ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2011
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Моделирование динамических систем

УДК 517.925.5

Анализ линейной системы с помощью приближенных вычислений[1]

Васильев В.А.

Качественное исследование свойств системы дифференциальных уравнений часто производится при помощи построения приближенных решений этой системы на длинных интервалах времени. Следует отметить, что данный метод исследования может быть использован только, когда в окрестности приближенного решения системы дифференциальных уравнений существует истинное решение этой системы, в противном случае такой метод исследования не позволяет получить никаких новых данных о качественном поведении решений рассматриваемой системы. В связи с этим, встает вопрос о существовании истинного решения в окрестности приближенного.

В этой работе мы продолжим изучение проблемы существования истинного решения в окрестности приближенного рассмотренной в статье [1]. В работе [1] были сформулированы условия, при которых данному приближенному решению системы дифференциальных уравнений соответствует истинное решение, располагающееся в малой окрестности приближенного решения. В настоящей работе будет показано, что приведенные условия могут быть проверены с помощью приближенных вычислений.

1. В работе [1] рассматривалась система дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (проект 2010-1.1-111-128-033) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08-01-00346)

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{X}$ — n-мерные векторы. Здесь относительно вектор-функции $\mathbf{X}$ мы сделаем предположение несколько более стеснительное нежели в работе [1]: будем считать, что она ограничена, равномерно непрерывна по t при $t \in (-\infty, \infty)$, непрерывна по $\mathbf{x}$ при $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ и имеет равномерно непрерывную по t и по $\mathbf{x}$ ограниченную матрицу Якоби $\partial\mathbf{X}/\partial\mathbf{x}$.

Рассматривались приближенные решения системы (1) и было введено определение.

Определение 1.1. Кусочно-гладкая на промежутке J вектор-функция $\mathbf{x} = \psi(t)$ называется δ-решением системы (1.1), если во всех точках промежутка J, в которых существует производная $\dot{\psi}(t)$, выполняется неравенство $|\dot{\psi}(t) - \mathbf{X}(t, \psi(t))| < \delta$. Здесь и далее $|\mathbf{y}|$ — евклидова норма вектора $\mathbf{y}$.

Затем были рассмотрены свойства линейных систем

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}, \tag{2}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, а $\mathbf{P}(t)$ — ограниченная равномерно непрерывная на промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant t'$ матрица размера $n \times n$ ($|\mathbf{P}(t)| < H$, при всех $t_0 \leqslant t \leqslant t'$). Через $\mathbf{\Phi}(t)$ обозначена фундаментальная матрица решений системы (2).

Определение 1.2. Будем говорить, что система (2) $(\lambda_1, \lambda_2, a_1, a_2)$-гиперболична на промежутке J, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ и $a_1, a_2 > 0$ и линейные пространства $U^s(t)$ и $U^u(t)$, определенные на J и такие, что $\dim U^s(t) = k$, $\dim U^u(t) = n - k$, для всех $t \in J$, $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)U^i(\tau) = U^i(t)$, $i = s, u$; $t, \tau \in J$, и если $\xi \in U^s(\tau)$, $\tau \in J$, то выполняется неравенство

$$|\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)\xi| \leqslant a_1|\xi|e^{-\lambda_1(t-\tau)}, \tag{3}$$

при $t \geqslant \tau$; $t, \tau \in J$, а если $\xi \in U^u(\tau)$, то

$$|\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)\xi| \leqslant a_2|\xi|e^{\lambda_2(t-\tau)}, \tag{4}$$

при $t \leqslant \tau$; $t, \tau \in J$.

Из этого определения следует, что если система (2) $(\lambda_1, \lambda_2, a_1, a_2)$-гиперболична на промежутке J, то для $\xi \in U^s(\tau)$

$$|\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)\xi| \geqslant \frac{1}{a_1}|\xi|e^{-\lambda_1(t-\tau)} \tag{5}$$

при $t \leqslant \tau$; $t, \tau \in J$, а если $\xi \in U^u(\tau)$

$$|\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)\xi| \geqslant \frac{1}{a_2}|\xi|e^{\lambda_2(t-\tau)} \tag{6}$$

при $t \geqslant \tau$; $t, \tau \in J$.

Следует отметить, что при введенных выше обозначениях справедлива следующая лемма.

Лемма 1.0. *Если система* (1.2) $(\lambda_1, \lambda_2, a_1, a_2)$*-гиперболична на промежутке* J*, длина которого не менее* $\max\Big(\Big(\ln\Big((H-\lambda_1)/\big((a_1a_2)(H+\lambda_2)\big)\Big)\Big)/(\lambda_1+\lambda_2), \Big(\ln\Big(\big((a_1a_2)(H+\lambda_1)\big)/(H-\lambda_2)\Big)\Big)/(\lambda_1+\lambda_2)\Big)$*, то существует число* κ *такое, что* $\angle(U^s(t), U^u(t)) \geqslant \kappa$ *для всех* $t \in J$*. При этом, если* $\Pi^s(t)$ *и* $\Pi^u(t)$ *проекторы пространства* $\mathbf{R}^n$ *на* $U^s(t)$ *и* $U^u(t)$ *соответственно, то выполняются неравенства*

$$|\Pi^i(t)| < \frac{1}{\sin\kappa}, i = s, u; t \in J. \tag{7}$$

Доказательство. Докажем, что существует такое число $\delta > 0$, что для всякого числа $t_0 \in J$ и любых векторов $\mathbf{x}^s \in U^s(t_0)$, $\mathbf{x}^u \in U^u(t_0)$ таких, что $|\mathbf{x}^s| = |\mathbf{x}^u| = 1$ неравенство $|\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^u| > \delta$ будет верным, из чего и будет следовать условие леммы.

Зафиксируем число $t_0 \in J$ и вектора $\mathbf{x}^s \in U^s(t_0)$, $\mathbf{x}^u \in U^u(t_0)$ такие, что $|\mathbf{x}^s| = |\mathbf{x}^u| = 1$. Рассмотрим вектор-функции $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}^s$, $\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}^u$, из-за $(\lambda_1, \lambda_2, a_1, a_2)$-гиперболичности системы (2) выполняются следующие неравенства: $|\mathbf{x}_1(t)| \geqslant (1/a_1)e^{-\lambda_1(t-t_0)}$, $|\mathbf{x}_2(t)| \leqslant a_2e^{\lambda_2(t-t_0)}$, при $t \leqslant t_0$; $|\mathbf{x}_1(t)| \leqslant a_1e^{-\lambda_1(t-t_0)}$, $|\mathbf{x}_2(t)| \geqslant (1/a_2)e^{\lambda_2(t-t_0)}$, при $t \geqslant t_0$.

Рассмотрим вектор-функцию $\iota(t) = \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)(\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^u)$. Заметим, что она ограничена $|\iota(t)| \geqslant \max(|\mathbf{x}_1(t)| - |\mathbf{x}_2(t)|; |\mathbf{x}_2(t)| - |\mathbf{x}_1(t)|) \geqslant \max((1/a_1)e^{-\lambda_1(t-t_0)} - a_2e^{\lambda_2(t-t_0)}, t \leqslant t_0; (1/a_2)e^{\lambda_2(t-t_0)} - a_1e^{-\lambda_1(t-t_0)}, t \geqslant t_0)$ из чего, получаем

$$\begin{aligned}|\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^u| &\geqslant \\ &\geqslant \max((|\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)|)^{-1}(1/a_1)e^{-\lambda_1(t-t_0)} - a_2e^{\lambda_2(t-t_0)}, t \leqslant t_0; \\ &\qquad (|\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)|)^{-1}(1/a_2)e^{\lambda_2(t-t_0)} - a_1e^{-\lambda_1(t-t_0)}, t \geqslant t_0).\end{aligned}$$

Из ограниченности матрицы $\mathbf{P}(t)$ можно заключить, что $|\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)| \leqslant e^{-H(t-t_0)}$ и $(|\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)|)^{-1} \geqslant e^{H(t-t_0)}$, при всех $t, t_0 \in J$, $t \leqslant t_0$, и что $|\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)| \leqslant e^{H(t-t_0)}$ и $(|\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)|)^{-1} \geqslant e^{-H(t-t_0)}$, при всех $t, t_0 \in J$, $t \geqslant t_0$

[8]. Из чего получаем, что

$$|\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^u| \geqslant$$
$$\geqslant \max(e^{H(t-t_0)}(1/a_1)e^{-\lambda_1(t-t_0)} - a_2 e^{\lambda_2(t-t_0)}, t \leqslant t_0; e^{-H(t-t_0)}(1/a_2)e^{\lambda_2(t-t_0)} - $$
$$- a_1 e^{-\lambda_1(t-t_0)}, t \geqslant t_0),$$

так как число H можно выбрать таким, что бы выполнялись неравенства $H > \lambda_1$, $H > \lambda_2$.

Рассмотрим функцию $F(s) = e^{Hs}|(1/a_1)e^{-\lambda_1 s} - a_2 e^{\lambda_2 s}|$ и найдем ее максимум ($s < 0$, s ограничена длиной J, получим следующее: $F'(s_0) = ((H - \lambda_1)/a_1)e^{(H-\lambda_1)s_0} - a_2(H+\lambda_2)e^{(H+\lambda_2)s_0} = 0$. Получаем, что $s_0 = \Big(\ln\Big((H - \lambda_1)/\big((a_1 a_2)(H+\lambda_2)\big)\Big)\Big)/(\lambda_1+\lambda_2)$ и

$$\max_{s<0} F(s) = F(s_0) =$$
$$= e^{\left(\ln\left((H-\lambda_1)/\left((a_1a_2)(H+\lambda_2)\right)\right)\right)/(\lambda_1+\lambda_2)} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{a_1}\left(\frac{H-\lambda_1}{(a_1a_2)(H+\lambda_2)}\right)^{(-\lambda_1)/(\lambda_1+\lambda_2)} - a_2\left(\frac{H-\lambda_1}{(a_1a_2)(H+\lambda_2)}\right)^{(\lambda_2)/(\lambda_1+\lambda_2)}\right).$$

$F(s_0) > 0$ из-за того, что $F(-(\ln a_1a_2)/(\lambda_1+\lambda_2)) = 0$ и $s_0 < -(\ln a_1a_2)/(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Рассмотрим функцию $G(s) = e^{-Hs}|(1/a_2)e^{\lambda_2 s} - a_1 e^{-\lambda_1 s}|$ и найдем ее максимум ($s > 0$, s ограничена длиной J), получим следующее: $G'(s_1) = ((-H+\lambda_2)/a_2)e^{(-H+\lambda_2)s_1} + a_1(H+\lambda_1)e^{-(H+\lambda_1)s_1} = 0$. Получаем, что $s_1 = \Big(\ln\Big(\big((a_1a_2)(H+\lambda_1)\big)/(H-\lambda_2)\Big)\Big)/(\lambda_1+\lambda_2)$ и

$$\max_{s>0} G(s) = G(s_1) =$$
$$= e^{\left(\ln\left(\left((a_1a_2)(H+\lambda_1)\right)/(H-\lambda_2)\right)\right)/(\lambda_1+\lambda_2)} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{a_2}\left(\frac{(a_1a_2)(H+\lambda_1)}{H-\lambda_2}\right)^{(\lambda_2)/(\lambda_1+\lambda_2)} - a_1\left(\frac{(a_1a_2)(H+\lambda_1)}{H-\lambda_2}\right)^{(-\lambda_1)/(\lambda_1+\lambda_2)}\right).$$

$G(s_1) > 0$ из-за того, что $G((\ln a_1a_2)/(\lambda_1+\lambda_2)) = 0$ и $s_0 > (\ln a_1a_2)/(\lambda_1+\lambda_2)$.

В результате получаем, что $|\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^u| \geqslant \max(F(s_0), G(s_1))$, и, следовательно, угол $\angle(U^s(t), U^u(t))$ между линейными пространствами $U^s(t)$ и $U^u(t)$ ограничен снизу положительным числом

$$\angle(U^s(t), U^u(t)) \geqslant \max(F(s_0), G(s_1)).$$

Далее зафиксируем число $t \in J$, рассмотрим вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Пусть $\Pi^s(t)\mathbf{x} = \mathbf{x}^s$, $\Pi^u(t)\mathbf{x} = \mathbf{x}^u$, из теоремы синусов получаем, что

$$\frac{|\mathbf{x}|}{\sin\kappa} = \frac{|\mathbf{x}^s|}{\sin\angle(\mathbf{x}, \mathbf{x}^s)} = \frac{|\mathbf{x}^u|}{\sin\angle(\mathbf{x}, \mathbf{x}^u)}.$$

Из предыдущего равенства и неравенств $\sin\angle(\mathbf{x}, \mathbf{x}^s) < 1$, $\sin\angle(\mathbf{x}, \mathbf{x}^u) < 1$ следует, что $\max(|\mathbf{x}^s|, |\mathbf{x}^u|) = \max(|\Pi^s(t)\mathbf{x}|, |\Pi^u(t)\mathbf{x}|) < |\mathbf{x}|/\sin\kappa$, из чего получаем неравенства (7).

Предполагалось, что на промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant t'$ система (2) удовлетворяет следующим четырем условиям.

Условие I. Существуют числа $t_0 < t_1 < ... < t_m < t_{m+1} = t'$ такие, что система (2) $(\lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}, a_{1,i}, a_{2,i})$-гиперболична на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ и $t_{i+1} - t_i > \max(\Big(\ln\Big((H-\lambda_{1,i})/\big((a_{1,i}a_{2,i})(H+\lambda_{2,i})\big)\Big)\Big)/(\lambda_{1,i}+\lambda_{2,i}), \Big(\ln\Big(\big((a_{1,i}a_{2,i})(H+\lambda_{1,i})\big)/(H-\lambda_{2,i})\Big)\Big)/(\lambda_{1,i}+\lambda_{2,i}))$, при $(i = 0, 1, ..., m)$.

Пусть $U_i^s(t)$ и $U_i^u(t)$ - линейные пространства, фигурирующие в определении 1.2 гиперболичности системы (2) на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$.

Условие II. Выполняются неравенства $\dim U_i^u(t) > \dim U_{i+1}^u(t)$, $i = 0, 1, ..., m-1$, и подпространства $U_i^u(t_{i+1})$ и $U_{i+1}^s(t_{i+1})$ пространства $\mathbf{R}^n$ $(i = 0, 1, ..., m-1)$ пересекаются трансверсально, причем углы между ними задаются числами α_i $(\alpha_{i+1} = \angle(U_i^u(t_{i+1}), U_{i+1}^s(t_{i+1}))$, $i = 0, 1, ..., m-1)$.

Вводились величины ρ_i, $0 \leqslant i \leqslant m-1$; Δ_i, $0 \leqslant i \leqslant m$; b_i, $1 \leqslant i \leqslant m$; β_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Значения этих величин определись рекуррентно из приведенных ниже соотношений и неравенств.

Условие III. Выполняются соотношения:

$$\beta_{i+1} = \alpha_{i+1} - \frac{\beta_i}{2}, 1 \leqslant i \leqslant m-1, \tag{8}$$

где $\beta_1 = \alpha_1$; $\rho_i = 2\Delta_i/(\Delta_{i+1}\sin u_i)$, где u_i — наименьший положительный корень уравнения $\sin u_i = (2\Delta_i/\Delta_{i+1})\sin(\beta_{i+1} - u_i)$ $((\beta_{i+1}/2) \leqslant u_i \leqslant \beta_{i+1})$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$;

$$a_{2,0}(b_1 + \rho_0\Delta_1 + \Delta_0) + \Delta_0 < 1; \tag{9}$$

$$\rho_i\Delta_{i+1} + b_{i+1} + 2\Delta_i < b_i, 1 \leqslant i \leqslant m-1; \tag{10}$$

$$a_{1,i}(2b_i+(\rho_{i-1}+1)\Delta_i)+\Delta_i+a_{2,i}\left(\frac{2b_i}{\rho_{i-1}+1} + b_{i+1} + \rho_i\Delta_{i+1} + 2\Delta_i\right) < 1, 1\leqslant i\leqslant m-1. \tag{11}$$

$$(a_{1,m}(\rho_{m-1}+1)+1)\Delta_m < 1; \tag{12}$$

Условие IV. Разности $t_{i+1} - t_i$ удовлетворяют неравенствам

$$a_{1,i}(\rho_{i-1}+1)e^{-\lambda_{1,i}(t_{i+1}-t_i)} \leqslant 1, \tag{13}$$

$$\frac{1}{a_{2,i}}\left(\sin\frac{\beta_i}{2}\right)^2 e^{\lambda_{2,i}(t_{i+1}-t_i)} - 2a_{1,i}e^{-\lambda_{1,i}(t_{i+1}-t_i)} \geqslant 1, \tag{14}$$

при $i = 1, ..., m-1$.

По условию I система (2) $(\lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}, a_{1,i}, a_{2,i})$-гиперболична на промежутках $[t_i, t_{i+1}]$ поэтому существуют положительные числа κ_i такие, что $\angle(U_i^s(t), U_i^u(t)) \geqslant \kappa_i$ при $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., m$. Положим

$$\eta_i = \frac{\lambda_{1,i}\lambda_{2,i}\sin\kappa_i}{a_{1,i}\lambda_{2,i} + a_{2,i}\lambda_{1,i}}. \tag{15}$$

Была доказана

Лемма 1.1. *Если выполнены условия I-IV, то при любой кусочно-непрерывной при $t_0 \leqslant t \leqslant t'$ вектор-функции $\mathbf{f}(t)$, удовлетворяющей неравенствам*

$$|\mathbf{f}|_{\mathbf{C}_0} \leqslant \eta_i\Delta_i, \tag{16}$$

при $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., m$, система

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \tag{17}$$

имеет решение $\varphi(t)$, удовлетворяющее неравенству

$$|\varphi(t)| < 1,$$

при $t \in [t_0, t']$.

Затем были рассмотрены приближенные решения системы (1). Вектор-функция $\mathbf{x} = \psi(t)$ должна была удовлетворять неравенствам $|\dot{\psi}(t) - \mathbf{X}(t, \psi(t))| < \delta_i$ при $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., m$ (промежутки $[t_i, t_{i+1}]$ вводились при формулировке леммы 1.1), т.е. вектор-функция $\psi(t)$ являлась

δ_i-решением системы (1) на промежутках $[t_i, t_{i+1}]$. Заменой переменных $\mathbf{x} = \psi(t) + \mathbf{y}$, система (1) была приведена к виду

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{X}(t, \psi(t) + \mathbf{y}) - \dot{\psi}(t). \tag{18}$$

Вектор $\mathbf{X}(t, \psi(t) + \mathbf{y})$ представлен в виде

$$\mathbf{X}(t, \psi(t) + \mathbf{y}) = \mathbf{X}(t, \psi(t)) + \frac{\partial \mathbf{X}(t, \psi(t))}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{y} + \mathbf{F}(t, \mathbf{y}),$$

где вектор-функция $\mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ равномерно непрерывно дифференцируема по вектору $\mathbf{y}$ и $\mathbf{F}(t, 0) = 0$, $\partial\mathbf{F}(t, 0)/\partial\mathbf{y} = 0$, и $\mathbf{P}(t) = \partial\mathbf{X}(t, \psi(t))/\partial\mathbf{x}$ и $\mathbf{X}(t, \psi(t)) - \dot{\psi}(t) = \mathbf{f}(t)$. Тогда система (18) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{y} + \mathbf{F}(t, \mathbf{y}) + \mathbf{f}(t), \tag{19}$$

где вектор-функция $\mathbf{f}(t)$ кусочно-непрерывна при $t_0 \leqslant t \leqslant t'$ и удовлетворяет неравенствам $|\mathbf{f}(t)| < \delta_i$ при $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., m$.

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{y}. \tag{20}$$

Предполагается, что система (20) удовлетворяет условиям I-IV на промежутках $[t_i, t_{i+1}]$ с константами η_i и Δ_i, $i = 0, 1, ..., m$, введенными при формулировке этой леммы. Задаются произвольные положительные числа ε_i, $i = 0, 1, ..., m$, при этом ε_i считались столь малыми, чтобы в шарах $B_i = \Big\{\mathbf{y} : |\mathbf{y}| \leqslant \varepsilon_i\Big\}$ вектор-функция $\mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ удовлетворяла условию Липшица:

$$|\mathbf{F}(t, \mathbf{y}') - \mathbf{F}(t, \mathbf{y}'')| \leqslant l_i|\mathbf{y}' - \mathbf{y}'|, 0 < l_i < \eta_i\Delta_i, \tag{21}$$

при $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $\mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in B_i$, $i = 0, 1, ..., m$.

Была доказана теорема

Теорема 1.2. *Если $\delta_i < (\eta_i\Delta_i - l_i)\varepsilon_i$, $i = 0, 1, ..., m$, то система (19) имеет решение $\mathbf{y} = \mathbf{u}(t)$, удовлетворяющее неравенству $|\mathbf{u}(t)| < \varepsilon_i$ при $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., m$.*

2. Теорема 1.2 показывает, что решение задачи о нахождении условий, при которых для заданных чисел $\varepsilon > \delta > 0$ и заданного δ-решения $\psi(t)$ системы (1), определенного на промежутке J, существует решение $\varphi(t)$ системы (1), определенное на том же промежутке и такое, что при всех $t \in J$

выполняется неравенство $|\psi(t)-\varphi(t)|<\varepsilon$, основывается на изучении свойств линейной системы (20). Покажем, каким образом анализ системы (20) может быть проведен при помощи алгоритмов приближенных вычислений на промежутке $[t_0,t']$ по аналогии с тем, как это сделано в работе [2].

Для начала обратимся к методу Эйлера. Зафиксируем произвольное число $\delta'>0$ и число $h_1>0$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство $|\mathbf{P}(t)-\mathbf{P}(\bar{t})|<\delta'/2$ при $|t-\bar{t}|<h_1$, $t,\bar{t}\in[t_0,t']$ (такое δ' существует из-за того, что $\mathbf{P}(t)$, равномерно непрерывна и ограничена при $t\in[t_0,t']$). Пусть $0<h<h_1$ и пусть $\tau_r=hr$, где $r=0,1,...,\nu$ и пусть выполняются соотношения $\tau_\nu<t'$, $t'-\tau_\nu\leqslant h$, $\tau_{\nu+1}=t'$. Рассмотрим кусочно постоянную матрицу $\overline{\mathbf{P}}(t)$, определенную на промежутке $[t_0,t']$ при помощи следующих равенств:

$$\overline{\mathbf{P}}(t)=\mathbf{P}(\tau_r), \tag{22}$$

при $t\in[\tau_r,\tau_{r+1}]$, $r=0,1,...,\nu$.

При этом разность $\tau_{r+1}-\tau_r=h$ такова, что выполняется неравенство

$$|\overline{\mathbf{P}}(t)-\mathbf{P}(t)|<\frac{\delta'}{2} \tag{23}$$

при всех $t_0\leqslant t\leqslant t'$.

Определим матрицу

$$\mathbf{\Psi}(t)=(\mathbf{E}+(t-\tau_r)\mathbf{P}(\tau_r))(\mathbf{E}+h\mathbf{P}(\tau_r))...(\mathbf{E}+h\mathbf{P}(\tau_0)), \tag{24}$$

при $\tau_r\leqslant t\leqslant\tau_{r+1}$, $r=0,1,...,\nu$, где $\mathbf{E}$ есть единичная матрица, $\mathbf{\Psi}(t)$ — кусочно-линенейная матрица невырождающаяся, когда $h<1/H$. Из равенства (24) следует равенство

$$\mathbf{\Psi}(t)=(\mathbf{E}+(t-\tau_r)\mathbf{P}(\tau_r))\mathbf{\Psi}(\tau_r), \tag{25}$$

при $\tau_r\leqslant t\leqslant\tau_{r+1}$, $r=0,1,...,\nu$

Определим матрицу $\mathbf{Q}(t)$ посредством равенства

$$\mathbf{Q}(t)=\mathbf{P}(\tau_r)(\mathbf{E}+(t-\tau_r)\mathbf{P}(\tau_r))^{-1}, \tag{26}$$

при $\tau_r\leqslant t\leqslant\tau_{r+1}$, $r=0,1,...,\nu$. Из равенства (25) следует, что

$$\frac{d\mathbf{\Psi}}{dt}=\mathbf{P}(\tau_r)\mathbf{\Psi}(\tau_r)$$

или, что то же самое

$$\frac{d\mathbf{\Psi}}{dt}=\mathbf{P}(\tau_r)(\mathbf{E}+(t-\tau_r)\mathbf{P}(\tau_r))^{-1}(\mathbf{E}+(t-\tau_r)\mathbf{P}(\tau_r))\mathbf{\Psi}(\tau_r),$$

при $\tau_r \leqslant t \leqslant \tau_{r+1}$, $r = 0, 1, ..., \nu$. Из этого равенства а также из равенств (25) и (26) получаем, что

$$\frac{d\mathbf{\Psi}}{dt} = \mathbf{Q}(t)\mathbf{\Psi}(t),$$

при всех $t \in [t_0, t']$. Другими словами матрица $\mathbf{\Psi}(t)$ является фундаментальной матрицей решений системы

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} \tag{27}$$

такой, что $\mathbf{\Psi}(t_0) = \mathbf{E}$.

Рассмотрим разность $\mathbf{Q}(t) - \overline{\mathbf{P}}(t)$. При $t \in [\tau_r, \tau_{r+1}]$ мы имеем

$$\mathbf{Q}(t) - \overline{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(\tau_r)(\mathbf{E} + (t - \tau_r)\mathbf{P}(\tau_r))^{-1} - \mathbf{P}(\tau_r). \tag{28}$$

Если $h < 1/H$, то матрица $(\mathbf{E} + (t - \tau_r)\mathbf{P}(\tau_r))^{-1}$ может быть представлена с помощью ряда

$$(\mathbf{E} + (t - \tau_r)\mathbf{P}(\tau_r))^{-1} = \mathbf{E} - (t - \tau_r)\mathbf{P}(\tau_r) + (t - \tau_r)^2\mathbf{P}^2(\tau_r) - ...$$

Из этого равенства и равенства (28) мы заключаем, что

$$|\mathbf{Q}(t) - \overline{\mathbf{P}}(t)| = |(t - \tau_r)\mathbf{P}^2(\tau_r)(\mathbf{E} - (t - \tau_r)\mathbf{P}(\tau_r) + (t - \tau_r)^2\mathbf{P}^2(\tau_r) - ...)|.$$

Из этого равенства и неравенств $|\mathbf{P}(t)| < H$, $t - \tau_r < h$ следует неравенство

$$|\mathbf{Q}(t) - \overline{\mathbf{P}}(t)| < H^2h(1 + Hh + H^2h^2 + ...) = \frac{H^2h}{1 - Hh}.$$

Следовательно, если $h \leqslant \delta'/(H(2H + \delta'))$, тогда

$$|\mathbf{Q}(t) - \overline{\mathbf{P}}(t)| < \frac{\delta'}{2},$$

при всех $t \in [t_0, t']$. Из этого неравенства и (23) мы получаем неравенство

$$|\mathbf{Q}(t) - \mathbf{P}(t)| < \delta', \tag{29}$$

при всех $t \in [t_0, t']$.

Рассмотрим методы, основанные на интерполяционных квадратурных формулах приближенного вычисления интегралов в системах

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(\tau_r) + \int\limits_{\tau_r}^{t} \mathbf{P}(\tau)\mathbf{y}(\tau)d\tau \approx$$

$$\approx \mathbf{y}(\tau_r) + \left(\sum_{s=1}^{q}(t - \tau_r)^s \sum_{j_1,...,j_s \in 1,...,m} K_{j_1,...,j_s} \prod_{l_{r+1} \in j_1,...,j_s} \mathbf{P}(\varsigma_{l_{r+1}})\right)\mathbf{y}(\tau_r),$$

где все $\varsigma_{l_{r+1}} \in [\tau_r, \tau_r + h]$, при $q > 1$, $m \geqslant 1$ при $q = 1$ $\varsigma_{l_{r+1}} = \tau_r$, все $K_{j_1,...,j_s} \leqslant 1$, которые соответствуют системе (20), при $t \in [\tau_r, \tau_{r+1}]$, $r = 0, 1, ..., \nu$. Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{\Psi}_1(t) = \left(\mathbf{E} + \left(\sum_{s=1}^{q}(t-\tau_r)^s \sum_{j_1,...,j_s \in 1,...,m} K_{j_1,...,j_s} \prod_{l_{r+1}\in j_1,...,j_s} \mathbf{P}(\varsigma_{l_{r+1}})\right)\right) \times$$
$$\times \left(\mathbf{E} + \left(\sum_{s=1}^{q} h^s \sum_{j_1,...,j_s \in 1,...,m} K_{j_1,...,j_s} \prod_{l_{r+1}\in j_1,...,j_s} \mathbf{P}(\varsigma_{l_{r+1}})\right)\right) \times ...$$
$$... \times \left(\mathbf{E} + \left(\sum_{s=1}^{q} h^s \sum_{j_1,...,j_s \in 1,...,m} K_{j_1,...,j_s} \prod_{l_1\in j_1,...,j_s} \mathbf{P}(\varsigma_{l_1})\right)\right), \quad (30)$$

при $\tau_r \leqslant t \leqslant \tau_{r+1}$, $r = 0, 1, ..., \nu$, где $\mathbf{E}$ есть единичная матрица, $\mathbf{\Psi}_2(t)$ невырожденная, когда $\sum\limits_{s=1}^{q} h^s H^s \sum\limits_{j_1,...,j_s \in 1,...,m} K_{j_1,...,j_s} < 1$ где H определено выше. Из равенства (30) следует равенство

$$\mathbf{\Psi}_1(t) = \left(\mathbf{E} + \left(\sum_{s=1}^{q}(t-\tau_r)^s \sum_{j_1,...,j_s \in 1,...,m} K_{j_1,...,j_s} \prod_{l_{r+1}\in j_1,...,j_s} \mathbf{P}(\varsigma_{l_{r+1}})\right)\right) \mathbf{\Psi}_1(\tau_r), \quad (31)$$

при $\tau_r \leqslant t \leqslant \tau_{r+1}$, $r = 0, 1, ..., \nu$

Определим матрицу $\mathbf{Q}_1(t)$ посредством равенства

$$\mathbf{Q}_1(t) = \left(\mathbf{P}(\tau_r) + \sum_{s=2}^{q} s(t-\tau_r)^{s-1} \sum_{j_1,...,j_s \in 1,...,m} K_{j_1,...,j_s} \prod_{l_{r+1}\in j_1,...,j_s} \mathbf{P}(\varsigma_{l_{r+1}})\right) \times$$
$$\times \left(\mathbf{E} + \left(\sum_{s=1}^{q}(t-\tau_r)^s \sum_{j_1,...,j_s \in 1,...,m} K_{j_1,...,j_s} \prod_{l_{r+1}\in j_1,...,j_s} \mathbf{P}(\varsigma_{l_{r+1}})\right)\right)^{-1}, \quad (32)$$

при $\tau_r \leqslant t \leqslant \tau_{r+1}$, $r = 0, 1, ..., \nu$. Из равенства (31) следует, что

$$\frac{d\mathbf{\Psi}_1}{dt} = \left(\mathbf{P}(\tau_r) + \sum_{s=2}^{q} s(t-\tau_r)^{s-1} \sum_{j_1,...,j_s \in 1,...,m} K_{j_1,...,j_s} \prod_{l_{r+1}\in j_1,...,j_s} \mathbf{P}(\varsigma_{l_{r+1}})\right) \mathbf{\Psi}_1(\tau_r)$$

или, что то же самое

$$\frac{d\mathbf{\Psi}_1}{dt} = \left(\mathbf{P}(\tau_r) + \sum_{s=2}^{q} s(t-\tau_r)^{s-1} \sum_{j_1,\dots,j_s \in 1,\dots,m} K_{j_1,\dots,j_s} \prod_{l_{r+1} \in j_1,\dots,j_s} \mathbf{P}(\varsigma_{l_{r+1}})\right) \times$$
$$\times \left(\mathbf{E} + \left(\sum_{s=1}^{q} (t-\tau_r)^s \sum_{j_1,\dots,j_s \in 1,\dots,m} K_{j_1,\dots,j_s} \prod_{l_{r+1} \in j_1,\dots,j_s} \mathbf{P}(\varsigma_{l_{r+1}})\right)\right)^{-1} \times$$
$$\times \left(\mathbf{E} + \left(\sum_{s=1}^{q} (t-\tau_r)^s \sum_{j_1,\dots,j_s \in 1,\dots,m} K_{j_1,\dots,j_s} \prod_{l_{r+1} \in j_1,\dots,j_s} \mathbf{P}(\varsigma_{l_{r+1}})\right)\right) \mathbf{\Psi}_1(\tau_r),$$

при $\tau_r \leqslant t \leqslant \tau_{r+1}$, $r = 0, 1, ..., \nu$. Из этого равенства а также из равенств (31) и (32) получаем, что

$$\frac{d\mathbf{\Psi}_1}{dt} = \mathbf{Q}_1(t)\mathbf{\Psi}_1(t),$$

при всех $t \in [t_0, t']$. Другими словами матрица $\mathbf{\Psi}_1(t)$ является фундаментальной матрицей решений системы

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Q}_1(t)\mathbf{x} \tag{33}$$

такой, что $\mathbf{\Psi}_1(t_0) = \mathbf{E}$.

Рассмотрим разность $\mathbf{Q}_1(t) - \overline{\mathbf{P}}(t)$. При $t \in [\tau_r, \tau_{r+1}]$ мы имеем

$$\mathbf{Q}_1(t) - \overline{\mathbf{P}}(t) =$$
$$= \left(\mathbf{P}(\tau_r) + \sum_{s=2}^{q} s(t-\tau_r)^{s-1} \sum_{j_1,\dots,j_s \in 1,\dots,m} K_{j_1,\dots,j_s} \prod_{l_{r+1} \in j_1,\dots,j_s} \mathbf{P}(\varsigma_{l_{r+1}})\right) \times$$
$$\times \left(\mathbf{E} + \left(\sum_{s=1}^{q} (t-\tau_r)^s \sum_{j_1,\dots,j_s \in 1,\dots,m} K_{j_1,\dots,j_s} \prod_{l_{r+1} \in j_1,\dots,j_s} \mathbf{P}(\varsigma_{l_{r+1}})\right)\right)^{-1} - \mathbf{P}(\tau_r). \tag{34}$$

Если $\sum\limits_{s=1}^{q} h^s H^s \sum\limits_{j_1,\dots,j_s \in 1,\dots,m} K_{j_1,\dots,j_s} < 1$, то матрица

$$\left(\mathbf{E} + \left(\sum_{s=1}^{q} (t-\tau_r)^s \sum_{j_1,\dots,j_s \in 1,\dots,m} K_{j_1,\dots,j_s} \prod_{l_{r+1} \in j_1,\dots,j_s} \mathbf{P}(\varsigma_{l_{r+1}})\right)\right)^{-1}$$

может быть представлена с помощью ряда

$$\left(\mathbf{E}+\left(\sum_{s=1}^{q}(t-\tau_r)^s\sum_{j_1,\dots,j_s\in 1,\dots,m}K_{j_1,\dots,j_s}\prod_{l_{r+1}\in j_1,\dots,j_s}\mathbf{P}(\varsigma_{l_{r+1}})\right)\right)^{-1}=$$

$$=\mathbf{E}-\left(\sum_{s=1}^{q}(t-\tau_r)^s\sum_{j_1,\dots,j_s\in 1,\dots,m}K_{j_1,\dots,j_s}\prod_{l_{r+1}\in j_1,\dots,j_s}\mathbf{P}(\varsigma_{l_{r+1}})\right)+$$

$$+\left(\sum_{s=1}^{q}(t-\tau_r)^s\sum_{j_1,\dots,j_s\in 1,\dots,m}K_{j_1,\dots,j_s}\prod_{l_{r+1}\in j_1,\dots,j_s}\mathbf{P}(\varsigma_{l_{r+1}})\right)^2-\dots$$

Из этого равенства и равенства (34) мы заключаем, что

$$|\mathbf{Q}_1(t)-\overline{\mathbf{P}}(t)|=|(\sum_{s=2}^{q}s(t-\tau_r)^{s-1}\sum_{j_1,\dots,j_s\in 1,\dots,m}K_{j_1,\dots,j_s}\prod_{l_{r+1}\in j_1,\dots,j_s}\mathbf{P}(\varsigma_{l_{r+1}})-$$

$$-\left(\mathbf{P}(\tau_r)+\left(\sum_{s=2}^{q}s(t-\tau_r)^{s-1}\sum_{j_1,\dots,j_s\in 1,\dots,m}K_{j_1,\dots,j_s}\prod_{l_{r+1}\in j_1,\dots,j_s}\mathbf{P}(\varsigma_{l_{r+1}})\right)\right)\times$$

$$\left(\sum_{s=1}^{q}(t-\tau_r)^s\sum_{j_1,\dots,j_s\in 1,\dots,m}K_{j_1,\dots,j_s}\prod_{l_{r+1}\in j_1,\dots,j_s}\mathbf{P}(\varsigma_{l_{r+1}})\right)\times$$

$$\times(\mathbf{E}-\left(\sum_{s=1}^{q}(t-\tau_r)^s\sum_{j_1,\dots,j_s\in 1,\dots,m}K_{j_1,\dots,j_s}\prod_{l_{r+1}\in j_1,\dots,j_s}\mathbf{P}(\varsigma_{l_{r+1}})\right)+$$

$$+\left(\sum_{s=1}^{q}(t-\tau_r)^s\sum_{j_1,\dots,j_s\in 1,\dots,m}K_{j_1,\dots,j_s}\prod_{l_{r+1}\in j_1,\dots,j_s}\mathbf{P}(\varsigma_{l_{r+1}})\right)^2-\dots))|.$$

Из этого равенства и неравенств $|\mathbf{P}(t)|<H,\, t-\tau_r<h$ следует неравенство

$$|\mathbf{Q}_1(t)-\overline{\mathbf{P}}(t)|<\frac{qH^2h(1-H^{s-1}h^{s-1})}{1-Hh}+H^2h\left(\frac{q(1-H^{s-1}h^{s-1})}{1-Hh}\right.$$
$$+\sum_{s=1}^{q}h^sH^s\sum_{j_1,\dots,j_s\in 1,\dots,m}K_{j_1,\dots,j_s}\times$$
$$\left.\times\left(1+\left(\sum_{s=1}^{q}h^sH^s\sum_{j_1,\dots,j_s\in 1,\dots,m}K_{j_1,\dots,j_s}\right)+\left(\sum_{s=1}^{q}h^sH^s\sum_{j_1,\dots,j_s\in 1,\dots,m}K_{j_1,\dots,j_s}\right)^2+\dots\right)\right)=$$
$$=\frac{qH^2h(1-H^{s-1}h^{s-1})}{1-Hh}+\frac{H^2h\left(\frac{q(1-H^{s-1}h^{s-1})}{1-Hh}+\sum\limits_{s=1}^{q}h^{s-1}H^{s-1}\sum\limits_{j_1,\dots,j_s\in 1,\dots,m}K_{j_1,\dots,j_s}\right)}{1-Hh\left(\sum\limits_{s=1}^{q}h^{s-1}H^{s-1}\sum\limits_{j_1,\dots,j_s\in 1,\dots,m}K_{j_1,\dots,j_s}\right)}.$$

Следовательно, если $h\leqslant\delta'/(H(2H(2q+1)+\delta'))$ и $H>2$, $\delta'<2$, тогда

$$|\mathbf{Q}_1(t)-\overline{\mathbf{P}}(t)|<\frac{\delta'}{2},$$

при всех $t\in[t_0,t']$, так как при указанных H и δ' выполняется неравенство $h\leqslant 1/2H$, которое сразу влечет за собой, что $\sum\limits_{s=1}^{q}h^sH^s\sum\limits_{j_1,\dots,j_s\in 1,\dots,m}K_{j_1,\dots,j_s}<1$ (Все $K_{j_1,\dots,j_s}\leqslant 1$ и $\sum\limits_{s=1}^{\infty}(1/2)^s=1$). Из этого неравенства и (23) мы получаем неравенство

$$|\mathbf{Q}_1(t)-\mathbf{P}(t)|<\delta', \tag{35}$$

при всех $t\in[t_0,t']$.

Из всего, выше сказанного, можно сделать вывод, что приближенная фундаментальная матрица решений системы (20), вычисленная при помощи одного из методов, описанных в этом пункте, является фундаментальной матрицей решений системы (27) или (33), близкой к системе (20).

3. Предположим, что использовав один из методов, описанных в предыдущем пункте, мы нашли приближенную фундаментальную матрицу решений системы (20) на одном из промежутков $t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}$, $i=0,1,\dots,m+1$, определенных при формулировке леммы 1.1. Это означает, что найдена матрица $\overline{\mathbf{\Phi}}(t)$, являющаяся фундаментальной матрицей решений системы вида

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}, \tag{36}$$

где $\mathbf{Q}(t)$ — матрица непрерывная при $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$, удовлетворяющая неравенству $|\mathbf{Q}(t) - \mathbf{P}(t)| < \delta_i$ при $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$, а δ_i — число характеризующее точность наших вычислений на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$.

Покажем теперь, что если фундаментальная матрица решений $\overline{\mathbf{\Phi}}(t)$ системы (36) удовлетворяет условиям леммы 1.1 на всех промежутках $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$, $i = 0, 1, ..., m+1$, то и фундаментальная матрица решений $\mathbf{\Phi}(t)$ системы (20) удовлетворяет этим же условиям. Для этого, прежде всего, докажем, что если система (36) на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ обладает нашим свойством гиперболичности, то и система (20) на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ обладает тем же свойством с близкими характеристиками. Для этого рассмотрим систему

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t))\mathbf{x}, \tag{37}$$

где $\mathbf{A}(t)$ — ограниченная кусочно-непрерывная на $[t_i, t_{i+1}]$ матрица размера $n \times n$, $\mathbf{B}(t)$ — ограниченная кусочно-непрерывная на $[t_i, t_{i+1}]$ матрица размера $n \times n$, $|\mathbf{B}(t)| < l$, то есть выполняется неравенство

$$|\mathbf{B}(t)\mathbf{x}| < l|\mathbf{x}|, \tag{38}$$

при всех $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $t \in (t_i, t_{i+1})$ и $l > 0$ достаточно мало. При этом будем считать, что линейная система

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \tag{39}$$

$(\lambda_1, \lambda_2, a_1, a_2)$-гиперболична на $[t_i, t_{i+1}]$, $\mathbf{\Phi}(t)$ — фундаментальная матрица решений этой системы, пространства $M^s(t)$ и $M^u(t)$ ее устойчивое и неустойчивое подпространства, $\angle(M^s(t), M^u(t)) \geqslant \alpha$ при $t \in [t_i, t_{i+1}]$, а $\Pi^s(t)$ и $\Pi^u(t)$ проекторы пространства $\mathbf{R}^n$ на $M^s(t)$ и $M^u(t)$.

Установим справедливость следующих утверждений.

Лемма 3.1. *Для любого числа* $\varepsilon > 0$ *и любого* $\sigma_1 \in (0, \lambda_1)$ *существуют число* $L > 0$*, зависящее только от свойств системы* (39) *и матрица* $\mathbf{F}(t) \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$*, обладающие следующими свойствами:*

- $\mathbf{F}(t)$ *— непрерывна по* $t \in [t_i, t_{i+1}]$.
- *Для всех* $t \in [t_i, t_{i+1}]$ *выполняется неравенство*

$$|\mathbf{F}(t)| \leqslant Ll. \tag{40}$$

- *Если вектор* $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$ *такой, что* $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{c} + \mathbf{F}(\bar{t})\mathbf{c}$, *при некоторых* $\bar{t} \in [t_i, t_{i+1}]$, $\mathbf{c} \in M^s(\bar{t})$, *то выполняется неравенство*

$$|\mathbf{x}(t, \bar{t}, \overline{\mathbf{x}})| \leqslant (a_1 + \varepsilon)|\mathbf{c}|e^{-\sigma_1(t-\bar{t})}, \tag{41}$$

при $t \geqslant \bar{t}$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, *где* $\mathbf{x}(t, \bar{t}, \overline{\mathbf{x}})$ *— решение системы (37) такое, что* $\mathbf{x}(\bar{t}, \bar{t}, \overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}}$.

Доказательство. Зафиксируем число $\bar{t} \in (t_i, t_{i+1})$ и вектор $\mathbf{c} \in M^s(\bar{t})$, рассмотрим последовательность n-мерных вектор-функций $\{\phi_k(t, \bar{t}, \mathbf{c})\}_{k=0}^{\infty}$ такую, что вектор-функция $\phi_0(t, \bar{t}, \mathbf{c}) = 0$, а

$$\phi_{k+1}(t, \bar{t}, \mathbf{c}) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(\bar{t})\mathbf{c} + \int\limits_{\bar{t}}^{t} \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)\Pi^s(\tau)\mathbf{B}(\tau)\phi_k(\tau, \bar{t}, \mathbf{c})d\tau -$$

$$- \int\limits_{t}^{t_{i+1}} \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)\Pi^u(\tau)\mathbf{B}(\tau)\phi_k(\tau, \bar{t}, \mathbf{c})d\tau, \tag{42}$$

при $k = 0, 1, 2, ..., t \in [t_i, t_{i+1}]$.

По индукции докажем неравенство

$$|\phi_k(t, \bar{t}, \mathbf{c})| \leqslant (a_1 + \varepsilon)|\mathbf{c}|e^{-\sigma_1(t-\bar{t})}, \tag{43}$$

при $t \geqslant \bar{t}$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ и всех $k > 0$.

База индукции: $k = 1$, $\phi_1(t, \bar{t}, \mathbf{c}) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(\bar{t})\mathbf{c}$, из-за того, что $\mathbf{c} \in M^s(\bar{t})$ и $(\lambda_1, \lambda_2, a_1, a_2)$-гиперболичности системы (39) выполняется неравенство $|\phi_1(t, \bar{t}, \mathbf{c})| \leqslant a_1|\mathbf{c}|e^{-\lambda_1(t-\bar{t})} \leqslant (a_1 + \varepsilon)|\mathbf{c}|e^{-\sigma_1(t-\bar{t})}$, при $t \geqslant \bar{t}$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Переход: пусть выполнено $|\phi_k(t, \bar{t}, \mathbf{c})| \leqslant (a_1 + \varepsilon)|\mathbf{c}|e^{-\sigma_1(t-\bar{t})}$, при $t \geqslant \bar{t}$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, оценим вектор-функцию $\phi_{k+1}(t, \bar{t}, \mathbf{c})$, по лемме (1.0) получаем неравенство

$$|\Pi^j(t)| < \frac{1}{\sin\alpha}, j = s, u; t \in (t_i, t_{i+1}). \tag{44}$$

Используя предположение индукции и (38), (44), получаем неравенства

$$|\phi_{k+1}(t,\bar t,\mathbf{c})| \leqslant a_1|\mathbf{c}|e^{-\lambda_1(t-\bar t)} + |\int\limits_{\bar t}^{t} a_1 e^{-\lambda_1(t-\tau)}(1/\sin\alpha)l(a_1+\varepsilon)|\mathbf{c}|e^{-\sigma_1(\tau-\bar t)}d\tau| +$$

$$+|\int\limits_{t}^{t_{i+1}} a_2 e^{\lambda_2(t-\tau)}(1/\sin\alpha)l(a_1+\varepsilon)|\mathbf{c}|e^{-\sigma_1(\tau-\bar t)}d\tau| \leqslant a_1|\mathbf{c}|e^{-\lambda_1(t-\bar t)}+$$

$$+a_1(1/\sin\alpha)l(a_1+\varepsilon)|\mathbf{c}|e^{\sigma_1\bar t}e^{-\lambda_1 t}|\int\limits_{\bar t}^{t} e^{\tau(\lambda_1-\sigma_1)}d\tau|+$$

$$+a_2(1/\sin\alpha)l(a_1+\varepsilon)|\mathbf{c}|e^{\sigma_1\bar t}e^{\lambda_2 t}|\int\limits_{t}^{t_{i+1}} e^{-\tau(\lambda_2+\sigma_1)}d\tau| = a_1|\mathbf{c}|e^{-\lambda_1(t-\bar t)}+$$

$$+(1/\sin\alpha)l(a_1+\varepsilon)|\mathbf{c}|(a_1/(\lambda_1-\sigma_1)e^{\sigma_1\bar t}e^{-\lambda_1 t}|e^{t(\lambda_1-\sigma_1)}-e^{\bar t(\lambda_1-\sigma_1)}|)+$$
$$+(1/\sin\alpha)l(a_1+\varepsilon)|\mathbf{c}|(a_2/(\lambda_2+\sigma_1)e^{\sigma_1\bar t}e^{\lambda_2 t}|e^{-t(\lambda_2+\sigma_1)}-e^{-t_{i+1}(\lambda_2+\sigma_1)}|)\leqslant$$
$$\leqslant (a_1+\varepsilon)|\mathbf{c}|e^{-\sigma_1(t-\bar t)}(1-\varepsilon/(a_1+\varepsilon)+l(1/\sin\alpha)((a_1/(\lambda_1-\sigma_1))+(a_2/(\lambda_2+\sigma_1))))$$

Таким образом, мы получаем, что неравенство (43) выполняется, когда выполнено

$$l < \frac{\varepsilon\sin\alpha(\lambda_1-\sigma_1)(\lambda_2+\sigma_1)}{(a_1+\varepsilon)(a_2(\lambda_1-\sigma_1)+a_1(\lambda_2+\sigma_1))}. \tag{45}$$

По построению все $\phi_k(t,\bar t,\mathbf{c})$ непрерывны по каждому из своих аргументов, линейны по $\mathbf{c}$ и дифференцируемы по t. Оценим разность $\phi_{k+1}(t,\bar t,\mathbf{c}) - \phi_k(t,\bar t,\mathbf{c})$ при фиксированном векторе $\mathbf{c}\in M^s(\bar t)$. По индукции докажем неравенство

$$|\phi_{k+1}(t,\bar t,\mathbf{c})-\phi_k(t,\bar t,\mathbf{c})| \leqslant a_1\left(\frac{l}{\sin\alpha}\left(\frac{a_1}{\lambda_1-\sigma_1}+\frac{a_2}{\lambda_2+\sigma_1}\right)\right)^k|\mathbf{c}|e^{-\sigma_1(t-\bar t)}, \tag{46}$$

при $t\geqslant\bar t$, $t\in[t_i,t_{i+1}]$ и всех $k\geqslant 0$.

База индукции: $k=0$, $\phi_1(t,\bar t,\mathbf{c})-\phi_0(t,\bar t,\mathbf{c}) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(\bar t)\mathbf{c}$, из-за того, что вектор $\mathbf{c}\in M^s(\bar t)$ и $(\lambda_1,\lambda_2,a_1,a_2)$-гиперболичности системы (39) выполняется неравенство $|\phi_1(t,\bar t,\mathbf{c})-\phi_0(t,t_0,\mathbf{c})| \leqslant a_1|\mathbf{c}|e^{-\lambda_1(t-\bar t)} \leqslant a_1|\mathbf{c}|e^{-\sigma_1(t-\bar t)}$, при $t\geqslant\bar t$, $t\in[t_i,t_{i+1}]$. Переход: пусть выполнено $|\phi_k(t,\bar t,\mathbf{c})-\phi_{k-1}(t,\bar t,\mathbf{c})| \leqslant a_1|\mathbf{c}|(((l/\sin\alpha)((a_1/(\lambda_1-\sigma_1))+(a_2/(\lambda_2+\sigma_1))))^{k-1}e^{-\sigma_1(t-\bar t)}$, при $t\geqslant\bar t$, $t\in[t_i,t_{i+1}]$, оценим разницу вектор-функций $\phi_{k+1}(t,\bar t,\mathbf{c})-\phi_k(t,\bar t,\mathbf{c})$. Используя предположение индукции и (38), получаем неравенства

$$|\phi_{k+1}(t,\bar{t},\mathbf{c})-\phi_k(t,\bar{t},\mathbf{c})|\leqslant$$

$$\leqslant |\int\limits_{\bar{t}}^{t}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)\Pi^s(\tau)(\mathbf{B}(\tau)\phi_{k+1}(\tau,\bar{t},\mathbf{c})-\mathbf{B}(\tau)\phi_k(\tau,\bar{t},\mathbf{c}))d\tau|+$$

$$+|\int\limits_{t}^{t_{i+1}}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)\Pi^u(\tau)(\mathbf{B}(\tau)\phi_{k+1}(\tau,\bar{t},\mathbf{c})-\mathbf{B}(\tau)\phi_k(\tau,\bar{t},\mathbf{c}))d\tau|\leqslant$$

$$\leqslant |\int\limits_{\bar{t}}^{t}a_1e^{-\lambda_1(t-\tau)}(1/\sin\alpha)la_1\left(\frac{l}{\sin\alpha}\left(\frac{a_1}{\lambda_1-\sigma_1}+\frac{a_2}{\lambda_2+\sigma_1}\right)\right)^{k-1}|\mathbf{c}|e^{-\sigma_1(\tau-\bar{t})}d\tau|+$$

$$+|\int\limits_{t}^{t_{i+1}}a_2e^{\lambda_2(t-\tau)}(1/\sin\alpha)la_1\left(\frac{l}{\sin\alpha}\left(\frac{a_1}{\lambda_1-\sigma_1}+\frac{a_2}{\lambda_2+\sigma_1}\right)\right)^{k-1}|\mathbf{c}|e^{-\sigma_1(\tau-\bar{t})}d\tau|\leqslant$$

$$\leqslant a_1(1/\sin\alpha)la_1\left(\frac{l}{\sin\alpha}\left(\frac{a_1}{\lambda_1-\sigma_1}+\frac{a_2}{\lambda_2+\sigma_1}\right)\right)^{k-1}|\mathbf{c}|e^{\sigma_1\bar{t}}e^{-\lambda_1 t}|\int\limits_{\bar{t}}^{t}e^{\tau(\lambda_1-\sigma_1)}d\tau|+$$

$$+a_2(1/\sin\alpha)la_1\left(\frac{l}{\sin\alpha}\left(\frac{a_1}{\lambda_1-\sigma_1}+\frac{a_2}{\lambda_2+\sigma_1}\right)\right)^{k-1}|\mathbf{c}|e^{\sigma_1\bar{t}}e^{\lambda_2 t}|\int\limits_{t}^{t_{i+1}}e^{-\tau(\lambda_2+\sigma_1)}d\tau|\leqslant$$

$$\leqslant a_1|\mathbf{c}|e^{-\sigma_1(t-\bar{t})}\frac{l}{\sin\alpha}\left(\frac{a_1}{\lambda_1-\sigma_1}+\frac{a_2}{\lambda_2+\sigma_1}\right)\left(\frac{l}{\sin\alpha}\left(\frac{a_1}{\lambda_1-\sigma_1}+\frac{a_2}{\lambda_2+\sigma_1}\right)\right)^{k-1}.$$

Отсюда заключаем, что если выполняется неравенство

$$l<\frac{\sin\alpha(\lambda_1-\sigma_1)(\lambda_2+\sigma_1)}{a_2(\lambda_1-\sigma_1)+a_1(\lambda_2+\sigma_1)}, \tag{47}$$

то ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(\phi_{k+1}(t,\bar{t},\mathbf{c})-\phi_k(t,\bar{t},\mathbf{c}))$ сходится равномерно при всех $\mathbf{c}\in M^s(\bar{t})$, $t,\bar{t}\in[t_i,t_{i+1}]$, и значит последовательность $\{\phi_k(t,\bar{t},\mathbf{c})\}_{k=0}^{\infty}$ имеет своим пределом вектор-функцию $\phi(t,\bar{t},\mathbf{c})$, обладающую следующими свойствами:

- $\phi(t,\bar{t},\mathbf{c})$ — непрерывна по каждому из своих аргументов, линейна по $\mathbf{c}$ и дифференцируема по t.

- $$|\phi(t,\bar{t},\mathbf{c})|\leqslant(a_1+\varepsilon)|\mathbf{c}|e^{-\sigma_1(t-\bar{t})}, \tag{48}$$

  при $t\geqslant\bar{t}$ и при всех $\mathbf{c}\in M^s(\bar{t})$, $t,\bar{t}\in[t_i,t_{i+1}]$.

- Переходя к пределу в (48), получаем равенство

$$\phi(t,\bar{t},\mathbf{c}) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(\bar{t})\mathbf{c} + \int\limits_{\bar{t}}^{t} \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)\Pi^{s}(\tau)\mathbf{B}(\tau)\phi(\tau,\bar{t},\mathbf{c})d\tau -$$

$$- \int\limits_{t}^{t_{i+1}} \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)\Pi^{u}(\tau)\mathbf{B}(\tau)\phi(\tau,\bar{t},\mathbf{c})d\tau,$$

из которого при дифференцировании по t получаем

$$\dot{\phi}(t,\bar{t},\mathbf{c}) = \mathbf{A}(t)\phi(t,\bar{t},\mathbf{c}) + \mathbf{B}(t)\phi(t,\bar{t},\mathbf{c}).$$

Отсюда следует, что $\phi(t,\bar{t},\mathbf{c}) = \mathbf{x}(t,\bar{t},\mathbf{c})$ — решение системы (37) такое, что $\mathbf{x}(\bar{t},\bar{t},\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}}$.

Определим фигурирующую в формулировке теоремы матрицу $\mathbf{F}(t)$, а именно:

$$\mathbf{F}(\bar{t})\mathbf{c} = \phi(\bar{t},\bar{t},\mathbf{c}) - \mathbf{c} = - \int\limits_{\bar{t}}^{t_{i+1}} \mathbf{\Phi}(\bar{t})\mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)\Pi^{u}(\tau)\mathbf{B}(\tau)\phi(\tau,\bar{t},\mathbf{c})d\tau.$$

Матрица $\mathbf{F}(t)$ по построению удовлетворяет первому и последнему (из-за (48)) утверждениям теоремы, осталось доказать неравенство (40).

Пусть вектор $\mathbf{c} \in M^{s}(\bar{t})$ из равенства

$$\mathbf{F}(\bar{t})\mathbf{c} = - \int\limits_{\bar{t}}^{t_{i+1}} \mathbf{\Phi}(\bar{t})\mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)\Pi^{u}(\tau)\mathbf{B}(\tau)\phi(\tau,\bar{t},\mathbf{c})d\tau$$

и (48) получаем неравенства

$$|\mathbf{F}(\bar{t})\mathbf{c}| \leqslant |\int\limits_{\bar{t}}^{t_{i+1}} a_2 e^{\lambda_2(\bar{t}-\tau)}(1/\sin\alpha)l(a_1+\varepsilon)|\mathbf{c}|e^{-\sigma_1(\tau-\bar{t})}d\tau| =$$

$$= a_2(1/\sin\alpha)l(a_1+\varepsilon)|\mathbf{c}|e^{\sigma_1\bar{t}}e^{\lambda_2\bar{t}}|\int\limits_{t_0}^{t_{i+1}} e^{-\tau(\lambda_2+\sigma_1)}d\tau| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_2(a_1+\varepsilon)}{\sin\alpha(\lambda_2+\sigma_1)}l|\mathbf{c}|,$$

из которых получается неравенство (40) при

$$L = \frac{a_2(a_1+\varepsilon)}{\sin\alpha(\lambda_2+\sigma_1)}.$$

Аналогично доказывается

Лемма 3.2. *Для любого числа* $\varepsilon > 0$ *и любого* $\sigma_2 \in (0, \lambda_2)$ *существуют число* $L_1 > 0$*, зависящее только от свойств системы (39) и матрица* $\mathbf{G}(t) \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$*, обладающие следующими свойствами:*

- $\mathbf{G}(t)$ *— непрерывна по* $t \in [t_i, t_{i+1}]$.
- *Для всех* $t \in [t_i, t_{i+1}]$ *выполняется неравенство*
$$|\mathbf{G}(t)| \leqslant L_1 l. \tag{49}$$
- *Если вектор* $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$ *такой, что* $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{c} + \mathbf{G}(\bar t)\mathbf{c}$*, при некоторых* $\bar t \in (t_i, t_{i+1})$*,* $\mathbf{c} \in M^u(\bar t)$*, то выполняется неравенство*
$$|\mathbf{x}(t, \bar t, \overline{\mathbf{x}})| \leqslant (a_2+\varepsilon)|\mathbf{c}|e^{\sigma_2(t-\bar t)}, \tag{50}$$
при $t \leqslant \bar t$*,* $t \in [t_i, t_{i+1}]$*, где* $\mathbf{x}(t, \bar t, \overline{\mathbf{x}})$ *— решение системы (31) такое, что* $\mathbf{x}(\bar t, \bar t, \overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}}$.

Если выполняются следующие неравенства:

$$l < \frac{\varepsilon \sin\alpha(\lambda_1+\sigma_2)(\lambda_2-\sigma_2)}{(a_2+\varepsilon)(a_2(\lambda_1+\sigma_2)+a_1(\lambda_2-\sigma_2))}, \tag{51}$$

$$l < \frac{\sin\alpha(\lambda_1+\sigma_2)(\lambda_2-\sigma_2)}{a_2(\lambda_1+\sigma_2)+a_1(\lambda_2-\sigma_2)}. \tag{52}$$

Теперь используя условия и обозначения лемм 3.1 и 3.2 сформулируем теорему.

Теорема 3.3. *Если для системы* (37) *выполнены неравенства* $lL < 1$, $lL_1 < 1$, (38), (45), (47), (51), *и* (52), *то система* (37) *—* $(\sigma_1, \sigma_2, (a_1+\varepsilon), (a_2+\varepsilon))$*-гиперболична на промежутке* $[t_i, t_{i+1}]$*. Причем если* $N^s(t)$ *и* $N^u(t)$ *— устойчивое и неустойчивое подпространства системы (37) соответственно, то существуют линейные биективные отображения* $\mathbf{F_1}(t) : M^s(t) \to N^s(t)$ *и* $\mathbf{G_1}(t) : M^u(t) \to N^u(t)$ *такие, что* $\mathbf{F_1}(t) = I + \mathbf{F}(t)$ *и* $\mathbf{G_1}(t) = I + \mathbf{G}(t)$*, где* I *— тождественная биекция, а* $\mathbf{F}(t)$ *и* $\mathbf{G}(t)$ *определены при формулировке и доказательстве лемм 3.1 и 3.2.*

Доказательство. Если выполнены условия теоремы, то существуют линейные отображения $\mathbf{F}(t)$ и $\mathbf{G}(t)$, со свойствами, сформулированными в леммах 3.1 и 3.2. Из того что, выполняются неравенства $lL < 1$, $lL_1 < 1$, можно заключить, что существуют ${\mathbf{F_1}}^{-1}(t)$ и ${\mathbf{G_1}}^{-1}(t)$, следовательно $\mathbf{F_1}(t)$ и $\mathbf{G_1}(t)$ — линейные биективные отображения и образы $\mathbf{F_1}(t)M^s(t) = N^s(t)$ и $\mathbf{G_1}(t)M^u(t) = N^u(t)$, обладают теми же свойствами что, и $M^s(t)$ и $M^u(t)$, в частности, имеют с ними одинаковую размерность. Так же для любого вектора $\overline{\mathbf{x}} \in N^s(\overline{t})$ выполняется неравенство

$$|\mathbf{x}(t, \overline{t}, \overline{\mathbf{x}})| \leqslant (a_1 + \varepsilon)|\mathbf{c}|e^{-\sigma_1(t-\overline{t})},$$

при $t \geqslant \overline{t}$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, где $\mathbf{x}(t, \overline{t}, \overline{\mathbf{x}})$ — решение системы (37) такое, что $\mathbf{x}(\overline{t}, \overline{t}, \overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}}$, и для любого вектора $\overline{\mathbf{x}} \in N^u(\overline{t})$ выполняется неравенство

$$|\mathbf{x}(t, \overline{t}, \overline{\mathbf{x}})| \leqslant (a_2 + \varepsilon)|\mathbf{c}|e^{\sigma_2(t-\overline{t})},$$

при $t \leqslant \overline{t}$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, где $\mathbf{x}(t, \overline{t}, \overline{\mathbf{x}})$ — решение системы (37) такое, что $\mathbf{x}(\overline{t}, \overline{t}, \overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}}$. Следовательно, система (37) — $(\sigma_1, \sigma_2, (a_1 + \varepsilon), (a_2 + \varepsilon))$-гиперболична на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$.

Замечание. Из построения линейных отображений $\mathbf{F_1}(t)$ и $\mathbf{G_1}(t)$ видно, что для любого вектора $\mathbf{x} \in M^s(t)$ выполняется неравенство $\sin\angle(\mathbf{x}, \mathbf{F_1}(t)M^s(t)) \leqslant lL$, и для любого вектора $\mathbf{x} \in M^u(t)$ выполняется неравенство $\sin\angle(\mathbf{x}, \mathbf{G_1}(t)M^u(t)) \leqslant lL1$.

Из приведенных выше лемм и теоремы заключаем, что используя приближенную фундаментальную матрицу решений можно проверять условия леммы 1.1.

Список литературы

[1] *Васильев В.А.* Условия существования решения системы дифференциальных уравнений, близкого к приближенному решению // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 3. С. 310-321.

[2] *Pliss V.A.* The existence of a true solution of a differential equation in the neighbourhood of an approximate solution // Journal of Differential Equations // Journal of Differential Equations. 2005. № 208. P. 64-85.