ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2009
Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172

http://www.neva.ru/journal
http://www.math.spbu.ru/diffjournal/
e-mail: jodiff@mail.ru

Н.А. Бодунов, Г.И. Вольфсон

ЛОКАЛЬНАЯ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМ ПАРАМЕТРОМ

Рассмотрим модель, описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(t, x, p), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^m$.

Мы предполагаем, что вектор-функция f, стоящая в правой части системы (1), непрерывна по совокупности переменных (t, x, p) и непрерывно дифференцируема по переменным (x, p) в области D пространства $\mathbb{R}^{1+n+m}$.

В изучаемой постановке задачи параметр p является непрерывной функцией от t, принадлежащей некоторому классу функций $\mathcal{P}$, определенных на фиксированном промежутке $[0, T]$. Введем обозначение $\{p\} = \{p(t) : t \in [0; T]\}$.

Фиксируем вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и обозначим через $x(t, \{p\})$ решение задачи Коши с начальными данными $(0, x_0)$ для системы (1), в которой зафиксирован параметр-функция $p \in \mathcal{P}$.

Мы учитываем, что значение $x(t_0, \{p\})$ при $t_0 \in [0, T]$ зависит лишь от значений $p(t)$ при $t \in [0, t_0]$.

Наше основное предположение о классе $\mathcal{P}$ таково: для любой функции $p \in \mathcal{P}$ решение $x(t, \{p\})$ единственно и определено на всем промежутке $[0, T]$.

Для любой функции $q(t)$, $t \in [0,T]$, мы обозначаем

$$\|q\| = \sup_{t\in[0,T]} |q(t)|.$$

Определение 1. Пусть $p_1,\ p_2 \in \mathcal{P}$. Будем говорить, что пара (p_1, p_2) различима по наблюдению решения $x(t, \{p\})$ в точке T, если

$$x(T, \{p_1\}) \neq x(T, \{p_2\}).$$

В дальнейшем, для краткости будем говорить просто "пара (p_1, p_2) различима". Отметим, что вектор x_0 предполагается фиксированным для всех рассматриваемых решений $x(t, \{p\})$.

Определение 2. Система (1) называется локально идентифицируемой при $p_0 \in \mathcal{P}$, если существует такое $\epsilon > 0$, что если $p \in \mathcal{P}$ и $0 < \|p_0 - p\| < \epsilon$, то пара (p_0, p) различима.

Постановка вопроса о локальной идентифицируемости в задаче об идентифицируемости решения по наблюдениям на концах промежутка была исследована в монографии [1]. Исследование проводилось в том случае, когда параметр-функция p – постоянная или кусочно-постоянная на отрезке $[0,T]$. Основным отличием данной постановки задачи от постановки задачи в [1] является то, что мы не предполагаем постоянство или кусочное постоянство параметр-функции p.

Пусть $\mathcal{K}$ - некоторый класс функций, заданных на $[0,T]$.

Определение 3. Фиксируем $p_0 \in \mathcal{P}$. Будем говорить, что семейство $\mathcal{P}$ нормированно отделено от $\mathcal{K}$ в p_0, если из любой последовательности элементов $p_k \in \mathcal{P}$, обладающей свойствами $\|p_k - p_0\| > 0$ и $\|p_k - p_0\| \to 0, k \to \infty$, можно выбрать такую подпоследовательность p_{k_l}, что последовательность $\frac{p_{k_l}-p_0}{\|p_{k_l}-p_0\|}$ равномерно сходится на $[0,T]$ к некоторой функции, не принадлежащей классу $\mathcal{K}$.

Фиксируем $p_0 \in \mathcal{P}$.

Предположим, что

$$\{(t, x(t, \{p_0\}), p_0(t)) : t \in [0,T]\} \subset D. \qquad (2)$$

Пусть $Y(t)$ - фундаментальная матрица линейной системы

$$\dot{y} = \frac{\partial f(t, x(t, \{p_0\}), p_0)}{\partial x} y, \tag{3}$$

удовлетворяющая начальному условию

$$Y(0) = E,$$

где E - единичная матрица размера $n \times n$.

Рассмотрим линейный функционал

$$\Psi : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^n,$$

заданный формулой

$$\Psi(p) = \int\limits_0^T Y^{-1}(s) \cdot \frac{\partial f}{\partial p}(s, x(s, \{p_0\}), p_0(s)) p(s) ds, \tag{4}$$

и обозначим через $\mathcal{K}$ ядро функционала Ψ.

Основной результат статьи таков.

Теорема. Если семейство $\mathcal{P}$ нормированно отделено от $\mathcal{K}$ в p_0, то система (1) локально идентифицируема при параметр-функции p_0.

Доказательство.

Обозначим малое изменение параметра p_0 через Δp:

$$p(t) = p_0(t) + \Delta p(t).$$

Также введем обозначение:

$$\Delta x(t) = x(t, \{p\}) - x(t, \{p_0\}).$$

Докажем, что для $\Delta x(T)$ имеет место следующее представление:

$$\Delta x(T) = Y(T) \cdot \Psi(\Delta p) + G(\Delta p), \tag{5}$$

где

$$\frac{|G(\Delta p)|}{\|\Delta p\|} \to 0 \text{ при } \|\Delta p\| \to 0. \tag{6}$$

Подставим $x(t, \{p_0\})$ в (1) и проинтегрируем результат на промежутке $[0, t]$:

$$x(t, \{p_0\}) = x_0 + \int\limits_0^t f(s, x(s, \{p_0\}), p_0(s))ds. \tag{7}$$

Аналогично, верно равенство

$$x(t, \{p\}) = x_0 + \int\limits_0^t f(s, x(s, \{p\}), p(s))ds.$$

Перепишем это равенство, подставив $p_0(t) + \Delta p(t)$ вместо $p(t)$:

$$x(t, \{p_0 + \Delta p\}) = x_0 + \int\limits_0^t f(s, x(s, \{p_0 + \Delta p\}), (p_0 + \Delta p)(s))ds. \tag{8}$$

Вычитая из равенства (8) равенство (7), получаем равенство

$$\Delta x(t) = \int\limits_0^t [f(s, x(s, \{p_0 + \Delta p\}), (p_0 + \Delta p)(s)) - f(s, x(s, \{p_0\}), p_0(s))]ds. \tag{9}$$

Покажем, что для $\Delta x(t)$ имеет место представление

$$\Delta x(t) = \int\limits_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, \{p_0\}), p_0(s)) \cdot \Delta x(s)ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \frac{\partial f}{\partial p}(s, x(s, \{p_0\}), p_0(s)) \cdot \Delta p(s)ds + \Gamma(t) \tag{10}$$

для любого $t \in [0, T]$, причем

$$\frac{1}{\|\Delta p\|} \cdot \left| \frac{d\Gamma}{dt}(t) \right| \rightrightarrows 0 \text{ при } \|\Delta p\| \to 0, \; t \in [0, T]. \tag{11}$$

Распишем подынтегральную функцию из правой части равенства (9) в первом приближении:

$$f(s,x(s,\{p_0\})+\Delta x(s),(p_0+\Delta p)(s))-f(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))\cdot\Delta x(s)+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial p}(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))\cdot\Delta p(s)+\alpha(s,\Delta x(s),\Delta p(s)). \tag{12}$$

Из формулы (12) следует, что

$$\alpha(s,\Delta x(s),\Delta p(s))=f(s,x(s,\{p_0\})+\Delta x(s),(p_0+\Delta p)(s))-$$

$$-f(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))-\frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))\cdot\Delta x(s)-$$

$$-\frac{\partial f}{\partial p}(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))\cdot\Delta p(s).$$

Подставим результат (12) в равенство (9):

$$\Delta x(t)=\int\limits_0^t\frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))\cdot\Delta x(s)ds+$$

$$+\int\limits_0^t\frac{\partial f}{\partial p}(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))\cdot\Delta p(s)ds+\int\limits_0^t\alpha(s,\Delta x(s),\Delta p(s))ds. \tag{13}$$

Оценим $\alpha(s,\Delta x(s),\Delta p(s))$:

$$|\alpha(s,\Delta x(s),\Delta p(s))|=|f(s,x(s,\{p_0\})+\Delta x(s),(p_0+\Delta p)(s))-$$

$$-f(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))-\frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))\cdot\Delta x(s)-$$

$$-\frac{\partial f}{\partial p}(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))\cdot\Delta p(s)|\leq$$

$$\leq|f(s,x(s,\{p_0\})+\Delta x(s),(p_0+\Delta p)(s))-f(s,x(s,\{p_0\}),(p_0+\Delta p)(s))-$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s,\{p_0\}),(p_0+\Delta p)(s))\cdot\Delta x(s)|+$$

$$+\left|\left[\frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s,\{p_0\}),(p_0+\Delta p)(s))-\frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))\right]\cdot\Delta x(s)\right|+$$

$$+|f(s,x(s,\{p_0\}),(p_0+\Delta p)(s))-f(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))-$$
$$-\frac{\partial f}{\partial p}(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))\cdot\Delta p(s)|. \qquad (14)$$

Введем обозначение:

$$g(\theta)=f(s,x(s,\{p_0\})+\theta\cdot\Delta x(s),(p_0+\Delta p)(s)),\ \theta\in[0,1].$$

С учетом введенного обозначения преобразуем первое выражение в правой части формулы (14).

Верно равенство

$$f(s,x(s,\{p_0\})+\Delta x(s),(p_0+\Delta p)(s))-f(s,x(s,\{p_0\}),(p_0+\Delta p)(s))=$$
$$=g(1)-g(0)=\int_0^1\frac{\partial g}{\partial\theta}d\theta=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s,\{p_0\})+\theta\Delta x(s),(p_0+\Delta p)(s))\times$$
$$\times\Delta x(s)d\theta.$$

Заметим также, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s,\{p_0\}),(p_0+\Delta p)(s))\cdot\Delta x(s)=$$
$$=\int_0^1\left[\frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s,\{p_0\}),(p_0+\Delta p)(s))\cdot\Delta x(s)\right]d\theta.$$

Таким образом,

$$f(s,x(s,\{p_0\})+\Delta x(s),(p_0+\Delta p)(s))-f(s,x(s,\{p_0\}),(p_0+\Delta p)(s))-$$
$$-\frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s,\{p_0\}),(p_0+\Delta p)(s))\cdot\Delta x(s)=$$
$$=\int_0^1[\frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s,\{p_0\})+\theta\Delta x(s),(p_0+\Delta p)(s))-$$
$$-\frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s,\{p_0\}),(p_0+\Delta p)(s))]\cdot\Delta x(s)d\theta.$$

Рассмотрим компактное подмножество M_a пространства $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, заданное так:

$$M_a=\{(t,x,p):t\in[0,T],|x-x(t,\{p_0\})|\le a,|p-p_0(t)|\le a\},$$

где $a > 0$. Из (2) следует, что a можно выбрать столь малым, чтобы выполнялось включение $M_a \in D$.

Так как f непрерывно дифференцируема по x, то $\frac{\partial f}{\partial x}$ равномерно непрерывна на компакте M_a. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta \in (0, a)$, что если $|\Delta x(s)|, |\Delta p(s)| \le \delta$, то

$$|\frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, \{p_0\}) + \theta \Delta x(s), (p_0 + \Delta p)(s)) - \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, \{p_0\}), (p_0 + \Delta p)(s))| < \epsilon$$

для любых $\theta \in [0, 1]$ и $s \in [0, T]$.

Так как p равномерно стремится к p_0 при $\|\Delta p\| \to 0$, то по теореме о непрерывной зависимости решений от начальных данных и параметров решение $x(t, \{p_0 + \Delta p\})$ равномерно стремится к $x(t, \{p_0\})$ на $[0, T]$.

Поэтому существует такое $\delta_1 > 0$, что если $\|\Delta p\| < \delta_1$, то выполняются неравенства

$$|x(t, \{p_0 + \Delta p\}) - x(t, \{p_0\})| \le \delta \text{ при } t \in [0, T],$$

то есть точки $(t, x(t, \{p_0 + \Delta p\}), (p_0 + \Delta p)(t))$ и $(t, x(t, p_0), (p_0 + \Delta p)(t))$ лежат в множестве M_a и $|\Delta x(s)| \le \delta$, $s \in [0, T]$.

Тогда

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, \{p_0\}) + \theta \Delta x(s), (p_0 + \Delta p)(s)) - \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, \{p_0\}), (p_0 + \Delta p)(s))\right\| \times$$
$$\times |\Delta x(s)| < \epsilon \cdot |\Delta x(s)|.$$

Из этого следует, что если $\|\Delta p\| \le \delta_1$, то

$$|f(s, x(s, \{p_0\}) + \Delta x(s), (p_0 + \Delta p)(s)) - f(s, x(s, \{p_0\}), (p_0 + \Delta p)(s)) -$$
$$-\frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, \{p_0\}), (p_0 + \Delta p)(s)) \cdot \Delta x(s)| \le \epsilon \cdot \|\Delta x\|. \qquad (15)$$

Теперь аналогично оценим второе выражение в правой части выражения (14). Так как $\frac{\partial f}{\partial x}$ равномерно непрерывна на компакте M_a, то для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta \in (0, a)$, что если $\|\Delta p\| \le \delta$, то

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, \{p_0\}), (p_0 + \Delta p)(s)) - \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, \{p_0\}), p_0(s))\right\| < \epsilon.$$

Из этого следует, что если $\|\Delta p\| \le \delta$, то верна оценка:

$$\left|\left[\frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s,\{p_0\}),(p_0+\Delta p)(s)) - \frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))\right]\cdot \Delta x(s)\right| \le \epsilon\cdot\|\Delta x\|. \tag{16}$$

Аналогичным образом оценим и третье слагаемое в правой части выражения (14).

Введем обозначение:

$$h(\theta) = f(s,x(s,\{p_0\}),(p_0+\theta\cdot\Delta p)(s)),\ \theta\in[0,1].$$

С учетом введенного обозначения преобразуем третье выражение в правой части формулы (14).

Верно равенство

$$\begin{gathered} f(s,x(s,\{p_0\}),(p_0+\Delta p)(s)) - f(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s)) = \\ = h(1)-h(0) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial\theta}d\theta = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial p}(s,x(s,\{p_0\}),(p_0+\theta\cdot\Delta p)(s))\times \\ \times\Delta p(s)d\theta. \end{gathered}$$

Заметим также, что

$$\frac{\partial f}{\partial p}(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))\cdot\Delta p(s) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial p}(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))\cdot\Delta p(s)d\theta.$$

Таким образом,

$$\begin{gathered} f(s,x(s,\{p_0\}),(p_0+\Delta p)(s)) - f(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s)) - \\ -\frac{\partial f}{\partial p}(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))\cdot\Delta p(s) = \\ = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial p}(s,x(s,\{p_0\}),(p_0+\theta\cdot\Delta p)(s))\cdot\Delta p(s)d\theta - \\ -\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial p}(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))\cdot\Delta p(s)d\theta = \\ = \int_0^1 \left\{\left[\frac{\partial f}{\partial p}(s,x(s,\{p_0\}),(p_0+\theta\cdot\Delta p)(s)) - \frac{\partial f}{\partial p}(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))\right]\cdot\Delta p(s)\right\}ds. \end{gathered}$$

Так как f непрерывно дифференцируема, то $\frac{\partial f}{\partial p}$ равномерно непрерывна на компакте M_a. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta \in (0, a)$, что если $|\Delta p(s)| \leq \delta$, то

$$\left|\frac{\partial f}{\partial p}(s, x(s, \{p_0\}), (p_0 + \theta \cdot \Delta p)(s)) - \frac{\partial f}{\partial p}(s, x(s, \{p_0\}), p_0(s))\right| < \epsilon.$$

Из этого следует, что если $\|\Delta p\| \leq \delta$, то верна оценка:

$$\left|\left[\frac{\partial f}{\partial p}(s, x(s, \{p_0\}), p_0 + \theta \cdot \Delta p) - \frac{\partial f}{\partial p}(s, x(s, \{p_0\}), p_0)\right]\right| \cdot \|\Delta p\| \leq \epsilon \cdot \|\Delta p\|. \quad (17)$$

Таким образом, из соотношений (15) - (17) следует, что для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $\|\Delta p\| < \delta$, то

$$|\alpha(s, \Delta x(s), \Delta p(s))| \leq \epsilon \cdot \|\Delta x\| + \epsilon \cdot \|\Delta x\| + \epsilon \cdot \|\Delta p\|;$$

это означает, что

$$\frac{|\alpha(s, \Delta x(s), \Delta p(s))|}{\|\Delta p\| + \|\Delta x\|} \rightrightarrows 0 \text{ при } \|\Delta p\| + \|\Delta x\| \to 0 \ , s \in [0, T].$$

Лемма 1. Верно соотношение

$$\frac{|\alpha(s, \Delta x(s), \Delta p(s))|}{\|\Delta p\|} \rightrightarrows 0 \text{ при } \|\Delta p\| \to 0 \ , s \in [0, T]. \quad (18)$$

Доказательство.

Оценим сверху функцию, стоящую в левой части равенства (9):

$$|\Delta x(t)| \leq \int\limits_0^t |f(s, x(s, \{p_0 + \Delta p\}), (p_0 + \Delta p)(s)) -$$

$$- f(s, x(s, \{p_0\}), p_0(s))| ds =$$

$$= \int\limits_0^t |f(s, x(s, \{p_0 + \Delta p\}), (p_0 + \Delta p)(s)) - f(s, x(s, \{p_0\}), (p_0 + \Delta p)(s)) +$$

$$+f(s,x(s,\{p_0\}),(p_0+\Delta p)(s))-f(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))|ds\le$$

$$\le\int\limits_0^t|f(s,x(s,\{p_0+\Delta p\}),(p_0+\Delta p)(s))-f(s,x(s,\{p_0\}),(p_0+\Delta p)(s))|ds+$$

$$+\int\limits_0^t|f(s,x(s,\{p_0\}),(p_0+\Delta p)(s))-f(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))|ds. \qquad (19)$$

Так как f непрерывно дифференцируема по x и p, то она липшицева по этим аргументам на множестве M_a. Обозначим соответствующую константу Липшица через L.

Будем считать, как и выше, что величина $\|\Delta p\|$ столь мала, что все аргументы рассматриваемых функций лежат в M_a.

Тогда

$$|f(s,x(s,\{p_0+\Delta p\}),(p_0+\Delta p)(s))-f(s,x(s,\{p_0\}),(p_0+\Delta p)(s))|\le$$

$$\le L\cdot\|\Delta x\|. \qquad (20)$$

Из того, что f липшицева и по третьему аргументу на множестве M_a, следует, что выполняется неравенство

$$|f(s,x(s,\{p_0\}),(p_0+\Delta p)(s))-f(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))|\le L\cdot\|\Delta p\|.$$

Из этого следует, что

$$\int\limits_0^t\|f(s,x(s,\{p_0\}),(p_0+\Delta p)(s))-f(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))\|ds\le t\cdot L\cdot\|\Delta p\|\le$$

$$\le T\cdot L\cdot\|\Delta p\|,\ t\in[0,T]. \qquad (21)$$

Подставим оценки (20) и (21) в (19):

$$|\Delta x(t)|\le L\cdot\int\limits_0^t|\Delta x(s)|ds+T\cdot L\cdot\|\Delta p\|.$$

Применяя к данному неравенству лемму Гронуолла, получаем следующую оценку:

$$|\Delta x(t)| \leq L \cdot \|\Delta p\| \cdot T \cdot e^{Lt}. \tag{22}$$

Заметим, что $e^{Lt} \leq e^{LT}$. Обозначим $c_1 = L \cdot T \cdot e^{LT}$ и подставим c_1 в (22):

$$|\Delta x(t)| \leq c_1 \cdot \|\Delta p\|.$$

Отсюда следует, что существует такое $\delta > 0$, что $\|\Delta x\| \leq c_1 \cdot \|\Delta p\|$ при $\|\Delta p\| < \delta$.

Таким образом, если величина $\|\Delta p\|$ достаточно мала, то

$$\Delta x(t) = \int\limits_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, \{p_0\}), p_0(s)) \cdot \Delta x(s) ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \frac{\partial f}{\partial p}(s, x(s, \{p_0\}), p_0(s)) \cdot \Delta p(s) ds + \int\limits_0^t \alpha(s, \Delta x(s), \Delta p(s)) ds, \tag{23}$$

и выполнено соотношение (18).

Лемма 1 доказана.

Введем обозначение:

$$\Gamma(t) = \int\limits_0^t \alpha(s, \Delta x(s), \Delta p(s)) ds.$$

Из Леммы 1 следует, что $\Delta x(t)$ может быть представлено в виде (10), и при этом выполнено соотношение (11).

Фиксируем вектор $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ и обозначим через $C^1_{\xi_0}[0,T]$ множество таких функций $\xi(t) \in C^1[0,T]$, что $\xi(0) = \xi_0$.

Рассмотрим оператор

$$\Phi : C^1_{\xi_0}[0,T] \to C^1_{\xi_0}[0,T],$$

заданный формулой

$$\Phi(\xi) = \xi(t) - \int\limits_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, \{p_0\}), p_0(s))\xi(s)ds, \tag{24}$$

где $t \in [0, T]$.

В нашем случае роль функции $\xi(t)$ будет играть $\Delta x(t)$; эта функция принадлежит классу $C^1[0, T]$ как разность решений.

Лемма 2. При любом ξ_0 оператор Φ обратим.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$\Phi(\xi) = \eta, \tag{25}$$

где η – произвольная функция, принадлежащая классу $C^1_{\xi_0}[0, T]$.

Покажем, что такое уравнение единственным образом разрешимо относительно ξ для любого η. Это и докажет существование оператора Φ^{-1}.

Продифференцируем равенство (25) по t:

$$\dot{\xi} - X(t) \cdot \xi = \dot{\eta},$$

где

$$X(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, \{p_0\}), p_0(t)).$$

Таким образом,

$$\dot{\xi} = X(t) \cdot \xi + \dot{\eta}. \tag{26}$$

Полученная система является линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений. Соответствующая ей однородная система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\dot{\xi} = X(t) \cdot \xi.$$

По формуле Лагранжа, учитывая введенное в начале обозначение, решение данной системы с начальными данными $(0, \xi_0)$ имеет вид:

$$\xi(t) = Y(t) \cdot (\xi_0 + \int_0^t Y^{-1}(s)\dot{\eta}(s)ds).$$

Так как функция $\dot\eta$ непрерывна, то из теоремы о единственности решения для линейных дифференциальных уравнений следует единственность функции $\xi(t)$, для которой выполнено равенство (26), а тем самым и единственность элемента $\xi \in C^1_{\xi_0}[0,1]$, удовлетворяющего равенству (25).

Таким образом,

$$\Phi^{-1}(\eta) = Y(t) \cdot (\xi_0 + \int_0^t Y^{-1}(s)\dot\eta(s)ds).$$

В дальнейшем мы будем применять обратный функционал Φ^{-1} при $\xi_0 = 0$. Он задается формулой

$$\Phi^{-1}(\eta) = Y(t) \cdot \int_0^t Y^{-1}(s)\dot\eta(s)ds. \tag{27}$$

Из формулы (27) следует, что существует такое $N > 0$, что

$$\|\Phi^{-1}(\eta)\| \le N \cdot \left\|\frac{d\eta}{dt}\right\|. \tag{28}$$

Рассмотрим $\xi(t) = \Delta x(t)$ и запишем формулу (10) в виде

$$\Phi(\xi) = \xi(t) - \int\limits_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s,\{p_0\}), p_0(s))\xi(s)ds =$$

$$= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial p}(s, x(s,\{p_0\}), (p_0)(s)) \cdot \Delta p(s)ds + \Gamma(t). \tag{29}$$

Применим к равенству (29) оператор Φ^{-1} (напомним, что мы рассматриваем $\xi_0 = 0$):

$$\xi(t) = Y(t) \cdot \int\limits_0^t Y^{-1}(s) \cdot \frac{\partial f}{\partial p}(s, x(s,\{p_0\}), p_0(s))\Delta p(s)ds + \Phi^{-1}(\Gamma)(t). \tag{30}$$

Подставим в (30) $t = T$ (учитывая вид функционала Ψ, введенного в (4)):

$$\xi(T) = Y(T) \cdot \Psi(\Delta p) + G(\Delta p), \tag{31}$$

где

$$G(\Delta p) = \Phi^{-1}(\Gamma)(T).$$

Из соотношения (11) и оценки (28) следует, что

$$\frac{|G(\Delta p)|}{\|\Delta p\|} \to 0 \text{ при } \|\Delta p\| \to 0. \tag{32}$$

Перейдем к доказательству основной теоремы.

Предположим противное: пусть существует такая последовательность $p_k \in \mathcal{P}$, что $p_k \not\equiv p_0$, $\|p_k - p_0\| \to 0$ при $k \to \infty$ и $x(T, \{p_0\}) = x(T, \{p_k\})$.

Так как $\|p_k - p_0\| \to 0$, то приведенные выше рассуждения применимы к функциям

$$\Delta_k x(t) = x(t, \{p_k\}) - x(t, \{p_0\})$$

при достаточно больших k.

Тогда при достаточно больших k выполняются равенства:

$$0 = Y(T) \cdot \Psi(\Delta p_k) + G(\Delta p_k), \tag{33}$$

где $\Delta p_k = p_k(t) - p_0(t)$.

Разделим равенство (33) на $\|\Delta p_k\|$:

$$0 = Y(T) \cdot \Psi\left(\frac{\Delta p_k}{\|\Delta p_k\|}\right) + \frac{G(\Delta p_k)}{\|\Delta p_k\|} \tag{34}$$

По предположению, семейство $\mathcal{P}$ нормированно отделено от $\mathcal{K}$ в p_0, поэтому существует такая подпоследовательность p_{k_l} последовательности p_k, что

$$\frac{\Delta p_{k_l}(t)}{\|\Delta p_{k_l}\|} \rightrightarrows r \text{ при } k_l \to \infty, t \in [0, T], \tag{35}$$

и $r \notin \mathcal{K}$.

Так как функционал Ψ непрерывен, из (35) следует, что

$$\Psi\left(\frac{\Delta p_{k_l}(t)}{\|\Delta p_{k_l}\|}\right) \to \Psi(r) \neq 0 \text{ при } k_l \to \infty, t \in [0, T]. \tag{36}$$

Матрица $Y(T)$ невырождена (как фундаментальная матрица), поэтому

$$Y(T) \cdot \Psi(r) \neq 0. \tag{37}$$

С другой стороны, из оценки (32) следует, что

$$\frac{|G(\Delta p_{k_l})|}{\|\Delta p_{k_l}\|} \to 0 \text{ при } k_l \to \infty. \tag{38}$$

Из (34) и (38) следует соотношение

$$0 = Y(T) \cdot \Psi(r) + 0,$$

противоречащее соотношению (37).

Теорема доказана.

Список литературы:

1. *Бодунов Н.А.* Введение в теорию локальной параметрической идентифицируемости // Изд-во С-Петерб. ун-та, 2006