ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2010
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77–39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

ГЛАДКИЕ ДИФФЕОМОРФИЗМЫ С БЕСКОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ УСТОЙЧИВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТОЧЕК [1]

Е. В. Васильева

В предлагаемой работе рассматривается диффеоморфизм f плоскости в себя класса C^r (где $1 < r < \infty$). Предполагается, что f имеет седловую неподвижную точку в начале координат и нетрансверсальную гомоклиническую точку. Ранее в статьях [1,2] были даны условия, при которых диффеоморфизм класса C^1 имеет бесконечно много устойчивых периодических точек с характеристическими показателями, отделенными от нуля. Цель данной работы – показать, что этот же результат может иметь место для диффеоморфизма произвольного конечного класса гладкости. Ранее, в книге [3] был приведен пример такого диффеоморфизма. В работах [4,5,6] показано, что при выполнении определенных условий, наложенных на характер касания устойчивого и неустойчивого многообразия точки 0, диффеоморфизм класса C^r (где $1 < r < \infty$) имеет бесконечное множество устойчивых периодических точек, но один из характеристических показателей стремится к нулю с ростом периода. Таким образом, способ касания устойчивого и неустойчивого многообразий в нашем случае отличается от соответствующего способа, изложенного в работах [4, 5, 6].

Пусть f — диффеоморфизм с указанными свойствами, т. е.

$$f(0) = 0. \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 08-01-00346 и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России 2010-1.1-111-128-033.

Считаем, что f линеен в некоторой окрестности начала координат V, а, именно в V, f имеет следующий вид

$$f(x, y) = (\lambda x, \mu y), \tag{2}$$

где $0 < \lambda < 1 < \mu$.

Предположим, что

$$\lambda\mu < 1. \tag{3}$$

Пусть точка p из окрестности V принадлежит орбите гомоклинической точки. Обозначим через $q = f^n(p)$, где n натуральное число такое, что $f^n(p) \in V$. Считаем, что $p = (0, y_0)$, $q = (x_0, 0)$. Таким образом, точка p лежит на неустойчивом многообразии точки 0, а q – на устойчивом. Предположим, что

$$x_0 > 0, \; y_0 > 0. \tag{4}$$

Пусть U – окрестность точки p, такая, что

$$U \subset V, \quad f^n(U) \subset V.$$

Обозначим, через L следующее сужение

$$f^n|_U = L.$$

Пусть в окрестности U отображение L имеет следующий вид

$$L(x, y) = (ax + b(y - y_0) + x_0, cx + g(y - y_0)), \; a, b, c \in R, \; bc < 0. \tag{5}$$

Функция g определена в некоторой окрестности нуля и имеет такой же класс гладкости, что и исходный диффеоморфизм.

Опишем свойства функции g с помощью последовательностей. Пусть последовательность σ_k положительна, убывает и стремится к нулю, а последовательность ℓ_k, где $\ell_k \in N$, $k = 1, 2, \ldots,$ – неограниченно возрастает. Из дальнейших рассуждений станет ясно, что чем выше класс гладкости функции g, тем быстрее ℓ_k должны стремиться к бесконечности.

Определим последовательность α_k следующим образом

$$\alpha_k = \mu^{-\ell_k}(y_0 + \sigma_k) + \lambda^{\ell_k} c \frac{x_0 + b\sigma_k}{1 - \lambda^{\ell_k} a}. \tag{6}$$

Ясно, что α_k убывают, начиная с некоторого номера, и стремятся к нулю.

Пусть функция g удовлетворяет следующим условиям:

1) g – r раз непрерывно дифференцируемая функция в окрестности нуля (где $r < \infty$);

2) $g(\sigma_k) = \alpha_k$;

3) $g'(\sigma_k) = 0$, для любого k.

Свойства (7) функции g определяют характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий неподвижной точки в точке q.

Из условий (7) следуют соотношения

$$g(0) = g'(0) = g''(0) = \ldots = g^{(r)} = 0;$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mu^{-\ell_k}}{\sigma_k^m} = 0, \quad \text{где} \quad m = 0, 1, \ldots, r.$$

Характер касания устойчивого и неустойчивого многообразий, определенный условиями (7), отличается от характера касания этих многообразий, рассмотренного ранее, например, в работах [4, 5, 6] тем, что в этих работах изначально предполагалось наличие натурального числа $i > 1$ такого, что

$$g(0) = g'(0) = \cdots = g^{(i-1)}(0) = 0, \; g^{(i)} \neq 0.$$

Функцию g, удовлетворяющую условиям (7), можно построить следующим образом. Пусть $h_k(t)$ – неотрицательные, не равные тождественно нулю, функции, определенные и $(r-1)$ раз непрерывно дифференцируемые на промежутках $[\sigma_{k+1}, \sigma_k]$ (каждая определена на своем промежутке). Кроме того, пусть выполнено

$$h_k^{(m)}(\sigma_{k+1} = h_k^{(m)}(\sigma_k) = 0, \quad \text{для любого} \quad m = 0, 1, \ldots, r-1. \tag{8}$$

Обозначим через $I_k, \bar{h}_k, \bar{h}_{k,m}$, и H_k – следующие положительные последовательности

$$\begin{aligned} &I_k = \int\limits_{\sigma_k+1}^{\sigma_k} h_k(t)dt, \\ &\bar{h}_k = \max|h_k(t)|, \quad \text{где} \quad t \in [\sigma_{k+1}, \sigma_k], \\ &\bar{h}_{k,m} = \max|h_k^{(m)}(t)|, \quad \text{где} \quad t \in [\sigma_{k+1}, \sigma_k], \\ &H_k = \max\{\bar{h}_k, \bar{h}_{k,m}\}, \quad \text{где} \quad m = 1, 2, \ldots, r-1. \end{aligned} \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что справедливы следующие неравенства

$$\bar{h}_{k,m} \geqslant \frac{\bar{h}_k}{(\sigma_k - \sigma_{k+1})^m},$$

где $m = 1, 2, \ldots, r-1$.

$$H_k \geqslant \frac{\bar{h}_k}{(\sigma_k - \sigma_{k+1})^{(r-1)}},$$
$$I_k \leqslant \bar{h}_k(\sigma_k - \sigma_{k+1}). \tag{10}$$

Определим еще одну неограниченно возрастающую последовательность

$$\varphi_k = \frac{1}{\ln \mu} \ln\left(\frac{H_k}{I_k \sigma_{k+1}}\right). \tag{11}$$

Из условий (10) следует, что $\varphi_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Пусть последовательность ℓ_k, введенная ранее в соотношениях $(6, 7)$, удовлетворяет условию

$$\lim_{k\to\infty} (\ell_k - \varphi_k) = +\infty. \tag{12}$$

Например, в качестве ℓ_k можно взять $\ell_k = max_{1 \leqslant j \leqslant k}[\varphi_j] + 1 + \theta_k$, где $[\ldots]$ – целая часть числа, а θ_k – произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел. Если выполнено (12), то из условий $(6, 11)$ получим, что следующие пределы равны нулю, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mu^{-\ell_k} H_k}{I_k \sigma_{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(\alpha_k - \alpha_{k+1}) H_k}{I_k \sigma_{k+1}} = 0. \tag{13}$$

Определим функцию g на промежутке $(0, \sigma_0]$, как

$$g(x) = \frac{\alpha_k - \alpha_{k+1}}{I_k} \int\limits_{\sigma_{k+1}}^{x} h_k(t)dt + \alpha_{k+1}, \quad \text{где} \quad x \in [\sigma_{k+1}, \sigma_k]. \tag{14}$$

Ясно, что, определенная таким образом функция g имеет r непрерывных производных на $(0, \sigma_0]$. Покажем, что g и r ее производных непрерывны в точке 0 и равны в ней нулю. Для этого рассмотрим произвольную положительную последовательность u_k, стремящуюся к нулю. По любому k можно найти номер j_k такой, что $u_k \in [\sigma_{j_k+1}, \sigma_k)$, при этом ясно, что $j_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Рассмотрим $g(u_k)$ с учетом (14), получим

$$g(u_k) = \frac{\alpha_{j_k} - \alpha_{j_k+1}}{I_{j_k}} \int\limits_{\sigma_{j_k}}^{u_k} h_{j_k}(t)dt + \alpha_{j_k+1},$$

откуда $\alpha_{j_k+1} \leqslant g(u_k) < \alpha_{j_k} x$. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} g(u_k) = 0.$$

В силу произвольного выбора u_k имеем

$$\lim_{k\to 0} g(x) = 0.$$

Таким образом, полагая $g(0) = 0$, получим, что функция g непрерывна на $[0, \sigma_0]$.

Покажем, что все производные функции g до порядка r включительно непрерывны в точке 0. Для этого зафиксируем $1 \leqslant m \leqslant r$ и рассмотрим $g^{(m)}(x)$. Ясно, что эта производная существует и непрерывна на $(0, \sigma_0]$, покажем ее непрерывность в точке 0. Для этого, также, рассмотрим произвольную положительную последовательность u_k, стремящуюся к нулю. Аналогично, существует последовательность $j_k \to +\infty$ при $k \to \infty$ такая, что $u_k \in [\sigma_{j_k+1}, \sigma_{j_k})$. В силу (14) имеем

$$g^{(m)}(x) = \frac{\alpha_{j_k} - \alpha_{j_k+1}}{I_{j_k}} h_{j_k}^{(m-1)}(u_k),$$

откуда, учитывая (13), получим

$$|g^{(m)}(u_k)| \leqslant \frac{\alpha_{j_k} - \alpha_{j_k+1}}{I_{j_k}} H_{j_k},$$

следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} g^{(m)}(u_k) = 0.$$

Аналогично, полагая $g^{(m)}(0) = 0$, можем считать, что все $g^{(m)}(x)$ непрерывны в точке 0.

Докажем существование производных функции g в точке 0.

Еще раз рассмотрим произвольную положительную последовательность u_k, стремящуюся к нулю. Так же, как и ранее, найдутся $j_k \to \infty$ при $k \to \infty$ такие, что $u_k \in [\sigma_{j_k+1}, \sigma_{j_k})$. Рассмотрим

$$\frac{g(u_k)}{u_k} = \frac{\alpha_{j_k} - \alpha_{j_k+1}}{u_k I_{j_k}} \int\limits_{\sigma_{j_k+1}}^{u_k} h_{j_k}(t)dt + \frac{\alpha_{j_k+1}}{u_k} \leqslant \frac{\alpha_{j_k}}{u_k} \leqslant \frac{\alpha_{j_k}}{\sigma_{j_k+1}}.$$

В силу условий (10) и (13) имеем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g(u_k)}{u_k} = 0,$$

откуда, в силу произвольного выбора u_k, получим

$$\lim_{k\to 0} \frac{g(x)}{x} = 0. \tag{15}$$

Из условия (15) следует, что функция g, определенная и непрерывная на $[0, \sigma_0]$, имеет в точке 0 непрерывную производную равную нулю.

Аналогично, зафиксируем $1 \leqslant m \leqslant r-1$ и выберем произвольную положительную последовательность u_k, стремящуюся к нулю. Оценим следующую величину

$$\left| \frac{g^{(m)}(u_k)}{u_k} \right| \leqslant \frac{\alpha_{j_k+} - \alpha_{j_k}}{I_{j_k} u_k} \bar{h}_{j_k,(m-1)} \leqslant \frac{(\alpha_{j_k+1} - \alpha_{j_k}}{I_{j_k} u_k} H_{j_k}.$$

Следовательно, учитывая (13), получим

$$\lim_{k \to \infty} \frac{g^{(m)}(u_k)}{u_k} = 0, \quad \text{где} \quad m = 1, 2, \ldots, r-1,$$

откуда, в силу произвольного выбора u_k, имеем

$$\lim_{k \to 0} \frac{g^{(m)}(x)}{x} = 0, \quad \text{где} \quad m = 1, 2, \ldots, r-1.$$

Таким образом, функция g имеет r непрерывных производных на $[0, \sigma_0]$.

Заметим, что функция g, определенная выше, имеет в точке 0 производную $(r+1)$ порядка, равную нулю.

Доопределим функцию g, заданную формулами (14), на всем промежутке $[-\sigma_0, \sigma_0]$ с учетом гладкости, т. е. она должна иметь r непрерывных производных. Очевидно, что построенная таким образом функция g удовлетворяет условиям (7).

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть f диффеоморфизм плоскости в себя класса C^r (где $r < \infty$) с седловой неподвижной точкой в начале координат. Пусть выполнены условия (1) – (7), тогда в любой окрестности точки* p *лежит счетное множество устойчивых периодических точек диффеоморфизма f с отрицательными характеристическими показателями, отделенными от нуля.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $p_k = (x_k, y_k)$, где

$$x_k = \lambda^{\ell_k} \frac{x_0 + b\sigma_k}{1 - \lambda^{\ell_k} a},$$
$$y_k = y_0 + \sigma_k.$$

Свойства последовательностей ℓ_k и σ_k были указаны ранее. Ясно, что $p_k \to p$ при $k \to \infty$. Считаем, что $p_k \in U$ для любого k.

Учитывая условия $(2, 5, 6, 7)$, легко убедиться в справедливости следующего равенства

$$f^{\ell_k} L(x_k, y_k) = (x_k, y_k).$$

Следовательно, p_k – периодические точки диффеоморфизма f с периодами $\ell_k + n$.

Обозначим через $\rho_1(k), \rho_2(k)$ – собственные числа следующей матрицы

$$Df^{\ell_k} L(p_k) = \begin{pmatrix} \lambda^{\ell_k} a & \lambda^{\ell_k} b \\ \mu^{\ell_k} c & \mu^{\ell_k} g'(\sigma_k). \end{pmatrix}$$

С учетом условий (7), имеем

$$\rho_{1,2}(k) = \frac{\lambda^{\ell_k} a}{2} \pm \frac{(\lambda^{2\ell_k} a^2 + 4(\lambda\mu)^{\ell_k} bc)^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

В силу условий $(3, 5)$, эти собственные числа являются комплексно сопряженными величинами при достаточно больших номерах k.

Характеристические показатели периодических точек $\gamma_i(k)$ определяются как

$$\gamma_i(k) = \frac{1}{\ell_k + n} \ln |\rho_i(k)|, \quad \text{где} \quad i = 1, 2.$$

Следовательно,

$$\gamma_i(k) = \frac{1}{\ell_k + n} \left[\frac{\ell_k}{2} \ln(\lambda\mu) + \frac{1}{2} \ln(-4bc) \right], \quad \text{где} \quad i = 1, 2.$$

Из последнего равенства имеем

$$\lim_{k\to\infty} \gamma_i(k) = \frac{1}{2} \ln(\lambda\mu), \quad \text{где} \quad i = 1, 2.$$

Согласно условию (3) $\ln(\lambda\mu) < 0$, следовательно, характеристические показатели отрицательны и отделены от нуля.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева Е. В. К вопросу устойчивости периодических точек, лежащих в окрестности гомоклинической точки // Доклады Академии наук. 2005. Т. 400, № 2. С. 151–152.

2. Васильева Е. В. Устойчивые периодические точки двумерных диффеоморфизмов класса // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. Вып. 2. С. 20–26.

3. Плисс В. А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977. 304 с.

4. Иванов Б. Ф. Устойчивость траекторий, не покидающих окрестность гомоклинической точки // Дифференц. уравнения. 1979. Т. XV, № 8. С. 1411–1419.

5. Гонченко С. В., Шильников Л. П. О динамических системах с негрубыми гомоклиническими кривыми // Доклады Академии наук. 1986. Т. 286, № 5. С. 1049–1053.

6. Newhouse Sh. Diffeomorphisms with infinitely many sinks // Topology. 1973. V.12, p. 9–18.