 15 и пункта 13 при $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, а **классификации слоений, определяемых комплексными дробно–линейными невырожденными многопараметрическими семействами многомерных дискретных динамических систем** общего положения проводятся на основании результатов пункта 16 и пункта 14 при $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Отметим, что слабая топологическая эквивалентность вполне разрешимых линейных автономных дифференциальных систем, соответствующих комплексным линейным невырожденным многопараметрическим семействам многомерных дискретных динамических систем общего положения, проводилась в [25]. При $m = 1$ сильная топологическая эквивалентность систем линейных автономных обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующих комплексным линейным невырожденным многопараметрическим семействам многомерных дискретных динамических систем общего положения, была проводена в [26 – 30]; а сильная топологическая эквивалентность систем дробно–линейных автономных обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующих комплексным дробно–линейным невырожденным многопараметрическим семействам многомерных дискретных динамических систем общего положения, изучалась в [30].

18. Компактные инвариантные многообразия вещественных многомерных дискретных динамических систем. Рассмотрим вещественную многомерную дискретную динамическую систему $(\mathbb{R}\mathrm{D}_m)$, образованную диффеоморфизмами

$$f_j : U \to \mathbb{R}^n, \ j = \overline{1, m}, \ 1 \leqslant m < n. \tag{1.18}$$

Определение 1.18. Компактными инвариантными многообразиями *вещественной многомерной дискретной динамической системы* $(\mathbb{R}\mathrm{D}_m)$ *будем называть компактные инвариантные кусочно–гладкие многообразия.*

Определение 2.18. *Изолированную компактную инвариантную гиперповерхность вещественной многомерной дискретной динамической системы* $(\mathbb{R}\mathrm{D}_m)$ *будем называть* **регулярной**, *если данная гиперповерхность является в каждой из двух определяемых ей полуокрестностей локально притягивающей или локально отталкивающей.*

Рассмотрим задачу об оценке сверху максимального числа возможных компактных инвариантных гиперповерхностей для системы $(\mathbb{R}\mathrm{D}_m)$.

Лемма 1.18. *Пусть область* $G \subset U$ *имеет гомотопическую группу* $\pi_{n-1}(G)$ *ранга* $d(\pi_{n-1}(G)) = r$ *и существует такая непрерывная функция* $\mu : G \to \mathbb{R}$, *что функция*

$$\mu(f(x)) \; det \; D(f_j(x)) - \mu(x), \ j \in \{1, \ldots, m\}, \tag{2.18}$$

является знакопостоянной на G. *Тогда во всякой области* $\Lambda \subset G$ *с гомотопической группой* $\pi_{n-1}(\Lambda)$ *ранга* $d(\pi_{n-1}(\Lambda)) = s \leqslant r$ *относительно компактных инвариантных гиперповерхностей вещественной многомерной дискретной динамической системы* $(\mathbb{R}\mathrm{D}_m)$ *невозможна такая ситу-*

ация: всякая из s лакун содержится внутри своей компактной инвариантной гиперповерхности $\partial V_1, \ldots, \partial V_s$, компактная инвариантная гиперповерхность ∂V_{s+1} содержит внутри себя эти s лакун, причем гиперповерхности $\partial V_1, \ldots, \partial V_s$ не пересекаются, не содержатся друг в друге и все целиком располагаются внутри гиперповерхности ∂V_{s+1}.

Доказательство. Пусть описанная в лемме ситуация имеет место. Обозначим через V область, ограниченную гиперповерхностью $\partial V = \bigcup\limits_{l=1}^{s+1} \partial V_l$. На основании формулы замены переменных в кратном интеграле имеем, что $\int\limits_V \mu(x)dx = \int\limits_V \mu(f_j(x))\ det\ D(f_j(x))dx$. Но это равенство невозможно в силу знакопостоянности функции (12.18) на замыкании области V. Это противоречие и доказывает лемму.

Теорема 1.18. *Пусть выполняются условия леммы* 1.18. *Тогда в области G вещественная многомерная дискретная динамическая системы $(\mathbb{R}\mathrm{D}_m)$ может иметь не более r компактных инвариантных гиперповерхностей.*

Доказательство теоремы 1.18 основано на лемме 1.18 и согласовано с доказательствами теоремы 18 из [31] и теоремы 1 из [12, с. 319].

Лемма 2.18. *Пусть область $G \subset U$ имеет гомотопическую группу $\pi_{n-1}(G)$ ранга $d(\pi_{n-1}(G)) = r$ и существует такая непрерывная знакопостоянная функция $\mu : G \to \mathbb{R}$, что*

$$\mu(f(x))\ det\ D(f_j(x)) - \mu(x) = 0,\ \forall x \in G,\ j \in \{1, \ldots, m\}. \tag{3.18}$$

Тогда во всякой области $\Lambda \subset G$ с гомотопической группой $\pi_{n-1}(\Lambda)$ ранга $d(\pi_{n-1}(\Lambda)) = s \leqslant r$ относительно компактных инвариантных гиперповерхностей вещественной многомерной дискретной динамической системы $(\mathbb{R}\mathrm{D}_m)$ невозможна ситуация, описанная в лемме 1.18.

Доказательство. Пусть имеет место ситуация, описанная в лемме. Так как ∂V_{s+1} – изолированная регулярная компактная инвариантная гиперповерхность системы $(\mathbb{R}\mathrm{D}_m)$, то в достаточно малой ее окрестности снаружи при $k \to +\infty,\ k \in \mathbb{N}$, траектории системы $(\mathbb{R}\mathrm{D}_m)$, определяемые диффеоморфизмами $f_j^k : G \to G$, стремятся к ∂V_{s+1} (удаляются от ∂V_{s+1}), а также существует такая гиперповерхность ∂W, гомеоморфная гиперповерхности ∂V_{s+1}, что траектории, проходящие через нее, входят в область W (выходят из области W), ограниченную гиперповерхностями ∂W и ∂V_{s+1}. Через W^* обозначим образ области W при диффеоморфизме $f_j : G \to G$. Тогда $\int\limits_W \mu(x)dx \neq \int\limits_{W^*} \mu(x)dx$ и $\int\limits_V \mu(x)dx = \int\limits_{W^*} \mu(f_j(x))\ det\ J(f_j(x))dx$. Однако, в силу (3.18) имеем, что $\int\limits_{W^*} \mu(x)dx = \int\limits_{W^*} \mu(f_j(x))\ det\ J(f_j(x))dx$. Поэтому $\int\limits_W \mu(x)dx = \int\limits_{W^*} \mu(x)dx$. Полученное противоречие и доказывает лемму 2.18.

Теорема 2.18. *Пусть выполняются условия леммы* 2.18. *Тогда в области G вещественная многомерная дискретная динамическая системы* ($\mathbb{R}\mathrm{D}_m$) *может иметь не более r изолированных регулярных компактных инвариантных гиперповерхностей.*

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.18 и основано на лемме 2.18.

Следствие 1.18. *Вещественная многомерная дискретная динамическая системы* ($\mathbb{R}\mathrm{D}_m$) *на* $\mathbb{R}^n$ *не имеет изолированных регулярных компактных инвариантных гиперповерхностей, если хотя бы один образующий ее диффеоморфизм из* (1.18) *является полиномиальным.*

Доказательство проводится на основании свойств теорем 1.18 и 2.18, если положить $\mu(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ (с учетом свойств матрицы Якоби обратного отображения).

Следствие 2.18. *Вещественная многомерная дискретная динамическая система* ($\mathbb{R}\mathrm{D}_m$) *на* $\mathbb{R}^n$ *не имеет изолированных регулярных компактных инвариантных гиперповерхностей, если хотя бы один образующий ее диффеоморфизм из* (1.18) *является линейным.*

Следствие 3.18. *Вещественная линейная многомерная дискретная динамическая система* ($\mathbb{R}\mathrm{L}_m$) *на* $\mathbb{R}^n$ *не имеет изолированных регулярных компактных инвариантных гиперповерхностей.*

Отметим, что в случае $m = 1$ теоремы 1.18, 2.18 и следствие 3.18 получены в [32].

Рассмотрим теперь вещественную многомерную дискретную динамическую систему ($\mathbb{R}\mathrm{D}_m$) при $n > 3$.

Пусть Ω есть ν–мерное ($3 \leqslant \nu \leqslant n-1$) компактное инвариантное многообразие системы ($\mathbb{R}\mathrm{D}_m$). Обозначим через $\mathbb{R}^\nu_{\xi_1\ldots\xi_\nu}$ подпространтсво пространства $\mathbb{R}^n$, образованное базисными координатами $x_{\xi_k},\ k = \overline{1,\nu}$, а через $\Omega_{\xi_1\ldots\xi_\nu}$ – проекцию многообразия Ω на подпространство $\mathbb{R}^\nu_{\xi_1\ldots\xi_\nu}$. Заметим, что среди всех ν–мерных подпространств $\mathbb{R}^\nu$, образованных на основании ν координат из базиса $x_i,\ i = \overline{1,n}$, существует хотя бы одно, в котором многообразие $\Omega_{\xi_1\ldots\xi_\nu}$ имеет размерность $dim\ \Omega_{\xi_1\ldots\xi_\nu} = \nu$. Теперь с учетом инвариантности многообразия Ω (а, значит, и всех многообразий вида $\Omega_{\xi_1\ldots\xi_\nu}$) аналогично теореме 1.18 приходим к следующему утверждению, в котором через $J_{\xi_1\ldots\xi_\nu}(f_j(x))$ обозначены определители миноров, полученных из матрицы Якоби $D\ f_j(x)$ путем вычеркивания всех строк и столбцов, номера которых отличны от $\xi_1,\ldots,\xi_\nu$.

Теорема 3.18. *Пусть область* $G\subset U$ *при* $3\leqslant\nu\leqslant n-1$ *имеет гомотопическую группу* $\pi_\nu(G)$ *ранга* $d(\pi_\nu(G))=r$ *и существуют такие непрерывные функции* $\mu_{\xi_1\ldots\xi_\nu}: G\to\mathbb{R}$, *что функции* $\mu_{\xi_1\ldots\xi_\nu}(f_j(x))\ J_{\xi_1\ldots\xi_\nu}(f_j(x))-\mu_{\xi_1\ldots\xi_\nu}(x),\ j\in\{1,\ldots,m\}$, *являются знакопостоянными на* G, *где* $\xi_1,\ldots,\xi_\nu$ *есть все выборки* ν*–размерности из* n *чисел. Тогда в области* G *вещественная многомерная дискретная динамическая система* ($\mathbb{R}\mathrm{D}_m$) *может иметь не более* r *компактных инвариантных многообразий размерности* $\nu-1$.

19. Компактные инвариантные многообразия вещественных многопараметрических семейств многомерных дискретных динамических систем. Рассмотрим вещественное m–параметрическое ($1\leqslant m<n$) дважды гладкое семейство диффеоморфизмов (1.2). Как и во втором пункте, на основании этого семейства строим вспомогательные коммутирующие между собой (при $m>1$) линейные дифференциальные операторы (2.2), а также соответствующие им векторные поля (3.2) и вполне разрешимую (при $m>1$) автономную систему уравнений в полных дифференциалах (4.2). Непосредственными вычислениями на основании семейства (1.2) и соотношений, определяющих линейные дифференциальные операторы (2.2), векторные поля (3.2) и дифференциальную систему (4.2), аналогично [33, с. 90 – 91] для гладкой функции μ получаем соотношение

$$\begin{gathered}\mu(f(x,t))\ det\ D(f(x,t))-\mu(x)=\\=\sum_{j=1}^{m}div\ \{\mu(x)F_j(x)\}(t_j-t_j^0)+o(||t-t^0||,\ t\to t^0,\end{gathered}\tag{1.19}$$

где $||\cdot||$ есть некоторая норма на $\mathbb{R}^m$. Теперь на основании (1.19) и теорем 1.6, 1.18, 3.18 получаем такие утверждения.

Теорема 1.19 [12, с. 351]. *Пусть область* $G\subset U$ *имеет гомотопическую группу* $\pi_{n-1}(G)$ *ранга* $d(\pi_{n-1}(G))=r$ *и существует такая гладкая функция* $\mu: G\to\mathbb{R}$, *что функция* $div\ \{\mu(x)F_j(x)\},\ j\in\{1,\ldots,m\}$, *является знакопостоянной на* G. *Тогда в области* G *вещественная дифференциальная система* (4.2) *может иметь не более* r *компактных интегральных гиперповерхностей.*

Теорема 2.19 [12, с. 319]. *Пусть область* $G\subset U$ *при* $3\leqslant\nu\leqslant n-1$ *имеет гомотопическую группу* $\pi_\nu(G)$ *ранга* $d(\pi_\nu(G))=r$ *и существуют такие* *гладкие функции* $\mu_{\xi_1\ldots\xi_\nu} : G \to \mathbb{R}$, *что функции* $div_{\xi_1\ldots\xi_\nu}\{\mu_{\xi_1\ldots\xi_\nu}(x))F_j(x)\},\ j \in \{1,\ldots,m\}$, *являются знакопостоянными на* G, *где* $\xi_1,\ldots,\xi_\nu$ *есть все выборки* ν*–размерности из* n *чисел. Тогда в области* G *вещественная дифференциальная система* (4.2) *может иметь не более* r *компактных интегральных многообразий размерности* $\nu - 1$.

Литература

[1] Cayley A. Mémoire sur les Hyperdéterminants // Journ. reine angew. Math. – 1846. – V. 30. – P. 1 – 37.

[2] Hilbert D. Gesammelte Abhandlungen. Bd. 2. Algebra, Invariantentheorie, Geometrie. Zweite Auflage. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1970. – 453 c.

[3] Laguerre E. Sur les èquations linèaires du troisième ordre // C. r. Acad. sci. – 1879. – V. 88. – P. 116 – 119.

[4] Halphen G. H. Syr la réduction des équations differentielles linéaires aux formes intégrables // mém. prés. par divers savants á l‘ Acad. des Sci. – 1884. – V. 28. – P. 1 – 260.

[5] Liouville R. Sur certaines équations dfférentielles du premier ordre // C. r. Acad. sci. – 1886. – V. 103. – P. 476 – 479.

[6] Appel P. Sur les invariants de quelques équations différentielles // Journ. Math. pures et appl. – 1889. – V. 5. – P. 361 – 423.

[7] Painlevé P. Sur une transformation des équations différentielles du premier ordre // C. r. Acad. sci. – 18906. – V. 110. – P. 840 – 843.

[8] Сибирский К. С. Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений. – Кишинев.: Штиинца, 1982. – 269 с.

[9] Сибирский К. С. Введение в алгебраическую теорию инвариантов дифференциальных уравнений и матриц. – Кишинев.: Штиинца, 1976. – 169 с.

[10] Белицкий Г. Р. Нормальные формы, инварианты и локальные отображения. – Киев.: Наукова думка, 1979. – 254 с.

[11] Горбузов В. Н., Тыщенко В. Ю. О классификации накрывающих слоений // Дифференц. уравнения и процессы управления (http://www.neva.ru/journal). – 2004. – № 4. – С. 1 – 19.

[12] Горбузов В. Н. Интегралы дифференциальных систем. – Гродно: ГрГУ, 2006. – 447 с.

[13] Гайшун И. В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. – Минск: Наука и техника, 1983. – 272 с.

[14] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. – Москва: Наука, 1986. – 760 с.

[15] Немыцкий В. В. К теории орбит общих динамических систем // Математический сборник. – Т. 23, вып. 2. – С. 161 – 186.

[16] Тыщенко В. Ю. Об инвариантах дискретных динамических систем // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 5. – С. 752 – 755.

[17] Белицкий Г. Р., Ткаченко В. А. Аналитическая разрешимость многомерных функциональных уравнений в окрестности неособой точки // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – Вып. 58. – Харьков, 1992. – С. 7 – 21.

[18] Тыщенко В. Ю. Базис абсолютных инвариантов вполне разрешимых линейных и дробно–линейных дискретных динамических систем // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 5. – С. 758 – 760.

[19] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука и техника, 1988. – 550 с.

[20] Тыщенко В. Ю. О классификациях слоений, определяемых комплексными линейными и дробно–линейными дискретными динамическими системами // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 125 – 130.

[21] Горбузов В. Н., Тыщенко В. Ю. $\mathbb{R}$–голоморфные решения уравнения в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 4. – С. 447 – 452.

[22] Горбузов В. Н., Тыщенко В. Ю. Об $\mathbb{R}$–голоморфных решениях системы уравнений в полных дифференциалах // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.–мат. навук. – 1999. – № 3. – С. 124 – 126.

[23] Тыщенко В. Ю. Накрывающие слоения дифференциальных систем. – Гродно: ГрГУ им. Я. Купалы, 2011. – 180 с.

[24] Ладис Н. Н. Об интегральных кривых комплексного однородного уравнения // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 2. – С. 246 – 251.

[25] Горбузов В. Н., Тыщенко В. Ю. Об эквивалентности слоений линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 12. – С. 1596 – 1599.

[26] Guckenheimer J. Hartman's theorem for complex flows in the Poincare domain // Compos. math. – 1972. – V. 24, N 1. – P. 75 – 82.

[27] Ладис Н. Н. Топологические инварианты комплексных линейных по-

токов // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 12. – С. 2159 – 2169.

[28] Ладис Н. Н. Топологическая эквивалентность гиперболических линейных систем // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 255 – 265.

[29] Ильяшенко Ю. С. Замечания о топологии особых точек аналитических дифференциальных уравнений в комплексной области и теорема Ладиса // Функцион. анализ и его приложения. – 1977. – Т. 11, № 2. – С. 28 – 38.

[30] Camacho C., Kuiper N. H., Palis J. The topology of holomorphic flows with singularity. 1 // Publications mathematiques de l'I.H.E.S, Paris. – 1978. – V. 48. – P. 5 – 38.

[31] Горбузов В. Н., Тыщенко В. Ю. Частные интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Матем. сборник. – 1992. – Т. 183, № 3. – С. 76 – 94.

[32] Тыщенко В. Ю. О компактных инвариантных гиперповерхностях дискретных динамических систем // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 7. – С. 1005 – 1006.

[33] Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 2, Ч.2. – М., Л.: ГТТИ, 1933. – 287 с.