

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 2, 2017

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>

e-mail: jodiff@mail.ru

Теория нелинейных колебаний

Бифуркация Неймарка-Сакера и динамика лазера с нелинейным поглотителем

Д.Ю.Волков

математико -механический факультет СПбГУ

Санкт-Петербург

e-mail: dmitrivolkov@mail.ru

К.В. Галунова

СПбГПУ

Санкт-Петербург

e-mail: dmitrivolkov@mail.ru

Аннотация

Статья посвящена изучению бифуркации состояния равновесия с парой чисто-мнимых собственных чисел и парой нулевых собственных чисел в системе, описывающей динамику лазера с нелинейным (просветляющимся) поглотителем. Как хорошо известно, лазер является системой, которая не только демонстрирует сложное поведение, но и может использоваться как модель для изучения общих закономерностей нелинейной динамики. Основное внимание уделяется вопросу о существовании инвариантных торов в окрестности состояния равновесия. Исследование проводится в два этапа. На первом этапе выводится усеченная нормальная форма системы. На втором этапе исследуется динамика полученной бифуркационной системы и устанавливается связь между решениями усеченной и полной систем. В работе используются теория нормальных форм и теория инвариантных многообразий.

Ключевые слова : Бифуркация Неймарка - Сакера, периодические решения, инвариантные торы.

Abstract

In this paper we investigate the dynamics associated with multiple bifurcation that arises in laser with saturable absorber (LSA). We study bifurcation of periodic solutions and invariant tori from an equilibrium point of LSA equations for which the linearisation has a pair of pure imaginary eigenvalues and a double zero eigenvalue of index two. The approach is based on the central manifold reduction and the method of normal forms.

Key words: Neimark - Saker bifurcation, periodic solution, invariant tori.

Введение В статье рассматривается система уравнений, описывающая лазер с нелинейным поглотителем (laser of saturable absorber, LSA). Как хорошо известно, такой лазер может демонстрировать большое разнообразие динамических режимов. Для теоретического описания такой системы разработано несколько моделей. Чаще всего рассматривают модели, в которых адиабатически исключена поляризация усиливающей и поглощающей сред. Такие модели описываются системами третьего порядка и они подробно описаны в литературе [1, 13, 9, 18, 19]. Мы рассматриваем более сложную неадиабатическую модель [1, 8, 10, 22, 27], которая описывается системой из пяти вещественных уравнений и исследуем бифуркацию ее нулевого состояния равновесия при таких значениях параметров, при которых система сводится к изучению системы уравнений

$$\dot{x} = A(\sigma)x + F(x, \sigma) \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^5$, $\sigma \in \mathbb{R}^s$, $F(x, \sigma) = O(|x|^2)$ и та часть спектра матрицы $A(0)$, которая лежит на мнимой оси, состоит из одной пары чисто мнимых собственных чисел и нулевого собственного числа, алгебраическая и геометрическая кратность которого равны двум. С точки зрения теории бифуркаций коразмерность этого случая равна четырем. В общей системе ее исследовать практически невозможно (частные случаи бифуркации состояния равновесия в общих диссипативных системах при наличии нескольких нулевых и чисто мнимых собственных числах и одномерном параметре рассмотрена в [28]). Но исходная LSA модель обладает определенной симметрией, которая позволяет упростить рассуждения.

В статье рассматриваются вопросы существования инвариантных торов и квазипериодических решений системы (1) в окрестности состояния равновесия. На первом этапе изучена бифуркация состояния равновесия в периодическое решение. На втором этапе мы исследуем бифуркацию Неймарка - Сакера периодического решения, полученного на первом этапе. Исследование вторичных бифуркаций связано с большими техническими трудностями. В работе применяются элементы теории нормальных форм, теории инвариантных многообразий (теорема существования и методы нахождения центрального многообразия), качественной теории динамических систем второго порядка (теория ляпуновских величин), элементы КАМ теории. При исследовании все вычисления проводились с помощью системы MAPLE. Статья организована следующим образом: в первом пункте описывается модель лазера с нелинейным поглотителем. Второй пункт посвящен исследованию бифуркации состояния равновесия в периодическое решение. В третьем пункте рассмотрена бифуркация периодического решения в инвариантный тор (бифуркация Неймарка-Сакера). В приложении приводятся детали вычислений первой ляпуновской величины. К статье приложен файл вычислений в системе MAPLE, в котором можно найти все формулы и графики.

1. Лазерная модель

Одним из способов воздействия на динамику генерации лазерной системы является способ, основанный на помещении нелинейного элемента внутри резонатора. Элемент, потери в котором меняются с увеличением генерируемой мощности, называется нелинейным (насыщающимся, просветляющимся) поглотителем. Лазеры с такими элементами часто называют LSA (laser of saturable absorber). Такие лазеры получили широкое распространение из-за исключительной простоты. Динамика LSA лазеров широко изучалась в середине 1960 годов в связи получением мощных импульсов, в 1980 годах в связи с хаотической динамикой лазеров и в конце 1990 годов при конструировании компактных лазеров [9]. Рассмотрим простейшую модель одномодового кольцевого лазера, в резонатор которого наряду с усиливающей помещена нелинейная поглощающая среда. Каждая из сред состоит из идентичных двухуровневых атомов. Линии усиления и поглощения однородно уширены, их центры совмещены и совпадают с одной из частот резонатора (подробности см. [1, 17, 18, 18, 13, 27]). Модель лазера можно описать системой пяти вещественных

дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= -E + P_1 + P_2, & \dot{P}_1 &= -\delta_1 P_1 - (M_{01} + M_1)E, & \dot{P}_2 &= -\delta_2 P_2 - (M_{02} + M_2)E, \\ \dot{M}_1 &= -\rho_1 M_1 + EP_1, & \dot{M}_2 &= -\rho_2 M_2 + \beta EP_2, \end{aligned} \quad (2)$$

В системе индекс 1 относится к усиливающей среде, а индекс 2 - к поглощающей среде, E - амплитуда электрического поля, P_k - поляризация в среде, M_k -разность населенностей рабочих уровней от их значений M_{0k} -при отсутствии генерации,

$M_{01} < 0$, $M_{02} > 0$. Параметры δ_k и ρ_k соответственно поперечная и продольная скорости релаксации, отнесенные к полуширине линии резонатора . Параметр β - отношение коэффициента насыщения поглощающей и усиливающей сред, t -безразмерное время. Подробное описание системы можно найти в [17]. Эта система интенсивно изучалась и оказалось, что она имеет очень интересную динамику. Отметим, что система инварианта относительно преобразования

$$E \rightarrow -E, P_k \rightarrow -P_k \quad (3)$$

Известно, что система (2) имеет три состояния равновесия, зависящих от параметров. Наиболее изучены бифуркации состояния равновесия

$$E = P_1 = P_2 = M_1 = M_2 = 0$$

Для этого состояния равновесия изучена бифуркация Богданова - Такенса [8], двойная бифуркация Богданова -Такенса для комплексного варианта системы[22], три нулевых собственных числа [27]. Мы будем изучать бифуркацию этого состояния равновесия при условии, что матрица линейного приближения этого состояния равновесия имеет нулевое собственное число, алгебраическая и геометрическая кратности которого равны 2 и пару чисто-мнимых собственных чисел. Такую ситуация рассматривалась в [10] на физическом уровне строгости с помощью метода многих масштабов.

2. Бифуркация состояния равновесия в периодическое решение

Рассмотрим характеристический многочлен матрицы линейного приближения системы (2) в окрестности состояния равновесия I_0 :

$$f(\lambda)(\lambda + \rho_1)(\lambda + \rho_2) = 0 \quad (4)$$

где

$$f(\lambda) = (\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3) \quad (5)$$

$$A_1 = 1 + \delta_1 + \delta_2, A_2 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2 + M_{01} + M_{02}, A_3 = \delta_1\delta_2 + \delta_1M_{02} + \delta_2M_{01}$$

Рассмотрим кубический многочлен $f(\lambda)$. Из свойств кубического многочлена следует, что для $A_3 > A_1A_2$, существует два комплексно - сопряженных корня $f(\lambda)$ с положительной вещественной частью и для $A_3 < A_1A_2$ нет таких корней с положительной вещественной частью. Для

$$A_2A_1 - A_3 = 0, \quad A_3 < 0 \quad (6)$$

многочлен $f(\lambda)$ имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\omega$ и один вещественный корень. Условия (6) определяют бифуркационную кривую Ξ для бифуркации Андронова - Хопфа:

$$M_{01} = -\frac{1 + \delta_2}{1 + \delta_1}M_{02} - (\delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2 + \delta_2^2) \quad (7)$$

Если $(M_{01}, M_{02}) \in \Xi$, то полином $f(\lambda)$ имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \omega = \frac{-\delta_1\delta_2^2 + M_{0,2}\delta_1 - M_{0,2}\delta_2 - \delta_2^2}{\delta_1 + 1}, \lambda_3 = -1 - \delta_1 - \delta_2$$

Вблизи от кривой Ξ полином $f(\lambda)$ имеет пару комплексно - сопряженных корней $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$. Удобно при изучении бифуркации состояния равновесия в качестве параметров выбрать (α, ω) . Легко показать, что если $(M_{01}, M_{02}) \in U$, U -окрестность Ξ , то

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= 2\alpha - \delta_1 - \delta_2 - 1, \\ M_{01} &= \frac{(\alpha^2 - 2\alpha\delta_1 + \omega^2 + \delta_1^2)(2\alpha - \delta_2 - 1)}{\delta_1 - \delta_2}, \\ M_{02} &= \frac{(\alpha^2 - 2\alpha\delta_2 + \omega^2 + \delta_2^2)(2\alpha - \delta_1 - 1)}{\delta_1 - \delta_2}. \end{aligned}$$

Построим усеченную нормальную форму системы (2), т.е. нормализуем правые части системы до членов к порядку малости включительно. Как известно, построение нормальной формы осуществляется в два шага: на первом шаге с помощью линейного преобразования приводим к жордановой форме линейную часть системы (2), а на втором шаге упрощаются нелинейные слагаемые. Цель упрощения - найти такую замену координат, при выполнении которой упрощенное уравнение будет иметь простейший вид. Мы нормализуем систему до членов седьмого порядка включительно (подробности в [3, 7, 12, 14]).

На первом шаге найдем такую матрицу S , что при замене переменных:

$$(E, P_1, P_2, M_1, M_2)^T = S(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$$

система (2) перейдет в систему

$$\dot{x} = Bx + X(x, \mu) \quad (8)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, $\mu = (\alpha, \beta, \rho_1, \rho_2)$, $X(x, \mu) = O(|x|^2)$ при $|x| \rightarrow 0$.

$$B = \text{diag}(-(1 + \delta_1 + \delta_2 + 2\alpha), \alpha + i\omega, \alpha - i\omega, -\rho_1, -\rho_2).$$

Переменные x_2, x_3 - комплексные и $x_2 = \bar{x}_3$. Явный вид матрицы S указан в приложении.

Далее, мы исключим переменную x_1 , соответствующую собственному числу $-(1 + \delta_1 + \delta_2 + 2\alpha)$. Эта процедура соответствует переходу на центральное многообразие. В физической литературе такую процедуру называют адиабатическим исключением переменной. Из общей теории центрального многообразия [3, 5, 7, 20] вытекает, что существует центральное многообразие $x_1 = h(\zeta)$, $\zeta = (x_2, x_3, x_4, x_5)$ для системы (8) и уравнение на центральном многообразии имеет вид

$$\dot{\zeta} = Q\zeta + Z(\zeta, \mu), Q = \text{diag}(\alpha + i\omega, \alpha - i\omega, -\rho_1, -\rho_2). \quad (9)$$

Алгоритм вычисления функции $h(\zeta)$ подробно рассмотрен в [11, 14]. Мы применили этот алгоритм и нашли начальные слагаемые функции $h(\zeta)$ (смотри приложение).

Рассмотрим нормализацию системы (9). Упрощать систему мы будем с помощью последовательности замен переменных

$$x = y + \xi^k(y), y \in \Omega_4$$

где $\xi^k : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ однородный многочлен степени $k \geq 2$ и Ω_k - окрестность начала координат. Выбирая нужное количество замен, мы нормализуем систему вплоть до членов заданного порядка. При изучении данной бифуркации состояния равновесия системы (9) основную роль будут играть члены второго порядка малости. Это связано с тем, что состояние равновесия имеет кратный нулевой корень при $\mu = 0$. Но для рассмотрения дальнейшей бифуркации периодического решения нам необходимо нормализовать систему до членов более высокого порядка. Поэтому мы примем, что нормализация проводится до членов седьмого

порядка включительно. В дальнейшем мы будем использовать верхние индексы для обозначения степеней однородных членов. Система (9) при заменах перейдет в систему

$$\dot{y} = Qy + Y^2(y, \mu) + \dots + Y^7(y, \mu) + O(|y|^7) \quad (10)$$

Как хорошо известно, собственные числа матрицы линейного приближения Q определяют структуру нормализованных слагаемых $Y^k(y, \mu)$. Пусть $\lambda(Q) = (\lambda_1, \dots, \lambda_4)$ - спектр матрицы Q . Соотношение

$$\lambda\tau - \lambda_j = \lambda_1\tau_1 + \dots + \lambda_4\tau_4 - \lambda_j = 0, \quad (11)$$

называется резонансным, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_4), \tau_j \in \mathbb{Z}, \tau_j \geq 0, \lambda\tau = \lambda_1\tau_1 + \dots + \lambda_4\tau_4$. Моном $y^\tau = y_1^{\tau_1} \dots y_4^{\tau_4}$ в j -ом уравнении называется резонансным, если выполнено соотношение (11). Учитывая, что спектр $\lambda(Q) = (i\omega, -i\omega, 0, 0)$ и симметрию (3) исходной LSA модели, получим следующую нормальную форму до членов второго порядка включительно :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1(\alpha + i\omega + ly_3 + my_4) & \dot{y}_2 = y_2(\alpha - i\omega + \bar{l}y_3 + \bar{m}y_4) \\ \dot{y}_3 = -\rho_1 y_3 + c|y_1|^2 & \dot{y}_4 = -\rho_2 y_4 + d|y_1|^2, \end{cases} \quad (12)$$

где $y_2 = \bar{y}_1$ - комплексные переменные, y_3, y_4 - вещественные переменные. Выражения коэффициентов l, m, c, d через коэффициенты исходной системы указаны в приложении. Отметим, что уравнения y_3, y_4 имеют более простую структуру по сравнению с общей диссипативной системой из-за симметрии исходной LSA модели. Если в системе (12) сделать замену переменных, независимой переменной и изменить масштаб параметров

$$y_1 = \varepsilon\sqrt{x_1} \exp(i\vartheta), \quad y_2 = \varepsilon\sqrt{x_1} \exp(-i\vartheta), \quad y_3 = \frac{\varepsilon}{|c|}x_2, \quad y_4 = \frac{\varepsilon}{|d|}x_3, \\ \rho_1 \rightarrow \varepsilon\rho_1, \rho_2 \rightarrow \varepsilon\rho_2, \quad \alpha \rightarrow \frac{|\varepsilon|}{2}\alpha, \quad t \rightarrow \frac{\vartheta}{\omega}.$$

то мы получим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varepsilon x_1(\alpha + ax_2 - bx_3) + \varepsilon^2 X_1^n(x) + \varepsilon^5 X_1(x, \vartheta) \\ \dot{x}_2 = \varepsilon(-\rho_1 x_2 + x_1^2) + \varepsilon^2 X_2^n(x) + \varepsilon^5 X_2(x, \vartheta) \\ \dot{x}_3 = \varepsilon(-\rho_2 x_3 + x_1^2) + \varepsilon^2 X_3^n(x) + \varepsilon^5 X_3(x, \vartheta), \end{cases} \quad (13)$$

где функции $X_i^n, X_i = O(|x|^2)$.

Наряду с системой (13) рассмотрим усредненную систему медленных переменных

$$\dot{x}_1 = \varepsilon x_1(\alpha + ax_2 - bx_3), \quad \dot{x}_2 = \varepsilon(-\rho_1 x_2 + x_1^2), \quad \dot{x}_3 = \varepsilon(-\rho_2 x_3 + x_1^2). \quad (14)$$

Система (14) описывает динамику системы (1) в окрестности точки бифуркации $\varepsilon = \rho_1 = \rho_2 = 0$ следующим образом: при определенных условиях состояниям равновесиям системы (14) соответствуют периодические решения систем (1),(4), а периодическим решениям системы (14)-инвариантные торы систем (1),(4) [3, 5, 6, 12]. Отметим, что в физической литературе обычно говорят не о инвариантных торах, а о квазипериодических решениях исходной системы или биениях [10].

3. Бифуркация периодического решения в инвариантный тор

Учитывая физические значения параметров, рассмотрим только случай

$$b > 0, \rho_1 > 0, \rho_2 > 0 \quad (15)$$

Рассмотрим нетривиальное состояние равновесия Γ_0 системы (14)

$$x_1^0 = (\alpha\rho_1\rho_2/(b\rho_1 - a\rho_2)), \quad x_2^0 = \alpha\rho_1/(b\rho_1 - a\rho_2), \quad x_3^0 = \alpha\rho_1/(b\rho_1 - a\rho_2) \quad (16)$$

Это решение соответствует периодическому решению системы (13) и исходной системы (1). Рассмотрим область устойчивости решения Γ_0 .

Матрица линейного приближения этого решения имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & ax_1^0 & -bx_1^0 \\ 1 & -\rho_1 & 0 \\ 1 & 0 & -\rho_2 \end{pmatrix}$$

Ее характеристический многочлен равен

$$p(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3 = \lambda^3 + (\rho_1 + \rho_2)\lambda^2 + (-ax_1^0 + bx_1^0 + \rho_1\rho_2)\lambda - ax_1^0\rho_2 + b\rho_1x_1^0.$$

Найдем множество точек в пространстве параметров (α, ρ_1, ρ_2) , для которых многочлен $p(\lambda)$ имеет пару чисто мнимых корней и отрицательный вещественный корень. Как хорошо известно, многочлен имеет такие корни при условии:

$$p_1p_2 - p_3 = 0, p_1 < 0, p_2 > 0.$$

Разрешая уравнений $p_1p_2 - p_3 = 0$ относительно α , и учитывая вид коэффициентов p_2, p_3 получим, что при выполнении условий:

$$\alpha = \frac{(\rho_1 + \rho_2)(a\rho_2 - b\rho_1)}{b\rho_2 - a\rho_1}, \quad a\rho_2 - b\rho_1 > 0, b\rho_2 - a\rho_1 > 0, \rho_1, \rho_2 > 0. \quad (16)$$

характеристический многочлен $p(\lambda)$ имеет отрицательный вещественный корень и пару чисто мнимых корней

$$\lambda_1 = -(\rho_1 + \rho_2), \lambda_{2,3} = \pm i\omega, \omega^2 = \frac{\rho_1\rho_2(a\rho_2 - b\rho_1)}{b\rho_2 - a\rho_1}.$$

Определим характер устойчивости состояния равновесия Γ_0 при выполнении (16). Рассмотрим систему (13) в окрестности состояния равновесия Γ_0 . Пусть $x = x^0 + u$. Система (13) примет вид :

$$\dot{u} = \varepsilon(Cu + U^1(u, \mu)) + \varepsilon^2 U^2(u, \mu, \varepsilon) + \varepsilon^5 U^5(u, \vartheta, \mu, \varepsilon), \quad (17)$$

где функции $U^j C^k$ - гладкие, $k \geq 3$, обращаются в 0 при $u = 0$ и функция U^5 2π - периодична по ϑ . Нормализуем систему (17) до членов третьего порядка по u включительно. Нормализацию, как и раньше при упрощении системы (смотри первую часть), выполним в два эта. На первом этапе линейной заменой переменных $u = Kv$ приведем матрицу C к диагональному виду. Система примет вид:

$$\dot{v} = \varepsilon(Dv + V^1(v, \mu)) + \varepsilon^2 V^2(v, \mu, \varepsilon) + \varepsilon^5 V^5(v, \vartheta, \mu, \varepsilon), \quad (18)$$

где v_1 - вещественная переменная, а v_2, v_3 - комплексные переменные и $v_2 = \overline{v_3}$, матрица $D = \text{diag}(-(\rho_1 + \rho_2), i\omega_1, -i\omega_2)$, свойства функций V^j аналогичны свойствам функций U^j . Явный вид матрицы K указан в приложении. Далее упростим нелинейные слагаемые по v порядков 2 и 3 в функции $V^1(v, \mu)$. Рассмотрим почти тождественную нелинейную замену переменных

$$v = \eta + h^2(\eta, \mu) + h^3(\eta, \mu),$$

которая приведет систему (18) к виду

$$\dot{\eta} = \varepsilon(D\eta + H^1(\eta, \mu)) + \varepsilon^2 H^2(\eta, \mu, \varepsilon) + \varepsilon^5 H^5(\eta, \vartheta, \mu, \varepsilon),$$

где $h^2(\eta, \mu), h^3(\eta, \mu)$ - однородные полиномы по η степеней 2 и 3 соответственно, а функция $H_2^1 = \Lambda_1 \eta_2 |\eta_2|^2 + \dots$, $H_2^1 = \overline{H_3^1}$. Существование такой замены переменных доказывается стандартным образом [3, 7, 12, 14]. Мы не приводим явный вид этой замены, т.к. для определения устойчивости состояния равновесия основную роль играет $L_1 = \text{Re}(\Lambda_1)$ - первая ляпуновская величина состояния равновесия. Некоторые подробности вычисления и явный вид этой величины описаны в приложении. Как хорошо известно [5, 16], если $L_1 < 0$, то состояние равновесия Γ_0 устойчиво, а если $L_1 > 0$, то неустойчиво (устойчивость понимается как устойчивость по

Ляпунову). Если $L_1 = 0$, то для исследования устойчивости нужно находить следующие ляпуновские величины. Для L_1 мы получили выражение:

$$L_1 = -\frac{\pi(\rho_2 + \rho_1)\rho_2^2 b^2 (\rho_1 - \rho_2)^2}{(4\omega^2 + \rho_1^2 + 2\rho_1\rho_2 + \rho_2^2)(a\rho_1 - b\rho_2)^2 \omega^2} K$$

$$K = K_0 + K_1 + K_2 + \dots + K_8$$

$$K_0 = 2ab\rho_1^2\rho_2^2(\rho_2 + \rho_1)^5$$

$$K_1 = -2\rho_1\rho_2(\rho_2 + \rho_1)^4(a^2\rho_1^2 + 2a^2\rho_1\rho_2 + a^2\rho_2^2 + b^2\rho_1^2 + b^2\rho_2^2)\omega,$$

$$K_2 = a(\rho_2 + \rho_1)^3(a\rho_1^2\rho_2^2 + 2b\rho_1^4 + 4b\rho_1^3\rho_2 + 14b\rho_1^2\rho_2^2 + 4b\rho_1\rho_2^3 + 2b\rho_2^4)\omega^2,$$

$$K_3 = -(\rho_2 + \rho_1)^2[2a^2\rho_1^4 + 20a^2\rho_1^3\rho_2 + 34a^2\rho_1^2\rho_2^2 + 20a^2\rho_1\rho_2^3 + 2a^2\rho_2^4 + ab\rho_1^3\rho_2 + 3\rho_1^2\rho_2^2ab + ab\rho_1\rho_2^3 - 2b^2\rho_1^4 + 8b^2\rho_1^3\rho_2 - 2b^2\rho_1^2\rho_2^2 + 8b^2\rho_1\rho_2^3 - 2b^2\rho_2^4]\omega^3,$$

$$K_4 = -(\rho_2 + \rho_1)[a^2\rho_1^3\rho_2 + 2a^2\rho_1^2\rho_2^2 + a^2\rho_1\rho_2^3 - 8ab\rho_1^4 - 12ab\rho_1^3\rho_2 - 16\rho_1^2\rho_2^2ab - 12ab\rho_1\rho_2^3 - 8ab\rho_2^4 - b^2\rho_1^3\rho_2 - 2b^2\rho_1^2\rho_2^2 - b^2\rho_1\rho_2^3]\omega^4,$$

$$K_5 = [10(-a^2 + b^2)\rho_1^4 - 50a^2\rho_1^3\rho_2 - 80a^2\rho_1^2\rho_2^2 - 50a^2\rho_1\rho_2^3 - 10a^2\rho_2^4 + ab\rho_1^3\rho_2 + 2\rho_1^2\rho_2^2ab + ab\rho_1\rho_2^3 + 10b^2\rho_1^3\rho_2 + 16b^2\rho_1^2\rho_2^2 + 10b^2\rho_1\rho_2^3 + 10b^2\rho_2^4]\omega^5,$$

$$K_6 = -2ab(\rho_2 + \rho_1)(\rho_1^2 + 10\rho_1\rho_2 + \rho_2^2)\omega^6,$$

$$K_7 = (-8a^2\rho_1^2 - 16a^2\rho_1\rho_2 - 8a^2\rho_2^2 + 8b^2\rho_1^2 + 8b^2\rho_2^2)\omega^7,$$

$$K_8 = -8ab(\rho_2 + \rho_1)\omega^8.$$

В общем случае аналитически определить знак L_1 сложно. Численные расчеты при физических значениях параметров $a = b = 1$ показывают, что константа L_1 может менять знак (смотри диаграмму в пункте 13 файла приложения). Для большинства значений параметров $L_1 \neq 0$. Обозначим через U_- множество тех (ρ_1, ρ_2) , для которых $L_1 < 0$, а через U_+ множество тех (ρ_1, ρ_2) , для которых $L_1 > 0$. По теореме Андронова-Хопфа [2, 11, 14] мы получаем, что при пересечении поверхности (16) происходит рождение периодического решения. Таким образом, верна

Теорема 1 В окрестности множества (16) система первого приближения (13) для $(\rho_1, \rho_2) \in U_{\pm}$ имеет единственный предельный цикл.

Для полной системы (1) из теоремы 1 вытекает

Теорема 2 В окрестности множества (16) для $(\rho_1, \rho_2) \in U_{\pm}$ система (1) имеет единственный двумерный инвариантный тор.

Доказательство. Для доказательства существования инвариантного тора воспользуемся теоремой Неймарка - Сакера о рождении инвариантного тора из состояния равновесия [5, 6, 14, 20, 21, 24, 25]. Обычно ее формулируют

для диффеоморфизмов, но нам нужна теорема для потоков. Сформулируем теорему Сакера для потоков [24, 25]. Пусть дана система:

$$\begin{cases} \dot{z} &= \alpha(\mu)z + G_1(s, z, \bar{z}, Y, \mu) \\ \dot{Y} &= S(\mu)Y + G_2(s, z, \bar{z}, Y, \mu) \end{cases} \quad (20)$$

где функции G_1 (комплексная) и G_2 (вещественная) являются 2π периодичными по s , не содержат линейных членов по z, \bar{z} и Y , $G_i(s, 0, 0, 0, \mu) = 0$. Функции $\alpha(\mu), S(\mu)$ и G_i имеют непрерывные производные до порядка $k \geq 5$ включительно в окрестности точки $(z, \bar{z}, Y, \mu) = 0$. Предположим, что выполняются условия:

- 1) $Re \alpha(0) = 0$ и $A = Re \alpha'(0) > 0$,
- 2) вещественные части собственных чисел матрицы $S(0)$ меньше нуля,
- 3) $\alpha(0) \neq ki/3, ki/4, i = \sqrt{-1}, k \in \mathbb{N}$,
- 4) В нормализованной системе до членов четвертого порядка малости включительно

$$\begin{cases} \dot{w} &= \alpha(\mu)w + \beta(\mu)|w|^2w + R_4(s, w, \bar{w}, W, \mu) \\ \dot{W} &= S(\mu)W + R_3(s, w, \bar{w}, W, \mu) \end{cases}$$

коэффициент $B = Re \beta(0) < 0$.

Тогда для $2 \leq r \leq l$, существует $\mu_r \leq \mu_*$ такое, что для $0 < \mu < \mu_*$ система (20) имеет асимптотически устойчивый инвариантный тор $\tau(\mu)$:

$$\begin{cases} z(s, \vartheta, \mu) = a_0 \sqrt{\mu} e^{i\vartheta} + \mu f(s, \vartheta, \mu) \\ Y(s, \vartheta, \mu) = \mu g(s, \vartheta, \mu) \end{cases}$$

где $a_0 = \sqrt{-A/B}$, f, g - определены для $0 < \mu < \mu_r$, имеют период 2π по ϑ и s

$$f, g \in C^{r-1}(\vartheta, s) \cap Lip^{r-1}(\vartheta, s) \cap C(\mu)$$

и нормы функций $|f|_r, |g|_r \leq c(r)$, где константа $c(r)$ зависит только от r . В общем случае константа $\mu_r \rightarrow 0$ при возрастании r . Как видно из формулировки теоремы Сакера, по структуре она аналогична теореме Андронова - Хопфа о бифуркации рождения цикла из состояния равновесия, но важное отличие заключается в условии 3. Это условие необходимо для нормализации системы (13). В нашем случае это условие проверять не нужно, т.к. мы изучаем вторичную бифуркацию и система (13) не зависит от

угловых переменных. Константа B Сакера совпадает с первой ляпуновской величиной L_1 . Как легко видеть, для системы (13) выполняются все условия теоремы Сакера. Следовательно, в окрестности (16) система (13) имеет асимптотически устойчивый инвариантный тор. \square

В файле приложения пункт 14 приведены графики решения и фазовые траектории амплитудной системы (14) при типичных значениях параметров. **Благодарности** Авторы благодарны А.Г. Владимирову за сотрудничество при написании первоначального варианта работы.

Приложение А Вычисление первой ляпуновской величины

Основной трудностью при исследовании бифуркации Анронова - Хопфа является нахождение ляпуновских (фокусных) величин. Способы нахождения этих величин впервые рассмотрел сам А.М.Ляпунов [16]. Мы подробно не обсуждаем различные подходы к вычислению этих величин, подробности можно найти в [2, 4, 11, 14]. Современный подробный обзор с примерами вычислений [15]. Мы проводили расчет первой ляпуновской величины по формуле Баутина, который применил алгоритм А.М.Ляпунова. Формула Баутина не требует нахождения центрального многообразия. Рассмотрим основные моменты вывода формулы Баутина [4].

Пусть система в окрестности нулевого состояния равновесия имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -px + Q_1(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} = -\beta z + Q_2(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} = \beta y + Q_3(x, y, z). \end{cases} \quad (1s)$$

где $p, \beta \neq 0$, функции Q_j начинаются с членов второго порядка малости и представляются в виде рядов по степеням x, y, z :

$$\begin{aligned} Q_j(x, y, z) = & A_{11}^{(j)}x^2 + A_{22}^{(j)}y^2 + A_{33}^{(j)}z^2 + 2A_{12}^{(j)}xy + \\ & + 2A_{13}^{(j)}xz + 2A_{23}^{(j)}yz + A_{111}^{(j)}x^3 + A_{222}^{(j)}y^3 + A_{333}^{(j)}z^3 + \\ & + 3A_{112}^{(j)}x^2y + 3A_{113}^{(j)}x^2z + 3A_{122}^{(j)}xy^2 + 3A_{223}^{(j)}y^2z + \\ & + 3A_{133}^{(j)}xz^2 + 3A_{233}^{(j)}yz^2 + 6A_{123}^{(j)}xyz + \dots, \end{aligned}$$

Перейдём в системе (1s) к полярным координатам $y = \rho \cos \phi, z = \rho \sin \phi$ и исключим t ; тогда система (1s) сведётся к системе двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{d\phi} = \bar{R}(\rho, \phi, \xi_1), \\ \frac{d\xi}{d\phi} = \bar{Z}(\rho, \phi, \xi_1). \end{cases} \quad (2s)$$

Разложим правые части системы (2s) по степеням ρ и будем искать её решение в виде рядов:

$$\begin{cases} \rho = u_1(\phi)\rho_0 + u_2(\phi)\rho_0^2 + u_3(\phi)\rho_0^3 + \dots, \\ \xi = v_1(\phi)\rho_0 + v_2(\phi)\rho_0^2 + \dots \end{cases} \quad (3s)$$

Тогда, подставляя (2s) в (3s), для определения $u_j(\phi)$ и $v_j(\phi)$ получаем рекуррентные дифференциальные уравнения, из которых последовательно определяем $u_j(\phi)$ и $v_j(\phi)$ так, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$u_1(0) = 1, \quad u_j(0) = 0 \quad (j = 2, 3, \dots), \quad v_j(0) = 0.$$

Полагая в построенном таким образом решении системы (2s) $\phi = 2\pi$, получаем:

$$\rho = \rho_0 + \alpha_3\rho_0^3 + \dots, \quad \xi = \beta_j\rho_0^j + \dots,$$

где

$$\alpha_j = u_j(2\pi), \quad \beta_j = v_j(2\pi).$$

Как хорошо известно, первая ляпуновской величина L_1 равна $\frac{\beta}{2\pi}\alpha_3$. Вычисление даёт для α_3 следующее выражение через коэффициенты системы:

$$\begin{aligned} L_1 = & \frac{\pi}{4\beta^2} \left[2(A_{33}^{(2)} A_{33}^{(3)} - A_{22}^{(2)} A_{22}^{(3)}) + \right. \\ & + 2A_{23}^{(2)} (A_{22}^{(2)} + A_{33}^{(2)}) - 2A_{23}^{(3)} (A_{22}^{(3)} + A_{33}^{(3)}) + \\ & \left. + 3\beta (A_{222}^{(2)} A_{333}^{(3)} + A_{233}^{(2)} + A_{233}^{(3)}) \right] + \\ & + \frac{\pi}{4p\beta(p^2+4q)} \left\{ p^2 [2A_{22}^{(1)} (3A_{12}^{(2)} + A_{13}^{(3)}) + \right. \\ & + 2A_{33}^{(1)} (A_{12}^{(2)} + 3A_{13}^{(1)}) + 4A_{23}^{(1)} (A_{13}^{(2)} + A_{12}^{(3)})] + \\ & + 4p\beta \left[(A_{22}^{(1)} - A_{33}^{(1)}) (A_{13}^{(2)} + A_{12}^{(3)}) + \right. \\ & \left. \left. + 2A_{23}^{(1)} (A_{13}^{(3)} - A_{12}^{(2)}) \right] + 16\beta^2 (A_{22}^{(1)} + A_{33}^{(1)}) (A_{12}^{(2)} + A_{13}^{(3)}) \right\}. \end{aligned}$$

Приложение В Вычисления

Матрица S

$$S_{1,1} = -\delta_2 - 1, \quad S_{1,2} = \frac{\sqrt{(\delta_1+1)(-\delta_1\delta_2^2+m_2\delta_1-m_2\delta_2-\delta_2^2)}(\delta_1+\delta_2)}{\delta_1+1}$$

$$S_{1,3} = -\frac{-\delta_1^2\delta_2-\delta_1\delta_2^2+m_2\delta_1-m_2\delta_2-\delta_1\delta_2-\delta_2^2}{\delta_1+1}, \quad S_{2,1} = \frac{\delta_1^2\delta_2+\delta_1\delta_2^2+m_2\delta_2+\delta_1^2+2\delta_1\delta_2+\delta_2^2+m_2+\delta_1+\delta_2}{\delta_1+1}$$

$$S_{2,2} = \frac{(\delta_1^2\delta_2+\delta_1\delta_2^2+m_2\delta_2+\delta_1^2+2\delta_1\delta_2+\delta_2^2+m_2+\delta_1+\delta_2)\sqrt{(\delta_1+1)(-\delta_1\delta_2^2+m_2\delta_1-m_2\delta_2-\delta_2^2)}}{(\delta_1+1)^2},$$

$$S_{2,3} = \frac{(\delta_1^2\delta_2+\delta_1\delta_2^2+m_2\delta_2+\delta_1^2+2\delta_1\delta_2+\delta_2^2+m_2+\delta_1+\delta_2)\delta_2}{\delta_1+1},$$

$$S_{3,1} = -\frac{m_2(\delta_2+1)}{\delta_1+1}, \quad S_{3,2} = -\frac{\sqrt{(\delta_1+1)(-\delta_1\delta_2^2+m_2\delta_1-m_2\delta_2-\delta_2^2)}m_2}{\delta_1+1}, \quad S_{3,3} = -m_2\delta_1.$$

Матрица K

$$K_{1,1} = \frac{b\rho_1(\rho_2+\rho_1)\rho_2^2}{a\rho_1-b\rho_2}, \quad K_{1,2} = \frac{\sqrt{-(a\rho_1-b\rho_2)\rho_2\rho_1(a\rho_2-b\rho_1)}(\rho_2+\rho_1)}{a\rho_1-b\rho_2},$$

$$K_{1,3} = \frac{\rho_2\rho_1(a\rho_1+a\rho_2-b\rho_1-b\rho_2)}{a\rho_1-b\rho_2}, \quad K_{2,1} = -\frac{b\rho_1(\rho_2+\rho_1)\rho_2}{a\rho_1-b\rho_2},$$

$$K_{2,2} = \frac{\sqrt{-(a\rho_1-b\rho_2)\rho_2\rho_1(a\rho_2-b\rho_1)}}{a\rho_1-b\rho_2},$$

$$K_{2,3} = \rho_2, \quad K_{3,1} = -\frac{(\rho_2+\rho_1)\rho_2^2b}{a\rho_1-b\rho_2},$$

$$K_{3,2} = \frac{\sqrt{-(a\rho_1-b\rho_2)\rho_2\rho_1(a\rho_2-b\rho_1)}}{a\rho_1-b\rho_2},$$

$$K_{3,3} = \rho_1.$$

Список литературы

- [1] Abraham N.B., Mandel P. and Narducci L.M.: *Dynamical instabilities and pulsations in lasers*. in Progress in Optics. edited by E.Wolf Elsevier, Amsterdam, Vol.25, pp.1-190, 1988.
- [2] Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I. and Maier A.G.: *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane*. Israel Program of Scientific Translations, Jerusalem, 1973.
- [3] Arnold V.I.: *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer - Verlag, Berlin, 1983.

- [4] Bautin N. N. : *Behavior of Dynamical Systems near the Boundaries of Stability Regions (In Russian)*, Gostexizdat, Leningrad, 1949.
- [5] Bibikov Yu.N.: *Multi-frequency non-linear oscillations and their bifurcations (in Russian)*. Leningrad Gos. Univ., Leningrad, 1991.
- [6] Broer H.W., Huiteima G.B. and Sevryuk M.B.: *Quasi-periodic tori in a families of dynamical systems: order admits chaos.*, LNM 1645, Springer Verlag, 1996.
- [7] Chow S. N., Li C., Wang D.: *Normal forms and bifurcation of planar vector fields.* – Cambridge University Press, 1994.
- [8] Dangelmayr G., Armbruster D., Neveling M.: *A codimension three bifurcation for the laser with saturable absorber* Zeitschrift fur Physik B Condensed Matter. – 1985. – T. 59. – №. 3. – С. 365-370.
- [9] Erneux T., Glorieux P.: *Laser dynamics.* – Cambridge University Press, 2010.
- [10] Erneux T., Mandel P., Magnan J. F.: *Quasiperiodicity in lasers with saturable absorbers* Physical Review A. – 1984. – T. 29. – №. 5. – С. 2690.
- [11] Hassard B.D., Kazarinoff N.D. and Wan Y.-H.: *Theory and Applications of Hopf bifurcation.* Cambridge University Press, London, 1981.
- [12] Chow S. N., Hale J. K.: *Methods of bifurcation theory.* – Springer Science Business Media, 2012. – Т. 251.
- [13] Khanin IA. I.: *Fundamentals of laser dynamics.* – Cambridge Int Science Publishing, 2006.
- [14] Kuznetsov Yu. A.: *Elements of applied Bifurcation Theory.*, Applied Mathematical Sciences, volume 112, Springer-Verlag, Berlin, 1995
- [15] Leonov G.A., Kuznetsova O.A.: *Lyapunov quantities and limit cycles of two-dimensional dynamical systems. analytical methods, symbolic computation*, Regular and Chaotic Dynamics 15(2-3), 2010, pp. 354–377.
- [16] Lyapunov, A. M.: *The general problem of the stability of motion*, London: Taylor Francis, 1992
- [17] Lugiato L.A., Mandel P., Dembinski S.T., Kossakovski A.: *Semiclassical and quantum theories of bistability in lasers containing saturable absorbers.* Phys.Rev. A, 18(1978), p. 234-278.

- [18] Lugiato L., Prati F., Brambilla M.: *Nonlinear optical systems*. – Cambridge University Press, 2015.
- [19] Mandel P.: *Theoretical problems in cavity nonlinear optics*. – Cambridge University Press, 2005.
- [20] Marsden J. E., McCracken M.: *The Hopf bifurcation and its applications*. – Springer, 2012. – Т. 19.
- [21] Neimark Yu.I.: *On some cases of periodic motions depending on parameters (In Russian.)*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 129,736–739.1959
- [22] Peplowski P., Haken H.: *Bifurcation with two parameters in two-dimensional complex space. Applications to laser systems* Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1988. – Т. 30. – №. 1-2. – С. 135-150.
- [23] Romanovski V., Shafer D.: *The center and cyclicity problems: a computational algebra approach*. – Springer Science Business Media, 2009.
- [24] Sacker R.J: *A new approach to perturbation theory of invariant surfaces*. Comm. Pure Appl. Math., 18 (1965) 717–732.
- [25] Sacker R.J.: *On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations*. New York univ Courant inst of Mathematical Sciences, 1964. – №. IMM-NYU 333.
- [26] Scheurle J., Marsden J.: *Bifurcation to quasi-periodic tori in the interaction of steady state and Hopf bifurcations* SIAM journal on mathematical analysis.– 1984. – Т. 15. – №. 6. – С. 1055-1074.
- [27] Vladimirov A.G., Volkov D.Yu.: *Low-intensity chaotic operations of a laser with saturable absorber*. Optics Communication,100(1993),p. 351-360.
- [28] Volkov D. Yu.: *Invariant tori bifurcation from an equilibrium state in the presence of zero eigenvalues*. (English) Vestn. Leningr. Univ., Math. 21, No.2, 78-79 (1988); translation from Vestn. Leningr. Univ., Ser. I 1988, No.2, 102-103 (1988).

Вспомогательные процедуры

```

> restart;with(LinearAlgebra):
# Внимание      p - равно минус вещественному корню
характеристического уравнения;
> CV:=proc(A)
> global B,C,B1,detB,ch1,ch2,ch3;local i,j;
> B:=Matrix(3,3):C:=Matrix(3,3);B1:=Matrix(3,3);
> B[1,1]:=A[1,2]*A[2,3]-A[1,3]*(A[2,2]+p));
> B[2,1]:=A[1,3]*A[2,1]-A[2,3]*(A[1,1]+p);
> B[3,1]:=A[1,1]+p)*(A[2,2]+p)-A[1,2]*A[2,1];
> B[3,2]:=q*A[3,1];
> B[2,2]:=A[2,1]*q;
> B[1,2]:=-A[3,3]*q-q*A[2,2];
> B[3,3]:=-(-A[2,1]*A[3,2]+A[2,2]*A[3,1]);
> B[2,3]:=-A[2,1]*A[3,3]-A[2,3]*A[3,1];
> B[1,3]:=-A[3,2]*A[2,3]-A[3,3]*A[2,2]+q^2);
> B1:=B^(-1):detB:=Determinant(B);
> ch1:=B[1,1]*x1+B[1,2]*x2+B[1,3]*x3;
> ch2:=B[2,1]*x1+B[2,2]*x2+B[2,3]*x3;
> ch3:=B[3,1]*x1+B[3,2]*x2+B[3,3]*x3;
> for i from 1 by 1 to 3 do
> for j from 1 by 1 to 3 do
> C[i,j]:=simplify( detB*B1[i,j]);
> #print(i,j,C[i,j])
> end do end do;
> end proc:
> Sim:=proc(A)
local A1,k,k1:for k from 1 by 1 to 3 do for k1 from 1 by 1 to 3
do A1[k,k1]:=simplify(A[k,k1])end do end do:
for k from 1 by 1 to 3 do for k1 from 1 by 1 to 3 do A[k,k1]:=
simplify(A1[k,k1])end do end do:
end proc:

```

2 LSA система

```

> g1:=-E+P[1]+P[2];
g2:=-delta[1]*P[1]-E*(m[1]+M[1]);
g3:=-delta[2]*P[2]-E*(m[2]+M[2]);
g4:=-rho[1]*M[1]+E*P[1];
g5:=-rho[2]*M[2]+beta*E*P[2];
f[1]:=eval(g1,{E=x[1],P[1]=x[2],P[2]=x[3],M[1]=x[4],M[2]=x[5]})
;
f[2]:=eval(g2,{E=x[1],P[1]=x[2],P[2]=x[3],M[1]=x[4],M[2]=x[5]})
;
f[3]:=eval(g3,{E=x[1],P[1]=x[2],P[2]=x[3],M[1]=x[4],M[2]=x[5]})
;
f[4]:=eval(g4,{E=x[1],P[1]=x[2],P[2]=x[3],M[1]=x[4],M[2]=x[5]})
;
f[5]:=eval(g5,{E=x[1],P[1]=x[2],P[2]=x[3],M[1]=x[4],M[2]=x[5]})

```

;

$$\begin{aligned}
 g1 &:= -E + P_1 + P_2 \\
 g2 &:= -\delta_1 P_1 - E (m_1 + M_1) \\
 g3 &:= -\delta_2 P_2 - E (m_2 + M_2) \\
 g4 &:= E P_1 - M_1 \rho_1 \\
 g5 &:= E \beta P_2 - M_2 \rho_2 \\
 f_1 &:= -x_1 + x_2 + x_3 \\
 f_2 &:= -\delta_1 x_2 - x_1 (m_1 + x_4) \\
 f_3 &:= -\delta_2 x_3 - x_1 (m_2 + x_5) \\
 f_4 &:= -\rho_1 x_4 + x_1 x_2 \\
 f_5 &:= \beta x_1 x_3 - \rho_2 x_5
 \end{aligned}$$

3 Матрица линейного приближения

```

> AO:=Matrix(5,5):
for i from 1 to 5 do
for j from 1 to 5 do
AO[i,j]:=eval(simplify(diff(f[i],x[j])),{x[1]=0,x[2]=0,x[3]=0,x
[4]=0,x[5]=0}) end do end do:
print (AO);

```

$$\begin{bmatrix}
 -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 -m_1 & -\delta_1 & 0 & 0 & 0 \\
 -m_2 & 0 & -\delta_2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\rho_1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_2
 \end{bmatrix}$$

4 Точка бифуркации Андронова - Хопфа

```

> with(LinearAlgebra):
A1:= Matrix([[ -1,1,1],[ -m[1],-delta[1],0],[ -m[2],0,-delta[2]])
;
A1X:= Matrix([[ -1-x,1,1],[ -m[1],-delta[1]-x,0],[ -m[2],0,-delta
[2]-x]]);
pm:=simplify((-Determinant(A1X)));
a:=(1+delta[1]+delta[2]);
p0:=(delta[1]*delta[2]+m[2]*delta[1]+m[1]*delta[2]);
p1:=delta[1]*delta[2]+m[1]+m[2]+delta[1]+delta[2];
eq:=p0/(-a)-p1; solve(eq,m[1]);

```

$$AI := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -m_1 & -\delta_1 & 0 \\ -m_2 & 0 & -\delta_2 \end{bmatrix}$$

$$AIX := \begin{bmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ -m_1 & -\delta_1-x & 0 \\ -m_2 & 0 & -\delta_2-x \end{bmatrix}$$

$$pm := x^3 + x^2 \delta_1 + x^2 \delta_2 + x \delta_1 \delta_2 + x^2 + x \delta_1 + x \delta_2 + x m_1 + x m_2 + \delta_1 \delta_2 + \delta_1 m_2 + \delta_2 m_1$$

$$a := -1 - \delta_1 - \delta_2$$

$$p0 := \delta_1 \delta_2 + \delta_1 m_2 + \delta_2 m_1$$

$$p1 := \delta_1 \delta_2 + \delta_1 + \delta_2 + m_1 + m_2$$

$$eq := -\frac{\delta_1 \delta_2 + \delta_1 m_2 + \delta_2 m_1}{-1 - \delta_1 - \delta_2} - \delta_1 \delta_2 - \delta_1 - \delta_2 - m_1 - m_2$$

$$-\frac{\delta_1^2 \delta_2 + \delta_1 \delta_2^2 + \delta_1^2 + 2 \delta_1 \delta_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2 + \delta_1 + \delta_2 + m_2}{1 + \delta_1}$$

```
> mo[1] := -(delta[1]^2*delta[2]+delta[1]*delta[2]^2+m[2]*delta[2]+
delta[1]^2+2*delta[1]*delta[2]+delta[2]^2+m[2]+delta[1]+delta
[2])/(delta[1]+1);
```

$$mo_1 := -\frac{\delta_1^2 \delta_2 + \delta_1 \delta_2^2 + \delta_1^2 + 2 \delta_1 \delta_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2 + \delta_1 + \delta_2 + m_2}{1 + \delta_1}$$

```
> m[1] := mo[1]; solve(pm, x);
```

$$m_1 := -\frac{\delta_1^2 \delta_2 + \delta_1 \delta_2^2 + \delta_1^2 + 2 \delta_1 \delta_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2 + \delta_1 + \delta_2 + m_2}{1 + \delta_1}$$

$$-1 - \delta_1 - \delta_2, \frac{\sqrt{(1 + \delta_1) (\delta_1 \delta_2^2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2)}}{1 + \delta_1},$$

$$-\frac{\sqrt{(1 + \delta_1) (\delta_1 \delta_2^2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2)}}{1 + \delta_1}$$

```
> q:=sqrt((delta[1]+1)*(-delta[1]*delta[2]^2+m[2]*delta[1]-m[2]*
delta[2]-delta[2]^2))/(delta[1]+1);
p:=(-delta[1]-delta[2]-1);
#delta[1],delta[2],m[2]:=5,1,3;
```

$$q := \frac{\sqrt{(1 + \delta_1) (-\delta_1 \delta_2^2 + \delta_1 m_2 - \delta_2^2 - \delta_2 m_2)}}{1 + \delta_1}$$

$$p := 1 + \delta_1 + \delta_2$$

5 Приведение матрицы линейного приближения к вещественной диагональной форме

> CV(A1):Sim(B):B;

$$\left[\left[\begin{array}{c} -1 - \delta_2, \frac{\sqrt{-(1 + \delta_1) (\delta_1 \delta_2^2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2)}}{1 + \delta_1}, \\ \frac{\delta_1^2 \delta_2 + \delta_1 \delta_2^2 + \delta_1 \delta_2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2}{1 + \delta_1} \end{array} \right], \right. \\ \left. \left[\frac{\delta_1^2 \delta_2 + \delta_1 \delta_2^2 + \delta_1^2 + 2 \delta_1 \delta_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2 + \delta_1 + \delta_2 + m_2}{1 + \delta_1}, \frac{1}{(1 + \delta_1)^2} \left((\delta_1^2 \delta_2 + \delta_1 \delta_2^2 + \delta_1^2 + 2 \delta_1 \delta_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2 + \delta_1 + \delta_2 + m_2) \sqrt{-(1 + \delta_1) (\delta_1 \delta_2^2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2)} \right), \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\delta_2 (\delta_1^2 \delta_2 + \delta_1 \delta_2^2 + \delta_1^2 + 2 \delta_1 \delta_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2 + \delta_1 + \delta_2 + m_2)}{1 + \delta_1} \right] \right], \\ \left[-\frac{m_2 (1 + \delta_2)}{1 + \delta_1}, -\frac{\sqrt{-(1 + \delta_1) (\delta_1 \delta_2^2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2)}}{1 + \delta_1} m_2, -\delta_1 m_2 \right]$$

> A1J:=B1.A1.B:Sim(A1J):A1J;

$$\left[\left[\begin{array}{c} -1 - \delta_1 - \delta_2, 0, 0 \end{array} \right], \right. \\ \left[\begin{array}{c} 0, 0, \frac{\delta_1 \delta_2^2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2}{\sqrt{-(1 + \delta_1) (\delta_1 \delta_2^2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2)}} \end{array} \right], \\ \left[\begin{array}{c} 0, \frac{\sqrt{-(1 + \delta_1) (\delta_1 \delta_2^2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2)}}{1 + \delta_1}, 0 \end{array} \right]$$

6 LSA система с жордановой линейной частью

```

> for i from 1 by 1 to 5 do fn[i]:=simplify(eval(f[i],[x[1]=ch1,x
[2]=ch2,x[3]=ch3,x[4]=x4,x[5]=x5])) end do:
V:=Matrix([[fn[1]], [fn[2]], [fn[3]], [fn[4]], [fn[5]]]):

> BB1:=Matrix(5,5):   for i from 1 by 1 to 3 do
                        for j from 1 by 1 to 3 do BB1[i,j]:=
simplify(B1[i,j]) end do end do:
BB1[4,4]:=1:BB1[5,5]:=1:
> gn:=Matrix(5,1):gn:=BB1.V:
> i:=1;
  for i1 from 0 to 3 do
    for i2 from 0 to 3 do
      for i3 from 0 to 3 do
        for i4 from 0 to 3 do
          for i5 from 0 to 3 do if
i1+i2+i3+i4+i5<4 then if simplify(coeftayl(gn[1,1], [x1,x2,x3,
x4,x5]=[0,0,0,0,0], [i1,i2,i3,i4,i5]))=0 then else print
(simplify(coeftayl(gn[i,1], [x1,x2,x3,x4,x5]=[0,0,0,0,0], [i1,
i2,i3,i4,i5])),[i1,i2,i3,i4,i5])   end if end if
          end do end do end do end do end do;

```

$i:=1$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\delta_1^2 \delta_2 + \delta_1 \delta_2^2 + \delta_1 \delta_2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2}{\delta_1^3 + 2 \delta_1^2 \delta_2 + 3 \delta_1^2 + 4 \delta_1 \delta_2 + \delta_1 m_2 - \delta_2 m_2 + 3 \delta_1 + 2 \delta_2 + 1}, [0, 0, 1, 0, 1] \\
 & - \frac{\delta_1^3 \delta_2 + \delta_1^2 \delta_2^2 + 2 \delta_1^2 \delta_2 - \delta_1^2 m_2 + 2 \delta_1 \delta_2^2 + \delta_1 \delta_2 m_2 + \delta_1 \delta_2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2}{(\delta_1^3 + 2 \delta_1^2 \delta_2 + 3 \delta_1^2 + 4 \delta_1 \delta_2 + \delta_1 m_2 - \delta_2 m_2 + 3 \delta_1 + 2 \delta_2 + 1) (1 + \delta_2)}, [0, 0, 1, 1, 0] \\
 & - \frac{\sqrt{-(1 + \delta_1) (\delta_1 \delta_2^2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2)} (\delta_1 + \delta_2)}{\delta_1^3 + 2 \delta_1^2 \delta_2 + 3 \delta_1^2 + 4 \delta_1 \delta_2 + \delta_1 m_2 - \delta_2 m_2 + 3 \delta_1 + 2 \delta_2 + 1}, [0, 1, 0, 0, 1] \\
 & - \frac{\sqrt{-(1 + \delta_1) (\delta_1 \delta_2^2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2)} (\delta_1^2 + \delta_1 \delta_2 + \delta_1 + \delta_2)}{(\delta_1^3 + 2 \delta_1^2 \delta_2 + 3 \delta_1^2 + 4 \delta_1 \delta_2 + \delta_1 m_2 - \delta_2 m_2 + 3 \delta_1 + 2 \delta_2 + 1) (1 + \delta_2)}, [0, 1, 0, 1, 0] \\
 & \quad - 1 - \delta_1 - \delta_2, [1, 0, 0, 0, 0] \\
 & \frac{\delta_1 \delta_2 + \delta_1 + \delta_2 + 1}{\delta_1^3 + 2 \delta_1^2 \delta_2 + 3 \delta_1^2 + 4 \delta_1 \delta_2 + \delta_1 m_2 - \delta_2 m_2 + 3 \delta_1 + 2 \delta_2 + 1}, [1, 0, 0, 0, 1] \\
 & \frac{\delta_1^2 + 2 \delta_1 + 1}{\delta_1^3 + 2 \delta_1^2 \delta_2 + 3 \delta_1^2 + 4 \delta_1 \delta_2 + \delta_1 m_2 - \delta_2 m_2 + 3 \delta_1 + 2 \delta_2 + 1}, [1, 0, 0, 1, 0]
 \end{aligned}$$

7 Уравнение h центрального многообразия

```
> # Поиск уравнения центрального многообразия;
ggn[1,1]:=gn[1,1]-coeftayl(gn[1,1], [x1,x2,x3,x4,x5]=[0,0,0,0,
0], [1,0,0,1,0])*x1*x4-coeftayl(gn[1,1], [x1,x2,x3,x4,x5]=[0,0,
0,0,0], [1,0,0,0,1])*x1*x5:
for i1 from 0 to 3 do
  for i2 from 0 to 3 do
    for i3 from 0 to 3 do
      for i4 from 0 to 3 do
        for i5 from 0 to 3 do if
i1+i2+i3+i4+i5<4 then if simplify(coeftayl(ggn[1,1], [x1,x2,x3,
x4,x5]=[0,0,0,0,0], [i1,i2,i3,i4,i5]))=0 then else print
(simplify(coeftayl(ggn[1,1], [x1,x2,x3,x4,x5]=[0,0,0,0,0], [i1,
i2,i3,i4,i5])),[i1,i2,i3,i4,i5]) end if end if
end do end do end do end do end do;
```

$$-\frac{\delta_1^2 \delta_2 + \delta_1 \delta_2^2 + \delta_1 \delta_2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2}{\delta_1^3 + 2 \delta_1^2 \delta_2 + 3 \delta_1^2 + 4 \delta_1 \delta_2 + \delta_1 m_2 - \delta_2 m_2 + 3 \delta_1 + 2 \delta_2 + 1}, [0, 0, 1, 0, 1]$$

$$-\frac{\delta_1^3 \delta_2 + \delta_1^2 \delta_2^2 + 2 \delta_1^2 \delta_2 - \delta_1^2 m_2 + 2 \delta_1 \delta_2^2 + \delta_1 \delta_2 m_2 + \delta_1 \delta_2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2}{(\delta_1^3 + 2 \delta_1^2 \delta_2 + 3 \delta_1^2 + 4 \delta_1 \delta_2 + \delta_1 m_2 - \delta_2 m_2 + 3 \delta_1 + 2 \delta_2 + 1) (1 + \delta_2)}, [0, 0, 1, 1, 0]$$

$$-\frac{\sqrt{-(1 + \delta_1) (\delta_1 \delta_2^2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2)} (\delta_1 + \delta_2)}{\delta_1^3 + 2 \delta_1^2 \delta_2 + 3 \delta_1^2 + 4 \delta_1 \delta_2 + \delta_1 m_2 - \delta_2 m_2 + 3 \delta_1 + 2 \delta_2 + 1}, [0, 1, 0, 0, 1]$$

$$-\frac{\sqrt{-(1 + \delta_1) (\delta_1 \delta_2^2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2)} (\delta_1^2 + \delta_1 \delta_2 + \delta_1 + \delta_2)}{(\delta_1^3 + 2 \delta_1^2 \delta_2 + 3 \delta_1^2 + 4 \delta_1 \delta_2 + \delta_1 m_2 - \delta_2 m_2 + 3 \delta_1 + 2 \delta_2 + 1) (1 + \delta_2)}, [0, 1, 0, 1, 0]$$

$$-1 - \delta_1 - \delta_2, [1, 0, 0, 0, 0]$$

```
> h:=simplify(solve(ggn[1,1],x1)):mtaylor(h,[x2,x3,x4,x5],3):hh:=
0;
for i1 from 0 to 3 do
  for i2 from 0 to 3 do
    for i3 from 0 to 3 do
      for i4 from 0 to 3 do if i1+i2+
i3+i4<3 then if simplify(coeftayl(h, [x2,x3,x4,x5]=[0,0,0,0],
[i1,i2,i3,i4]))=0 then else hh:=(hh+simplify(coeftayl(h, [x2,
x3,x4,x5]=[0,0,0,0], [i1,i2,i3,i4]))*x2^i1*x3^i2*x4^i3*x5^i4) ;
print( simplify(coeftayl(h, [x2,x3,x4,x5]=[0,0,0,0], [i1,i2,i3,
i4])),[i1,i2,i3,i4]) end if end if
end do end do end do end do :h:=hh;
```

$$hh := 0$$

$$-\frac{\delta_1^2 \delta_2 + \delta_1 \delta_2^2 + \delta_1 \delta_2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2}{(1 + \delta_1 + \delta_2) (\delta_1^3 + 2 \delta_1^2 \delta_2 + 3 \delta_1^2 + 4 \delta_1 \delta_2 + \delta_1 m_2 - \delta_2 m_2 + 3 \delta_1 + 2 \delta_2 + 1)}, [0, 1, 0, 1]$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\delta_1^3 \delta_2 + \delta_1^2 \delta_2^2 + 2 \delta_1^2 \delta_2 - \delta_1^2 m_2 + 2 \delta_1 \delta_2^2 + \delta_1 \delta_2 m_2 + \delta_1 \delta_2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2}{(\delta_1^3 + 2 \delta_1^2 \delta_2 + 3 \delta_1^2 + 4 \delta_1 \delta_2 + \delta_1 m_2 - \delta_2 m_2 + 3 \delta_1 + 2 \delta_2 + 1) (1 + \delta_2) (1 + \delta_1 + \delta_2)}, [0, \\
 & 1, 1, 0] \\
 & - \frac{\sqrt{-(1 + \delta_1) (\delta_1 \delta_2^2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2)} (\delta_1 + \delta_2)}{(1 + \delta_1 + \delta_2) (\delta_1^3 + 2 \delta_1^2 \delta_2 + 3 \delta_1^2 + 4 \delta_1 \delta_2 + \delta_1 m_2 - \delta_2 m_2 + 3 \delta_1 + 2 \delta_2 + 1)}, [1, 0, 0, 1] \\
 & - \frac{\sqrt{-(1 + \delta_1) (\delta_1 \delta_2^2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2)} (\delta_1^2 + \delta_1 \delta_2 + \delta_1 + \delta_2)}{(\delta_1^3 + 2 \delta_1^2 \delta_2 + 3 \delta_1^2 + 4 \delta_1 \delta_2 + \delta_1 m_2 - \delta_2 m_2 + 3 \delta_1 + 2 \delta_2 + 1) (1 + \delta_2) (1 + \delta_1 + \delta_2)}, [1, \\
 & 0, 1, 0] \\
 h := & - \frac{(\delta_1^2 \delta_2 + \delta_1 \delta_2^2 + \delta_1 \delta_2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2) x^3 x^5}{(1 + \delta_1 + \delta_2) (\delta_1^3 + 2 \delta_1^2 \delta_2 + 3 \delta_1^2 + 4 \delta_1 \delta_2 + \delta_1 m_2 - \delta_2 m_2 + 3 \delta_1 + 2 \delta_2 + 1)} \\
 & - \frac{(\delta_1^3 \delta_2 + \delta_1^2 \delta_2^2 + 2 \delta_1^2 \delta_2 - \delta_1^2 m_2 + 2 \delta_1 \delta_2^2 + \delta_1 \delta_2 m_2 + \delta_1 \delta_2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2) x^3 x^4}{(\delta_1^3 + 2 \delta_1^2 \delta_2 + 3 \delta_1^2 + 4 \delta_1 \delta_2 + \delta_1 m_2 - \delta_2 m_2 + 3 \delta_1 + 2 \delta_2 + 1) (1 + \delta_2) (1 + \delta_1 + \delta_2)} \\
 & - \frac{\sqrt{-(1 + \delta_1) (\delta_1 \delta_2^2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2)} (\delta_1 + \delta_2) x^2 x^5}{(1 + \delta_1 + \delta_2) (\delta_1^3 + 2 \delta_1^2 \delta_2 + 3 \delta_1^2 + 4 \delta_1 \delta_2 + \delta_1 m_2 - \delta_2 m_2 + 3 \delta_1 + 2 \delta_2 + 1)} \\
 & - \frac{\sqrt{-(1 + \delta_1) (\delta_1 \delta_2^2 - \delta_1 m_2 + \delta_2^2 + \delta_2 m_2)} (\delta_1^2 + \delta_1 \delta_2 + \delta_1 + \delta_2) x^2 x^4}{(\delta_1^3 + 2 \delta_1^2 \delta_2 + 3 \delta_1^2 + 4 \delta_1 \delta_2 + \delta_1 m_2 - \delta_2 m_2 + 3 \delta_1 + 2 \delta_2 + 1) (1 + \delta_2) (1 + \delta_1 + \delta_2)}
 \end{aligned}$$

8 Бифуркация Неймарка - Сакера. Система амплитудных уравнений

Система амплитудных уравнений (14) статьи.

Нахождение состояния равновесия

```

> a:='a':
hh0:=alpha+a*xn[2]-b*xn[3];
hh1:=xn[1]*hh0;
hh2:=-rho[1]*xn[2]+xn[1];
hh3:=-rho[2]*xn[3]+xn[1];
W:=solve({hh0,hh2,hh3},{xn[1],xn[2],xn[3]});
assign(W);f0:=alpha+a*x[2]-b*x[3];
f1:=x[1]*f0;
f2:=-rho[1]*x[2]+x[1];
f3:=-rho[2]*x[3]+x[1];

```

$$hh0 := a x_2 - b x_3 + \alpha$$

$$\begin{aligned}
 hh1 &:= xn_1 (a xn_2 - b xn_3 + \alpha) \\
 hh2 &:= -\rho_1 xn_2 + xn_1 \\
 hh3 &:= -\rho_2 xn_3 + xn_1 \\
 W &:= \left\{ xn_1 = -\frac{\rho_1 \alpha \rho_2}{a \rho_2 - b \rho_1}, xn_2 = -\frac{\alpha \rho_2}{a \rho_2 - b \rho_1}, xn_3 = -\frac{\alpha \rho_1}{a \rho_2 - b \rho_1} \right\} \\
 f0 &:= a x_2 - b x_3 + \alpha \\
 f1 &:= x_1 (a x_2 - b x_3 + \alpha) \\
 f2 &:= -\rho_1 x_2 + x_1 \\
 f3 &:= -\rho_2 x_3 + x_1
 \end{aligned}$$

9 Матрица линейного приближения, характеристический полином, линия бифуркации Неймарка - Сакера

C- матрица линейного приближения состояния равновесия, в программе A1

```
> A1:=Matrix([[0,a*x[1],-b*x[1]],[1,-rho[1],0],[1,0,-rho[2]]]);
#latex(A1);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 0 & a x_1 & -b x_1 \\ 1 & -\rho_1 & 0 \\ 1 & 0 & -\rho_2 \end{bmatrix}$$

Характеристический многочлен матрицы линейного приближения

```
> pm:=CharacteristicPolynomial(A1,lambda);
p2:=coeftayl(pm,lambda=0,2);
p1:=coeftayl(pm,lambda=0,1);
p0:=coeftayl(pm,lambda=0,0);
```

$$pm := \lambda^3 - (-\rho_2 - \rho_1) \lambda^2 - (a x_1 - b x_1 - \rho_1 \rho_2) \lambda - \rho_2 a x_1 + b x_1 \rho_1$$

$$p2 := \rho_2 + \rho_1$$

$$p1 := -a x_1 + b x_1 + \rho_1 \rho_2$$

$$p0 := -a \rho_2 x_1 + b \rho_1 x_1$$

Общий вид кубического многочлена с вещественным и парой комплексно сопряженных корней

```
> sort(expand((x-k)*(x-I*t)*(x+I*t)),x);
x^3 - k x^2 + t^2 x - k t^2
```

Нахождение линии, на которой происходит бифуркация Андронова - Хопфа

```
> ff:=simplify(p0-p2*p1);
```



```
ff:=a rho_1 x_1 - b rho_2 x_1 - rho_1^2 rho_2 - rho_1 rho_2^2
> x[1]:=xn[1];simplify(ff);#latex(simplify(ff));latex(sort
(simplify(p0),alpha));
```

$$x_1 := -\frac{\rho_1 \alpha \rho_2}{a \rho_2 - b \rho_1}$$

$$-\frac{\rho_2 \rho_1 (a \alpha \rho_1 + a \rho_1 \rho_2 + a \rho_2^2 - \alpha b \rho_2 - b \rho_1^2 - b \rho_1 \rho_2)}{a \rho_2 - b \rho_1}$$

Линия, на которой происходит бифуркация Андронова - Хопфа: параметр alpha равен

```
> s1:=solve(ff,alpha);alpha:=s1;
```

$$s1 := -\frac{(\rho_2 + \rho_1) (a \rho_2 - b \rho_1)}{a \rho_1 - b \rho_2}$$

$$\alpha := -\frac{(\rho_2 + \rho_1) (a \rho_2 - b \rho_1)}{a \rho_1 - b \rho_2}$$

Пара комплексно сопряженных корней имеет вид +/- i*omega, квадрат omega равен

```
> simplify(p1);# квадрат частоты omega
```

$$-\frac{\rho_2 \rho_1 (a \rho_2 - b \rho_1)}{a \rho_1 - b \rho_2}$$

Проверка корней характеристического уравнения

```
> solve(pm,lambda);
```

$$-\rho_2 - \rho_1, \frac{\sqrt{(a \rho_1 - b \rho_2) \rho_2 \rho_1 (a \rho_2 - b \rho_1)}}{a \rho_1 - b \rho_2}, -\frac{\sqrt{(a \rho_1 - b \rho_2) \rho_2 \rho_1 (a \rho_2 - b \rho_1)}}{a \rho_1 - b \rho_2}$$

```
> #a:=2;b:=1;rho[1]:=7;rho[2]:=1;solve(pm,lambda);
```

10 Приведение линейной части системы амплитудных уравнений к жордановой форме

```
> A1;
p:= rho[2]+rho[1];
#omega:=p1^(1/2);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{a \rho_1 (\rho_2 + \rho_1) \rho_2}{a \rho_1 - b \rho_2} & -\frac{b \rho_1 (\rho_2 + \rho_1) \rho_2}{a \rho_1 - b \rho_2} \\ 1 & -\rho_1 & 0 \\ 1 & 0 & -\rho_2 \end{bmatrix}$$

$$p := \rho_2 + \rho_1$$

```
> q:=omega;CV(A1):Sim(B):K:=B;
#for i from 1 to 3 do for j from 1 to 3 do print(latex(K[i,j]=B
[i,j]))end do end do;
```

$$q := \omega$$

$$K := \begin{bmatrix} \frac{b \rho_1 (\rho_2 + \rho_1) \rho_2^2}{a \rho_1 - b \rho_2} & \omega \rho_1 + \omega \rho_2 & -\omega^2 + \rho_1 \rho_2 \\ -\frac{b \rho_1 (\rho_2 + \rho_1) \rho_2}{a \rho_1 - b \rho_2} & \omega & \rho_2 \\ -\frac{(\rho_2 + \rho_1) \rho_2^2 b}{a \rho_1 - b \rho_2} & \omega & \rho_1 \end{bmatrix}$$

```
> A1J:=B1.A1.B:Sim(A1J):A1J;Sim(C);C;
```

$$\left[\left[-\rho_2 - \rho_1, \frac{\omega (a \omega^2 \rho_1 + a \rho_1 \rho_2^2 - b \omega^2 \rho_2 - b \rho_1^2 \rho_2)}{(\omega^2 + \rho_1^2 + 2 \rho_1 \rho_2 + \rho_2^2) b (\rho_2 + \rho_1) \rho_2}, \frac{a \omega^2 \rho_1 + a \rho_1 \rho_2^2 - b \omega^2 \rho_2 - b \rho_1^2 \rho_2}{(\omega^2 + \rho_1^2 + 2 \rho_1 \rho_2 + \rho_2^2) b \rho_2} \right], \right. \\ \left[0, \frac{a \omega^2 \rho_1^2 + a \omega^2 \rho_1 \rho_2 + a \rho_1^2 \rho_2^2 + a \rho_1 \rho_2^3 - b \omega^2 \rho_1 \rho_2 - b \omega^2 \rho_2^2 - b \rho_1^3 \rho_2 - b \rho_1^2 \rho_2^2}{(\omega^2 + \rho_1^2 + 2 \rho_1 \rho_2 + \rho_2^2) (a \rho_1 - b \rho_2)}, \right. \\ \left. -\frac{a \omega^4 \rho_1 - a \rho_1^3 \rho_2^2 - 2 a \rho_1^2 \rho_2^3 - a \rho_1 \rho_2^4 - b \omega^4 \rho_2 + b \rho_1^4 \rho_2 + 2 b \rho_1^3 \rho_2^2 + b \rho_1^2 \rho_2^3}{(\omega^2 + \rho_1^2 + 2 \rho_1 \rho_2 + \rho_2^2) \omega (a \rho_1 - b \rho_2)} \right], \\ \left[0, \frac{\omega (a \rho_1^3 + 2 a \rho_1^2 \rho_2 - 2 b \rho_1 \rho_2^2 - b \rho_2^3)}{(a \rho_1 - b \rho_2) (\omega^2 + \rho_1^2 + 2 \rho_1 \rho_2 + \rho_2^2)}, \right. \\ \left. -\frac{a \omega^2 \rho_1^2 + a \omega^2 \rho_1 \rho_2 + a \rho_1^2 \rho_2^2 + a \rho_1 \rho_2^3 - b \omega^2 \rho_1 \rho_2 - b \omega^2 \rho_2^2 - b \rho_1^3 \rho_2 - b \rho_1^2 \rho_2^2}{(\omega^2 + \rho_1^2 + 2 \rho_1 \rho_2 + \rho_2^2) (a \rho_1 - b \rho_2)} \right] \left. \right] \\ \frac{(\rho_2 + \rho_1) \rho_2 b \omega (2 \rho_2 + \rho_1) \rho_1}{a \rho_1 - b \rho_2}$$

$$\left[\left[\begin{aligned} & \omega (\rho_1 - \rho_2), -\omega (\omega^2 + \rho_1^2), \omega (\omega^2 + \rho_2^2), \\ & \left[\frac{(\rho_1 - \rho_2) b \rho_2 (\rho_2 + \rho_1)^2}{a \rho_1 - b \rho_2}, -\frac{(\rho_2 + \rho_1) \rho_2^2 b (\omega^2 - \rho_1^2 - \rho_1 \rho_2)}{a \rho_1 - b \rho_2}, \right. \\ & \left. \frac{(\rho_2 + \rho_1) \rho_2 b (\omega^2 - \rho_1 \rho_2 - \rho_2^2) \rho_1}{a \rho_1 - b \rho_2} \right], \\ & \left[-\frac{\rho_2 b \omega (\rho_1^2 - \rho_2^2)}{a \rho_1 - b \rho_2}, -\frac{(\rho_2 + \rho_1) \rho_2^2 b \omega (2 \rho_1 + \rho_2)}{a \rho_1 - b \rho_2}, \frac{(\rho_2 + \rho_1) \rho_2 b \omega (2 \rho_2 + \rho_1) \rho_1}{a \rho_1 - b \rho_2} \right] \end{aligned} \right]$$

11 Упрощение нелинейных слагаемых

```

> h1:=x1*a*x2-b*x1*x3;h2:=0;h3:=0;
      h1:=a x1 x2 - b x1 x3
      h2:=0
      h3:=0
> g1:=simplify(eval(h1,{x1=ch1,y1=ch2,z1=ch3}));g2:=simplify(eval
(h2,{x1=ch1,y1=ch2,z1=ch3}));g3:=simplify(eval(h3,{x1=ch1,y1=
ch2,z1=ch3}));
g1 := -\frac{1}{a \rho_1 - b \rho_2} \left( (-b x1 \rho_1^2 \rho_2^2 - b x1 \rho_1 \rho_2^3 + a \omega^2 x3 \rho_1 - a \omega x2 \rho_1^2 - a \omega x2 \rho_1 \rho_2 - a x3 \rho_1^2 \rho_2 - b \omega^2 x3 \rho_2 + b \omega x2 \rho_1 \rho_2 + b \omega x2 \rho_2^2 + b x3 \rho_1 \rho_2^2) (a x2 - b x3) \right)
      g2:=0
      g3:=0
> H:=Matrix(3,1):H:=C.Matrix([g1],[g2],[g3]):
> #q1:=(H[1,1])/detB;q2:=H[2,1]/detB;q3:=H[3,1]/detB;
q1:=(H[1,1]);q2:=H[2,1];q3:=H[3,1];
q1 := -\frac{1}{a \rho_1 - b \rho_2} \left( \omega (\rho_1 - \rho_2) \left( -b x1 \rho_1^2 \rho_2^2 - b x1 \rho_1 \rho_2^3 + a \omega^2 x3 \rho_1 - a \omega x2 \rho_1^2 - a \omega x2 \rho_1 \rho_2 - a x3 \rho_1^2 \rho_2 - b \omega^2 x3 \rho_2 + b \omega x2 \rho_1 \rho_2 + b \omega x2 \rho_2^2 + b x3 \rho_1 \rho_2^2 \right) (a x2 - b x3) \right)
q2 := -\frac{1}{(a \rho_1 - b \rho_2)^2} \left( (\rho_1 - \rho_2) b \rho_2 (\rho_2 + \rho_1)^2 \left( -b x1 \rho_1^2 \rho_2^2 - b x1 \rho_1 \rho_2^3 + a \omega^2 x3 \rho_1 - a \omega x2 \rho_1^2 - a \omega x2 \rho_1 \rho_2 - a x3 \rho_1^2 \rho_2 - b \omega^2 x3 \rho_2 + b \omega x2 \rho_1 \rho_2 + b \omega x2 \rho_2^2 + b x3 \rho_1 \rho_2^2 \right) (a x2 - b x3) \right)

```

$$q^3 := \frac{1}{(a \rho_1 - b \rho_2)^2} \left(\rho_2 b \omega (\rho_1^2 - \rho_2^2) \left(-b x1 \rho_1^2 \rho_2^2 - b x1 \rho_1 \rho_2^3 + a \omega^2 x3 \rho_1 - a \omega x2 \rho_1^2 \right. \right. \\ \left. \left. - a \omega x2 \rho_1 \rho_2 - a x3 \rho_1^2 \rho_2 - b \omega^2 x3 \rho_2 + b \omega x2 \rho_1 \rho_2 + b \omega x2 \rho_2^2 + b x3 \rho_1 \rho_2^2 \right) (a x2 \right. \\ \left. - b x3) \right)$$

12 Вычисление ляпуновской величины L_1 по формуле Баутина

> # формула Баутина Н.Н приведена в книге Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. - " Наука", Главная редакция физико-математической литературы, 1984. (первое издание книги - М: Гостехиздат, 1949. 164 с.) стр. 62 первого издания. В формуле p = минус вещественному собственному числу матрицы линейного приближения, $i q$ - чисто мнимое собственное число матрицы линейного приближения.

q:='q':p:='p':

L:=factor(Pi/(4*q^2)*(2*(A233*A333-A222*A322)+2*A223*(A222+A233)-2*A323*(A322+A333)+3*(q)*(A2222+A3333+A2233+A3223))+Pi/(4*p*(q)*(p^2+4*q^2))*(p^2*(2*A122*(3*A212+A313)+2*A133*(A212+3*A313)+4*A123*(A213+A312)+2*A123*(A313-A212))+16*q^2*(A122+A133)*(A212+A313))));

$$L := \frac{1}{4} \frac{1}{q^2 p (p^2 + 4 q^2)} \left(\pi \left(6 A122 A212 p^2 q + 16 A122 A212 q^3 + 2 A122 A313 p^2 q \right. \right. \\ \left. \left. + 16 A122 A313 q^3 - 2 A123 A212 p^2 q + 4 A123 A213 p^2 q + 4 A123 A312 p^2 q \right. \right. \\ \left. \left. + 2 A123 A313 p^2 q + 2 A133 A212 p^2 q + 16 A133 A212 q^3 + 6 A133 A313 p^2 q \right. \right. \\ \left. \left. + 16 A133 A313 q^3 + 2 A222 A223 p^3 + 8 A222 A223 p q^2 - 2 A222 A322 p^3 \right. \right. \\ \left. \left. - 8 A222 A322 p q^2 + 3 A2222 p^3 q + 12 A2222 p q^3 + 2 A223 A233 p^3 + 8 A223 A233 p q^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 3 A2233 p^3 q + 12 A2233 p q^3 + 2 A233 A333 p^3 + 8 A233 A333 p q^2 - 2 A322 A323 p^3 \right. \right. \\ \left. \left. - 8 A322 A323 p q^2 + 3 A3223 p^3 q + 12 A3223 p q^3 - 2 A323 A333 p^3 - 8 A323 A333 p q^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 3 A3333 p^3 q + 12 A3333 p q^3 \right) \right)$$

> q:=omega;p:=rho[1]+rho[2];L;

q := ω

p := $\rho_2 + \rho_1$

$$\frac{1}{4} \frac{1}{\omega^2 (\rho_2 + \rho_1) \left((\rho_2 + \rho_1)^2 + 4 \omega^2 \right)} \left(\pi \left(6 A122 A212 (\rho_2 + \rho_1)^2 \omega + 2 A122 A313 (\rho_2 \right. \right. \\ \left. \left. + \rho_1)^2 \omega - 2 A123 A212 (\rho_2 + \rho_1)^2 \omega + 4 A123 A213 (\rho_2 + \rho_1)^2 \omega + 4 A123 A312 (\rho_2 \right. \right. \\ \left. \left. + \rho_1)^2 \omega + 2 A123 A313 (\rho_2 + \rho_1)^2 \omega + 2 A133 A212 (\rho_2 + \rho_1)^2 \omega + 6 A133 A313 (\rho_2 \right. \right. \\ \left. \left. + \rho_1)^2 \omega \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \rho_1)^2 \omega + 8 A222 A223 (\rho_2 + \rho_1) \omega^2 - 8 A222 A322 (\rho_2 + \rho_1) \omega^2 + 8 A223 A233 (\rho_2 \\
 & + \rho_1) \omega^2 + 8 A233 A333 (\rho_2 + \rho_1) \omega^2 - 8 A322 A323 (\rho_2 + \rho_1) \omega^2 - 8 A323 A333 (\rho_2 \\
 & + \rho_1) \omega^2 + 2 A223 A233 (\rho_2 + \rho_1)^3 + 3 A3223 (\rho_2 + \rho_1)^3 \omega + 12 A3223 (\rho_2 + \rho_1) \omega^3 \\
 & - 2 A323 A333 (\rho_2 + \rho_1)^3 + 3 A3333 (\rho_2 + \rho_1)^3 \omega + 12 A3333 (\rho_2 + \rho_1) \omega^3 \\
 & + 3 A2222 (\rho_2 + \rho_1)^3 \omega + 12 A2233 (\rho_2 + \rho_1) \omega^3 + 16 A122 A212 \omega^3 + 12 A2222 (\rho_2 \\
 & + \rho_1) \omega^3 + 3 A2233 (\rho_2 + \rho_1)^3 \omega + 16 A133 A313 \omega^3 + 16 A133 A212 \omega^3 \\
 & - 2 A222 A322 (\rho_2 + \rho_1)^3 + 2 A233 A333 (\rho_2 + \rho_1)^3 + 16 A122 A313 \omega^3 \\
 & - 2 A322 A323 (\rho_2 + \rho_1)^3 + 2 A222 A223 (\rho_2 + \rho_1)^3)
 \end{aligned}$$

```

> A111:=coeftayl(q1, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [2,0,0]);
A211:=coeftayl(q2, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [2,0,0]);
A311:=coeftayl(q3, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [2,0,0]);

A122:=coeftayl(q1, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [0,2,0]);
A222:=coeftayl(q2, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [0,2,0]);
A322:=coeftayl(q3, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [0,2,0]);

A133:=coeftayl(q1, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [0,0,2]);
A233:=coeftayl(q2, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [0,0,2]);
A333:=coeftayl(q3, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [0,0,2]);

A112:=1/2*coeftayl(q1, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [1,1,0]);
A212:=1/2*coeftayl(q2, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [1,1,0]);
A312:=1/2*coeftayl(q3, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [1,1,0]);

A113:=1/2*coeftayl(q1, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [1,0,1]);
A213:=1/2*coeftayl(q2, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [1,0,1]);
A313:=1/2*coeftayl(q3, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [1,0,1]);

A123:=1/2*coeftayl(q1, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [0,1,1]);
A223:=1/2*coeftayl(q2, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [0,1,1]);
A323:=1/2*coeftayl(q3, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [0,1,1]);

A1111:=coeftayl(q1, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [3,0,0]);
A2111:=coeftayl(q2, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [3,0,0]);
A3111:=coeftayl(q3, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [3,0,0]);

A1112:=1/3*coeftayl(q1, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [2,1,0]);
A2112:=1/3*coeftayl(q2, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [2,1,0]);
A3112:=1/3*coeftayl(q3, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [2,1,0]);

A1113:=1/3*coeftayl(q1, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [2,0,1]);
A2113:=1/3*coeftayl(q2, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [2,0,1]);
A3113:=1/3*coeftayl(q3, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [2,0,1]);

A1222:=coeftayl(q1, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [0,3,0]);
A2222:=coeftayl(q2, [x1,x2,x3]=[0,0,0], [0,3,0]);

```

```

A3222:=coeftayl(q3,[x1,x2,x3]=[0,0,0],[0,3,0]);
A1333:=coeftayl(q1,[x1,x2,x3]=[0,0,0],[0,0,3]);
A2333:=coeftayl(q2,[x1,x2,x3]=[0,0,0],[0,0,3]);
A3333:=coeftayl(q3,[x1,x2,x3]=[0,0,0],[0,0,3]);

A1122:=1/3*coeftayl(q1,[x1,x2,x3]=[0,0,0],[1,2,0]);
A2122:=1/3*coeftayl(q2,[x1,x2,x3]=[0,0,0],[1,2,0]);
A3122:=1/3*coeftayl(q3,[x1,x2,x3]=[0,0,0],[1,2,0]);

A1223:=1/3*coeftayl(q1,[x1,x2,x3]=[0,0,0],[0,2,1]);
A2223:=1/3*coeftayl(q2,[x1,x2,x3]=[0,0,0],[0,2,1]);
A3223:=1/3*coeftayl(q3,[x1,x2,x3]=[0,0,0],[0,2,1]);

A1133:=1/3*coeftayl(q1,[x1,x2,x3]=[0,0,0],[1,0,2]);
A2133:=1/3*coeftayl(q2,[x1,x2,x3]=[0,0,0],[1,0,2]);
A3133:=1/3*coeftayl(q3,[x1,x2,x3]=[0,0,0],[1,0,2]);

A1233:=1/3*coeftayl(q1,[x1,x2,x3]=[0,0,0],[0,1,2]);
A2233:=1/3*coeftayl(q2,[x1,x2,x3]=[0,0,0],[0,1,2]);
A3233:=1/3*coeftayl(q3,[x1,x2,x3]=[0,0,0],[0,1,2]);

A1123:=1/3*coeftayl(q1,[x1,x2,x3]=[0,0,0],[1,1,1]);
A2123:=1/3*coeftayl(q2,[x1,x2,x3]=[0,0,0],[1,1,1]);
A3123:=1/3*coeftayl(q3,[x1,x2,x3]=[0,0,0],[1,1,1]);

L[1]:=factor(Pi/(4*q^2)*(2*(A233*A333-A222*A322)+2*A223*(A222+
A233)-2*A323*(A322+A333)+3*(q)*(A2222+A3333+A2233+A3223))+Pi/
(4*p*(q)*(p^2+4*q^2))*(p^2*(2*A122*(3*A212+A313)+2*A133*
(A212+3*A313)+4*A123*(A213+A312)+2*A123*(A313-A212))+16*q^2*
(A122+A133)*(A212+A313)));

```

$$A111 := 0$$

$$A211 := 0$$

$$A311 := 0$$

$$A122 := -\frac{\omega(\rho_1 - \rho_2) \left(-a\omega\rho_1^2 - a\omega\rho_1\rho_2 + b\omega\rho_1\rho_2 + b\omega\rho_2^2 \right) a}{a\rho_1 - b\rho_2}$$

$$A222 := -\frac{(\rho_1 - \rho_2) b\rho_2(\rho_2 + \rho_1)^2 \left(-a\omega\rho_1^2 - a\omega\rho_1\rho_2 + b\omega\rho_1\rho_2 + b\omega\rho_2^2 \right) a}{(a\rho_1 - b\rho_2)^2}$$

$$A322 := \frac{\rho_2 b\omega(\rho_1^2 - \rho_2^2) \left(-a\omega\rho_1^2 - a\omega\rho_1\rho_2 + b\omega\rho_1\rho_2 + b\omega\rho_2^2 \right) a}{(a\rho_1 - b\rho_2)^2}$$

$$A133 := \frac{\omega(\rho_1 - \rho_2) \left(a\omega^2\rho_1 - a\rho_1^2\rho_2 - b\omega^2\rho_2 + b\rho_1\rho_2^2 \right) b}{a\rho_1 - b\rho_2}$$

$$\begin{aligned}
 A_{233} &:= \frac{(\rho_1 - \rho_2) b^2 \rho_2 (\rho_2 + \rho_1)^2 (a \omega^2 \rho_1 - a \rho_1^2 \rho_2 - b \omega^2 \rho_2 + b \rho_1 \rho_2^2)}{(a \rho_1 - b \rho_2)^2} \\
 A_{333} &:= - \frac{\rho_2 b^2 \omega (\rho_1^2 - \rho_2^2) (a \omega^2 \rho_1 - a \rho_1^2 \rho_2 - b \omega^2 \rho_2 + b \rho_1 \rho_2^2)}{(a \rho_1 - b \rho_2)^2} \\
 A_{112} &:= - \frac{1}{2} \frac{\omega (\rho_1 - \rho_2) (-b \rho_1^2 \rho_2^2 - b \rho_1 \rho_2^3) a}{a \rho_1 - b \rho_2} \\
 A_{212} &:= - \frac{1}{2} \frac{(\rho_1 - \rho_2) b \rho_2 (\rho_2 + \rho_1)^2 (-b \rho_1^2 \rho_2^2 - b \rho_1 \rho_2^3) a}{(a \rho_1 - b \rho_2)^2} \\
 A_{312} &:= \frac{1}{2} \frac{\rho_2 b \omega (\rho_1^2 - \rho_2^2) (-b \rho_1^2 \rho_2^2 - b \rho_1 \rho_2^3) a}{(a \rho_1 - b \rho_2)^2} \\
 A_{113} &:= \frac{1}{2} \frac{\omega (\rho_1 - \rho_2) (-b \rho_1^2 \rho_2^2 - b \rho_1 \rho_2^3) b}{a \rho_1 - b \rho_2} \\
 A_{213} &:= \frac{1}{2} \frac{(\rho_1 - \rho_2) b^2 \rho_2 (\rho_2 + \rho_1)^2 (-b \rho_1^2 \rho_2^2 - b \rho_1 \rho_2^3)}{(a \rho_1 - b \rho_2)^2} \\
 A_{313} &:= - \frac{1}{2} \frac{\rho_2 b^2 \omega (\rho_1^2 - \rho_2^2) (-b \rho_1^2 \rho_2^2 - b \rho_1 \rho_2^3)}{(a \rho_1 - b \rho_2)^2} \\
 A_{123} &:= \frac{1}{2} \frac{\omega (\rho_1 - \rho_2) (-a \omega \rho_1^2 - a \omega \rho_1 \rho_2 + b \omega \rho_1 \rho_2 + b \omega \rho_2^2) b}{a \rho_1 - b \rho_2} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{\omega (\rho_1 - \rho_2) (a \omega^2 \rho_1 - a \rho_1^2 \rho_2 - b \omega^2 \rho_2 + b \rho_1 \rho_2^2) a}{a \rho_1 - b \rho_2} \\
 A_{223} &:= \frac{1}{2} \frac{(\rho_1 - \rho_2) b^2 \rho_2 (\rho_2 + \rho_1)^2 (-a \omega \rho_1^2 - a \omega \rho_1 \rho_2 + b \omega \rho_1 \rho_2 + b \omega \rho_2^2)}{(a \rho_1 - b \rho_2)^2} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{(\rho_1 - \rho_2) b \rho_2 (\rho_2 + \rho_1)^2 (a \omega^2 \rho_1 - a \rho_1^2 \rho_2 - b \omega^2 \rho_2 + b \rho_1 \rho_2^2) a}{(a \rho_1 - b \rho_2)^2} \\
 A_{323} &:= - \frac{1}{2} \frac{\rho_2 b^2 \omega (\rho_1^2 - \rho_2^2) (-a \omega \rho_1^2 - a \omega \rho_1 \rho_2 + b \omega \rho_1 \rho_2 + b \omega \rho_2^2)}{(a \rho_1 - b \rho_2)^2}
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\rho_2 b \omega (\rho_1^2 - \rho_2^2) (a \omega^2 \rho_1 - a \rho_1^2 \rho_2 - b \omega^2 \rho_2 + b \rho_1 \rho_2^2) a}{(a \rho_1 - b \rho_2)^2}$$

$$A1111 := 0$$

$$A2111 := 0$$

$$A3111 := 0$$

$$A1112 := 0$$

$$A2112 := 0$$

$$A3112 := 0$$

$$A1113 := 0$$

$$A2113 := 0$$

$$A3113 := 0$$

$$A1222 := 0$$

$$A2222 := 0$$

$$A3222 := 0$$

$$A1333 := 0$$

$$A2333 := 0$$

$$A3333 := 0$$

$$A1122 := 0$$

$$A2122 := 0$$

$$A3122 := 0$$

$$A1223 := 0$$

$$A2223 := 0$$

$$A3223 := 0$$

$$A1133 := 0$$

$$A2133 := 0$$

$$A3133 := 0$$

$$A1233 := 0$$

$$A2233 := 0$$

$$A3233 := 0$$

$$A1123 := 0$$

$$A2123 := 0$$

$$A3123 := 0$$

$$L_1 := -\frac{1}{8} \frac{1}{(4 \omega^2 + \rho_1^2 + 2 \rho_1 \rho_2 + \rho_2^2) (a \rho_1 - b \rho_2)^2 \omega^2} \left((\rho_2 + \rho_1) \rho_2^2 b^2 \pi (\rho_1 - \rho_2)^2 \left(\begin{aligned} &-8 a^2 \omega^7 \rho_1^2 - 16 a^2 \omega^7 \rho_1 \rho_2 - 8 a^2 \omega^7 \rho_2^2 - 10 a^2 \omega^5 \rho_1^4 - 50 a^2 \omega^5 \rho_1^3 \rho_2 - 80 a^2 \omega^5 \rho_1^2 \rho_2^2 \\ &- 50 a^2 \omega^5 \rho_1 \rho_2^3 - 10 a^2 \omega^5 \rho_2^4 - a^2 \omega^4 \rho_1^4 \rho_2 - 3 a^2 \omega^4 \rho_1^3 \rho_2^2 - 3 a^2 \omega^4 \rho_1^2 \rho_2^3 - a^2 \omega^4 \rho_1 \rho_2^4 \\ &- 2 a^2 \omega^3 \rho_1^6 - 24 a^2 \omega^3 \rho_1^5 \rho_2 - 76 a^2 \omega^3 \rho_1^4 \rho_2^2 - 108 a^2 \omega^3 \rho_1^3 \rho_2^3 - 76 a^2 \omega^3 \rho_1^2 \rho_2^4 - 24 a^2 \omega^3 \rho_1 \rho_2^5 \\ &- 2 a^2 \omega^3 \rho_2^6 + a^2 \omega^2 \rho_1^5 \rho_2^2 + 3 a^2 \omega^2 \rho_1^4 \rho_2^3 + 3 a^2 \omega^2 \rho_1^3 \rho_2^4 + a^2 \omega^2 \rho_1^2 \rho_2^5 - 2 a^2 \omega \rho_1^7 \rho_2 \end{aligned} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
 & -12 a^2 \omega \rho_1^6 \rho_2^2 - 30 a^2 \omega \rho_1^5 \rho_2^3 - 40 a^2 \omega \rho_1^4 \rho_2^4 - 30 a^2 \omega \rho_1^3 \rho_2^5 - 12 a^2 \omega \rho_1^2 \rho_2^6 - 2 a^2 \omega \rho_1 \rho_2^7 \\
 & - 8 a b \omega^8 \rho_1 - 8 a b \omega^8 \rho_2 - 2 a b \omega^6 \rho_1^3 - 22 a b \omega^6 \rho_1^2 \rho_2 - 22 a b \omega^6 \rho_1 \rho_2^2 - 2 a b \omega^6 \rho_2^3 \\
 & + a b \omega^5 \rho_1^3 \rho_2 + 2 a b \omega^5 \rho_1^2 \rho_2^2 + a b \omega^5 \rho_1 \rho_2^3 + 8 a b \omega^4 \rho_1^5 + 20 a b \omega^4 \rho_1^4 \rho_2 + 28 a b \omega^4 \rho_1^3 \rho_2^2 \\
 & + 28 a b \omega^4 \rho_1^2 \rho_2^3 + 20 a b \omega^4 \rho_1 \rho_2^4 + 8 a b \omega^4 \rho_2^5 - a b \omega^3 \rho_1^5 \rho_2 - 5 a b \omega^3 \rho_1^4 \rho_2^2 - 8 a b \omega^3 \rho_1^3 \rho_2^3 \\
 & \rho_2^3 - 5 a b \omega^3 \rho_1^2 \rho_2^4 - a b \omega^3 \rho_1 \rho_2^5 + 2 a b \omega^2 \rho_1^7 + 10 a b \omega^2 \rho_1^6 \rho_2 + 32 a b \omega^2 \rho_1^5 \rho_2^2 + 60 a b \omega^2 \\
 & \rho_1^4 \rho_2^3 + 60 a b \omega^2 \rho_1^3 \rho_2^4 + 32 a b \omega^2 \rho_1^2 \rho_2^5 + 10 a b \omega^2 \rho_1 \rho_2^6 + 2 a b \omega^2 \rho_2^7 + 2 a b \rho_1^7 \rho_2^2 + 10 a b \\
 & \rho_1^6 \rho_2^3 + 20 a b \rho_1^5 \rho_2^4 + 20 a b \rho_1^4 \rho_2^5 + 10 a b \rho_1^3 \rho_2^6 + 2 a b \rho_1^2 \rho_2^7 + 8 b^2 \omega^7 \rho_1^2 + 8 b^2 \omega^7 \rho_2^2 \\
 & + 10 b^2 \omega^5 \rho_1^4 + 10 b^2 \omega^5 \rho_1^3 \rho_2 + 16 b^2 \omega^5 \rho_1^2 \rho_2^2 + 10 b^2 \omega^5 \rho_1 \rho_2^3 + 10 b^2 \omega^5 \rho_2^4 + b^2 \omega^4 \rho_1^4 \rho_2 \\
 & + 3 b^2 \omega^4 \rho_1^3 \rho_2^2 + 3 b^2 \omega^4 \rho_1^2 \rho_2^3 + b^2 \omega^4 \rho_1 \rho_2^4 + 2 b^2 \omega^3 \rho_1^6 - 4 b^2 \omega^3 \rho_1^5 \rho_2 - 12 b^2 \omega^3 \rho_1^4 \rho_2^2 \\
 & - 12 b^2 \omega^3 \rho_1^3 \rho_2^3 - 12 b^2 \omega^3 \rho_1^2 \rho_2^4 - 4 b^2 \omega^3 \rho_1 \rho_2^5 + 2 b^2 \omega^3 \rho_2^6 - 2 b^2 \omega \rho_1^7 \rho_2 - 8 b^2 \omega \rho_1^6 \rho_2^2 \\
 & - 14 b^2 \omega \rho_1^5 \rho_2^3 - 16 b^2 \omega \rho_1^4 \rho_2^4 - 14 b^2 \omega \rho_1^3 \rho_2^5 - 8 b^2 \omega \rho_1^2 \rho_2^6 - 2 b^2 \omega \rho_1 \rho_2^7))
 \end{aligned}$$

13 Исследование знака первой ляпуновской величины L_1

```

> a:=1;b:=1;
omega:=(-rho[2]*rho[1]*(a*rho[2]-b*rho[1])/(a*rho[1]-b*rho[2]))
^(1/2);

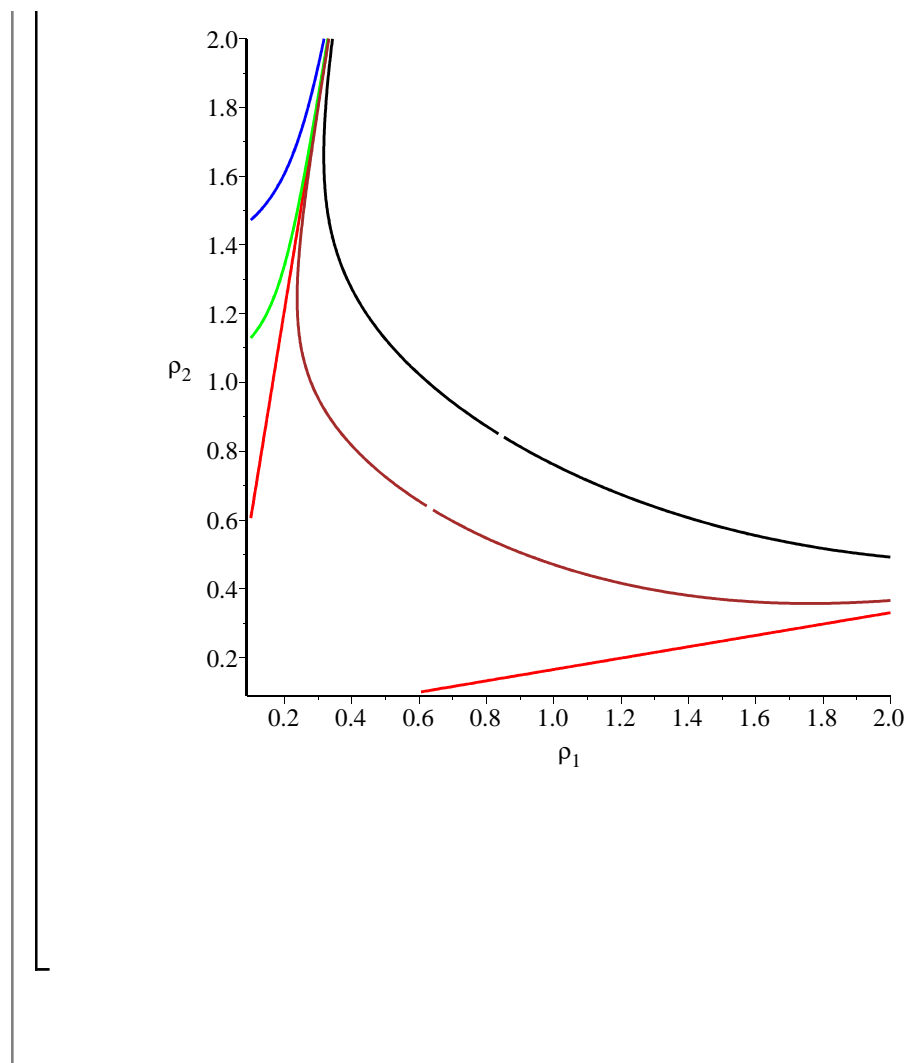
```

$$\begin{aligned}
 & a := 1 \\
 & b := 1 \\
 \omega := & \sqrt{\frac{\rho_2 \rho_1 (-\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1 - \rho_2}}
 \end{aligned}$$

```

> with(plots):PP0:=implicitplot(L[1],rho[1]=0.1..2,rho[2]=0.1..2,
gridrefine=3,color=red):
PP1:=implicitplot(L[1]=-1,rho[1]=0.1..2,rho[2]=0.1.
.2, gridrefine=3,color=green):
PP20:=implicitplot(L[1]=-10,rho[1]=0.1..2,rho[2]=
0.1..2, gridrefine=3,color=blue):
PP30:=implicitplot(L[1]=1,rho[1]=0.1..2,rho[2]=0.1.
.2, gridrefine=3,color=brown):
PP40:=implicitplot(L[1]=10,rho[1]=0.1..2,rho[2]=
0.1..2, gridrefine=3,color=black):
display(PP0,PP1,PP20,PP30, PP40);
# красная линия - L[1]=0
# зеленая линия - L[1]=-1
# голубая линия - L[1]=-10
# коричневая линия L[1]=1
# черная линия L[1]=10

```



14 Графики решений и траектории амплитудной системы при типичных значениях параметров

```

> # Выбор параметров системы;
a:=1;b:=1;rho[1]:=1.;rho[2]:=0.4;evalf(L[1]);omega;
with(DEtools):
x[1]:='x[1]':
eq1:=diff(x[1](t),t)=x[1](t)*(a*x[2](t)-b*x[3](t)+alpha);
eq2:=diff(x[2](t),t)=-rho[1]*x[2](t)+x[1](t);
eq3:=diff(x[3](t),t)=-rho[2]*x[3](t)+x[1](t);
vars:=[x[1](t),x[2](t),x[3](t)]:
                                a:=1
                                b:=1
                                rho_1:=1.
                                rho_2:=0.4
    
```

0.4643040767

0.6324555320

$$eq1 := \frac{d}{dt} x_1(t) = x_1(t) (x_2(t) - x_3(t) + 1.400000000)$$

$$eq2 := \frac{d}{dt} x_2(t) = -1. x_2(t) + x_1(t)$$

$$eq3 := \frac{d}{dt} x_3(t) = -0.4 x_3(t) + x_1(t)$$

```
> P:=DEplot({eq1,eq2, eq3}, vars, 0..50, {[x[1](0)=0.1,x[2](0)=xn
[2],x[3](0)=xn[3]] }, stepsize=0.1, scene=[t,x[2]],linecolor=
black, arrows=NONE, numpoints=100):
P1:=DEplot({eq1,eq2, eq3}, vars, 0..50, {[x[1](0)=0.1,x[2](0)=xn
[2]+0.01,x[3](0)=xn[3]] }, stepsize=0.1, scene=[t,x[3]],
linecolor=green, arrows=NONE):
> P2:= DEplot3d({eq1,eq2, eq3}, vars, 0..50, {[x[1](0)=+0.1,x[2]
(0)=xn[2],x[3](0)=xn[3]] }, stepsize=0.1,
scene=[x[1],x[2],x[3]],linecolor=red) :

> (display(P));
> display(P1);
> display(P2);
```

