ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2017
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными

УДК 517.9

Интегрирование уравнений Гарри Дима и Кортевега де Вриза в параметрической форме

К. А. Волосов, Н. К. Волосова, А. К. Волосова

Московский государственный университет путей сообщения
ул. Образцова, д. 9, стр. 9, Москва, 127994, Россия

Аннотация

Относительно новый метод "не фиксированной конструктивной замены переменных"впервые применён к уравнениям Harry Dym (HD) и Korteweg – de Vries (KdV). Построены две динамические системы и сформулированы необходимые условия устойчивости фазовых траекторий. Построена система функциональных алгебраических уравнений и доказано, что два формальных условия разрешимости для системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка имеют один нетривиальный общий множитель. Для уравнений HD и KdV обнаружено важное свойство: после предлагаемой замены новое "скрытое"ключевое уравнение для функции первой производной отделяется от остальных уравнений. Точные решения, построенные с помощью неавтономной динамической системы, совпадают с глобальными решениями. Этого не происходит в уравнениях с диссипацией. Найдены по два класса точных решений для уравнений HD и KdV. Появляется возможность конструирования новых асимптотических решений.

Ключевые слова: уравнения Harry Dym и Korteweg – de Vries, динамические системы, устойчивость фазовых траекторий

Abstract

In the present work we for the first time apply a relatively new method of constructive unfixed change of variables to the Harry Dym (HD) and the Korteweg–de Vries (KdV) equations. We construct two dynamical systems and formulate necessary conditions for the stability of phase trajectories. A system of functional algebraic equations is constructed and it is proved that two formal solvability conditions for a system of first order partial differential equations have one non–trivial common factor. An important feature of the HD and KdV equations was found: after an unfixed constructive change of variables, a new "hidden"key equation for the function of the partial first derivative can be separated from the other equations. The exact solutions constructed with the help of a non-autonomous dynamical system coincide with global solutions. That is not the case for equations with dissipation. Two classes of exact solutions are found for the HD and for the KdV equation. A possibility arises to construct new asymptotic solutions.

Keywords: Harry Dym and Korteweg – de Vries equations, dynamical systems, stability of phase trajectories

1. Введение

Под руководством академика Академии Наук СССР В.П. Маслова в 80 годах 20 века был написан цикл работ [1–7, 24–34], в которых созданы оригинальные, ранее неизвестные, методы исследования задач для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными (НДУсЧП). В этих работах рассматриваются задачи для полулинейных параболических уравнений, квазилинейные параболические уравнения с диссипацией и с квадратичными и кубическими нелинейностями. Уравнения, изученные в этих работах, могут содержать малый параметр $0 < \varepsilon < 1$. В этих задачах исследуются не только решения типа деформированных простых волн[1], но и решения, которые возникают из их небольшого возмущения. В задачах, связанных с уравнениями динамики жидкости и газа, и в частности уравнение Бюргерса, некоторые решения эволюционируют в решения близкие к ударным волнам, а в пределе, при стремлении малого параметра к нулю они превращаются в ударные волны [3, 6, 7]. Анализ таких решений для уравнения Бюргерса подробно изложен в приложении к [1]. Решения типа сглаженных ударных волн для полулинейных и квазилинейных дифференциальных параболиче-

[1] Известно, что уравнения имеющие группу преобразований сдвига допускают решение, которое описывается функцией с аргументом $Z(x,t) = Z(\tau)\Big|_{\tau=x+bt}$ с инвариантом τ, $b = \text{const}$, которое принято называть простой волной.

ских уравнений с частными производными (НДУсЧП), построены в частности в работах [10–16, 24, 25] в различных приложениях.

Решения указанного вида обладают следующим интересным свойством: они стремятся к нулю при $t \to -\infty$ на любом конечном интервале оси x. По образному выражению В.П. Маслова "решения возникают из ничего". Такие "нулевые"начальные условия используются в теории обратной задачи рассеяния, в частности для НДУсЧП Кортевега–де Вриза, Кадомцева–Петвиашвили, синус-Гордон [24–34] и, например, рассматривались также в [4] в другой ситуации.

Данная работа основана на обобщении некоторого преобразования, которое было впервые предложено в [5]. Рассмотрим квазилинейное (на самом деле сильно нелинейное), дифференциального уравнения с частными производными (НДУсЧП)

$$Z'_t - (K(Z)Z'_x)'_x + F(Z) = 0$$

и положим

$$K(Z) = \rho(\chi)\ \chi^k > 0,\ Z(x,t) = \chi(\tau),$$

$\tau = x + bt$.

Тогда получим первое обыкновенное дифференциальное уравнение (ODE_1)

$b\,\frac{d\chi}{d\tau} - \frac{d}{d\tau}\left(\rho(\chi)\frac{d\chi^k}{d\tau}\right) - F(\chi(\tau)) = 0,$

где $\rho(\chi) > 0,\ \rho(0) > 0,\ \rho(1) > 0,\ k > 1.$

Рассмотрим полулинейное (на самом деле тоже нелинейное), дифференциального уравнения с частными производными (НДУсЧП)

$$u'_t - u''_{xx} + R(u) = 0$$

и положим

$$u(x,t) = \Theta(\xi),\quad \xi = x + bt.$$

Тогда получим второе обыкновенное дифференциальное уравнение (ODE_2) $b\,\frac{d\Theta}{d\xi} - \frac{d^2\Theta}{d\xi^2} - R(\Theta) = 0,$

где $\dfrac{dR}{d\Theta}(\Theta)$ непрерывно дифференцируемая функция $\Theta \in [0,1]$, с условиями $\Theta\Big|_{\xi\to-\infty} \to 0$, $\Theta\Big|_{\xi\to\infty} \to 1$. Тогда преобразование

$\rho(\chi)\frac{d\chi^k}{d\tau} = \frac{d\Theta}{d\xi}\left(\tau(\chi)\right)$ связывает ODE_2 с ODE_1, где функции источника и диссипации $F(\chi), R(\chi)$ связаны между собой следующим образом $F(\chi) = \frac{R(\chi)\chi^{1-k}}{k\rho(\chi)}$.

Указанное преобразование использовалось в цитируемых работах при исследовании эталонного уравнения, с целью установления свойств асимптотических решений [5–7, 24, 25]. Идея метода, который мы называем методом "не фиксированной конструктивной замены переменных"(НФКЗП) была впервые предложена в [10]. Для квазилинейного НДУсЧП параболического типа второго порядка (КПДУсЧП), приведенного выше, сделана замена переменных искомой функции $Z(x, t)$ и ее первых частных производных, а также независимых переменных $x = x(\xi, \delta)$, $t = t(\xi, \delta)$ на произвольные дважды непрерывно-дифференцируемые функции [10–16].

Первоначально были исследованы три соотношения, а именно введены две произвольные функции для замены в новых независимых переменных частных производных $\frac{\partial Z(x,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial Z(x,t)}{\partial x}$ и ещё одно соотношение следует из КПДУсЧП. Они обобщают описанное выше преобразование на случай двух независимых переменных. Соотношения изучались в [10, 7]. Далее эти соотношения были дополнены четвертым условием, равенства смешанных производных искомой функции как в старых, так и новых переменных, для различных КПДУсЧП для случая двух независимых переменных. Эти соотношения изучались в работах [11–16].

Заметим, что добавление четвертого соотношения кардинально меняет ситуацию. В [11–16] доказано, что четыре соотношения образуют систему функциональных линейных алгебраических уравнений (СФЛАУ) относительно новых переменных. За новые переменные выбраны производные старых переменных $x = x(\xi, \delta)$, $t = t(\xi, \delta)$ по новым переменным ξ, δ. В [15] также приведено решение модельной задачи оптимального управления для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, построенное методом НФКЗП в случае трёх независимых переменных, в упрощенном виде оно описано в работах [22, 23].

Интерес к проблемам, связанным с уравнением КдВ проявлялся в школе академика В.П. Маслова давно. Асимптотические решения исследовались в [3, 32–34] и в ряде его статей с учениками [26–34]. Например, в [6, p. 180], [7, p. 47–51] были найдены формулы решения КдВ уравнения в виде рационального солитона и двухсолитонного решения. Метод НФКЗП был защищен в [15], а формулы для нелинейной динамической системы (НДС) и варианты СФЛАУ для уравнения КдВ были получены впервые в [18–20]. В цикле работ [8–9, 17] другие исследователи развивали методы, применяемые при решении задач,связанных с нелинейными уравнениями с частными производными (НДУсЧП), такими как H. Dym (ГД), Кортевега–де Вриза (КдВ) и других.

Наша работа основана на новом методе "не фиксированной конструктивной замены переменных который в применении к уравнениям КдВ и ГД позволяет выявить "скрытое"(отдельно для каждого из них) новое ключевое НДУсЧП, на основании которого можно строить новые решения. Основные результаты данной работы были изложены в докладе [21].

2. Система функциональных линейных алгебраических уравнений (СФЛАУ) для уравнения Кортевега–де Вриза

Рассмотрим сразу все семейство уравнений KdV. Обычно выделяют случаи $n = 1$ слабой дисперсии, и $n = 2$, что соответствует модифицированному уравнению КдВ и описывает случай сильной дисперсии.

$$\frac{\partial Z(x,t)}{\partial t} + Z^n \, \frac{\partial Z(x,t)}{\partial x} + \beta \, \frac{\partial^3 Z}{\partial x^3} = 0. \qquad (1)$$

Предположим, что все используемые функции являются гладкими, а именно трижды непрерывно дифференцируемые по своим аргументам.

Хорошо известно [8–9], что группа преобразований сдвига $Z(x,t) = u(\theta)$ с инвариантом $\theta = x - Vt$, приводит уравнение КдВ к ОДУ третьего порядка. Первый интеграл этого ОДУ описывает нелинейный ангармонический осциллятор. Полученное ОДУ второго порядка умножают на первую производную $u'(\theta)$, и снова интегрируют. Тогда получим:

$$(u'(\theta))^2 = E - 2 \, (u(\theta))^{n+2}/(\beta(n+1)(n+2)) + V \, (u(\theta))^2/\beta - C_1 \, u(\theta),$$

$\beta, \ n \neq -1, -2$. Последнее уравнение означает, что ОДУ для функции первой производной отделено от остальных уравнений. Этот вывод в случае ОДУ является тривиальным и хорошо известен. Известно, что при различных значениях констант, из приведённого ОДУ следуют солитонные решения К. Якоби или различные решения, описывающие нелинейные колебания.

В данной работе мы нашли переменные, в которых уравнение для функции первой производной отделяется от остальных, для уравнений ГД и КдВ. Это НДУсЧП называем "скрытым". Все остальные функции выражаются через решение этого уравнения. Это новое свойство указанных уравнений связано со свойством интегририруемости. Тогда и всё исходное НДУсЧП точно интегрируется в параметрической форме. Важно, что полученные новые в теории уравнений ГД и КдВ НДУсЧП для функций первой производной являются уравнениями с частными производными. Это позволяет построить точные и асимптотические формулы для первой производной – функции $Y(\xi,\delta)$. Все остальные функции (производные) выражаются через $Y(\xi,\delta)$.

Применим метод НФКЗП к уравнению (1). Сделаем не фиксированную конструктивную замену переменных для $Z(x,t)$ решения (1) через гладкую неизвестную функцию новых переменных $U(\xi,\delta)$

$$Z(x,t)\Big|_{x=x\ (\xi,\ \delta),\ t=t\ (\xi,\ \delta)} = U(\xi,\delta). \tag{2}$$

Предположим, что якобиан преобразования $\det J = x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta$ не равен нулю и бесконечности. (В противном случае этот метод неприменим). Тогда существует, хотя бы локально, обратное преобразование $\xi=\xi(x,t), \delta=\delta(x,t)$ и $Z(x,t)=U(\xi,\delta)\Big|_{\xi=\xi(x,t),\ \delta=\delta(x,t)}$. Матрица Якоби обратного преобразования имеет вид

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \xi'_x(x,t) & \delta'_x(x,t) \\ \xi'_t(x,t) & \delta'_t(x,t) \end{pmatrix}.$$

Должно быть выполнено равенство $JJ^{-1}=E$. Производные старых переменных x,t по новым переменным ξ,δ связаны соотношениями

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \det J\frac{\partial \delta}{\partial t},\ \frac{\partial t}{\partial \xi} = -\det J\frac{\partial \delta}{\partial x},\ \frac{\partial x}{\partial \delta} = -\det J\ \frac{\partial \xi}{\partial t},\ \frac{\partial t}{\partial \delta} = \det J\ \frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{3}$$

Аналогично, делаем ещё три замены:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Z}{\partial t}\Big|_{x=x(\xi,\ \delta),\ t=t\ (\xi,\ \delta)} = T(\xi,\delta) \\ &\frac{\partial Z}{\partial x}\Big|_{x=x(\xi,\ \delta),\ t=t(\xi,\ \delta)} = Y(\xi,\delta), \\ &\frac{\partial Y(\xi(x,t),\delta(x,t))}{\partial x}\Big|_{x=x(\xi,\ \delta),\ t=t(\xi,\ \delta)} = M(\xi,\delta). \end{aligned} \tag{4}$$

Используя (2) и (3), (4) получим три уравнения:

$$-\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial x}{\partial \xi} = T(\xi,\delta)\ (x'_\xi\ t'_\delta - t'_\xi\ x'_\delta), \tag{5}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi} = Y(\xi,\delta)\ (x'_\xi\ t'_\delta - t'_\xi\ x'_\delta), \tag{6}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial Y}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi} = M(\xi,\delta)\ (x'_\xi\ t'_\delta - t'_\xi\ x'_\delta). \tag{7}$$

Уравнение (1) в новых переменных принимает вид

$$\frac{\partial M}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial M}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi} = -T_1(\xi,\delta)\ (x'_\xi\ t'_\delta - t'_\xi\ x'_\delta)/\beta,$$
$$T_1(\xi,\delta) = T(\xi,\delta) + U(\xi,\delta)^n\ Y(\xi,\delta), \tag{8}$$

С необходимостью, для функции $Z(x,t)$ должно быть выполнено равенство смешанных производных

$$Z''_{tx} = Z''_{xt} \tag{9}$$

в новых переменных $\xi,\ \delta$. Используем (2)–(4), и получим еще одно уравнение

$$\frac{\partial x}{\partial \delta}\frac{\partial Y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial Y}{\partial \delta} + \frac{\partial t}{\partial \delta}\frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\partial t}{\partial \xi}\frac{\partial T}{\partial \delta} = 0. \tag{10}$$

Уравнение КдВ (1) эквивалентно системе НДУсЧП (5)–(8), (10).

Систему (5)–(8), (10) будем анализировать в два этапа. На первом этапе рассмотрим систему НДУсЧП (5),(6),(8),(10) как алгебраическую систему относительно производных

$$x'_\xi,\ x'_\delta,\ \ t'_\xi,\ t'_\delta. \tag{11}$$

Теорема 1. Пусть дана система НДУсЧП четырех уравнений (5), (6), (8), (10) относительно переменных (11). Тогда она является системой линейных функциональных алгебраических уравнений СФЛАУ относительно переменных (11) и имеет единственное нетривиальное решение

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \stackrel{\text{def}}{=} z_1(\xi,\delta) = (\beta\ Y(\xi,\delta)\ \left(T'_\delta(\xi,\delta)\ M'_\xi(\xi,\delta) - T'_\xi(\xi,\delta)\ M'_\delta(\xi,\delta)\right) U'_\xi(\xi,\delta) +$$
$$+T_1(\xi,\delta)\ \left(T'_\delta(\xi,\delta)\ U'_\xi(\xi,\delta) - T'_\xi(\xi,\delta)\ U'_\delta(\xi,\delta)\right) U'_\xi(\xi,\delta) +$$
$$+\beta\ T(\xi,\delta)\ \left(M'_\delta(\xi,\delta)\ U'_\xi(\xi,\delta) - M'_\xi(\xi,\delta)\ U'_\delta(\xi,\delta)\right) Y'_\xi(\xi,\delta))/\Psi, \tag{12}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \delta} \stackrel{\text{def}}{=} z_2(\xi,\delta) = (\beta\ Y(\xi,\delta)\ \left(T'_\delta(\xi,\delta)\ M'_\xi(\xi,\delta) - T'_\xi(\xi,\delta)\ M'_\delta(\xi,\delta)\right)\ U'_\delta(\xi,\delta) +$$
$$+T_1(\xi,\delta)\ \left(T'_\delta(\xi,\delta)\ U'_\xi(\xi,\delta) - T'_\xi(\xi,\delta)\ U'_\delta(\xi,\delta)\right)\ U'_\delta(\xi,\delta) +$$
$$+\beta\ T(\xi,\delta)\ \left(M'_\delta(\xi,\delta)\ U'_\xi(\xi,\delta) - M'_\xi(\xi,\delta)\ U'_\delta(\xi,\delta)\right)\ Y'_\delta(\xi,\delta))/\Psi, \tag{13}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} \stackrel{\text{def}}{=} z_3(\xi,\delta) = \left(\beta\ Y(\xi,\delta)\ M'_\xi(\xi,\delta) + T_1(\xi,\delta)\ U'_\xi(\xi,\delta)\right) \times$$
$$\times \left(Y'_\delta(\xi,\delta)\ U'_\xi(\xi,\delta) - Y'_\xi(\xi,\delta)\ U'_\delta(\xi,\delta)\right)/\Psi, \tag{14}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial t}{\partial \delta} \stackrel{\text{def}}{=} z_4(\xi,\delta) = (\beta\ Y(\xi,\delta)\ M'_\delta(\xi,\delta) + T_1(\xi,\delta)\ U'_\delta(\xi,\delta)) \times \\
&\times \left(Y'_\xi(\xi,\delta)\ U'_\delta(\xi,\delta) - Y'_\delta(\xi,\delta)\ U'_\xi(\xi,\delta)\right)/\Psi, \\
&\Psi = \beta\ Y^2 \left(T'_\xi(\xi,\delta)\ M'_\delta(\xi,\delta) - T'_\delta(\xi,\delta)\ M'_\xi(\xi,\delta)\right) + \\
&+T\ T_1 \left(Y'_\xi(\xi,\delta)\ U'_\delta(\xi,\delta) - Y'_\delta(\xi,\delta)\ U'_\xi(\xi,\delta)\right) + \\
&+Y\ (T_1\ \left(U'_\xi(\xi,\delta)\ T'_\delta(\xi,\delta) - U'_\delta(\xi,\delta)\ T'_\xi(\xi,\delta)\right) + \\
&+\beta\ T\ \left(Y'_\xi(\xi,\delta)\ M'_\delta(\xi,\delta) - Y'_\delta(\xi,\delta)\ M'_\xi(\xi,\delta)\right)).
\end{aligned} \tag{15}
$$

Якобиан имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\det J = (\beta\ \Big(M'{}_\xi(\xi,\delta)\ U'_\delta(\xi,\delta) - M'_\delta(\xi,\delta)\ U'_\xi(\xi,\delta)\Big) \times \\
&\times \Big(U'{}_\delta(\xi,\delta)\ Y'_\xi(\xi,\delta) - U'_\xi(\xi,\delta)\ Y'_\delta(\xi,\delta)\Big))/\Psi.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Функция $T(\xi,\delta)$ определяется из (7) и имеет вид

$$
\begin{aligned}
&T(\xi,\delta) = (\beta\ M(\xi,\delta)\ \left(M'_\xi(\xi,\delta)\ U'_\delta(\xi,\delta) - \beta\ M'_\delta(\xi,\delta)\ U'_\xi(\xi,\delta)\right) + \\
&+Y(\xi,\delta)\ (-Y'_\delta(\xi,\delta)\ \left(U'_\xi(\xi,\delta)\ U^n + \beta\ M'_\xi(\xi,\delta)\right) + \\
&+Y'_\xi(\xi,\delta)\ (\ U'_\delta(\xi,\delta)\ U^n + \beta\ M'_\delta(\xi,\delta)))))/\Psi_0, \\
&\Psi_0 = Y'_\delta(\xi,\delta)\ U'_\xi(\xi,\delta) - Y'_\xi(\xi,\delta)\ U'_\delta(\xi,\delta).
\end{aligned} \tag{17}
$$

Доказательство. Сначала с помощью элементарных преобразований, как в методе решения СЛАУ Гаусса исключаем якобиан из уравнений (5), (6), (8), и получаем два линейных уравнения. Уравнение (10) является линейным. Выразим три любые производные старых переменных по новым из (11) и подставим в оставшееся четвёртое уравнение.

Результирующее уравнение после приведения подобных оказывается линейным. Тогда получим (12)–(15). Далее вычисляем (16), (17). Подставим функцию якобиана (16) в правые части уравнений (5)–(8) и получим СФЛАУ в классическом виде. *Теорема 1 доказана.*

3. Возможность изучения устойчивости решений

Пусть дана система уравнений (12)–(15). Можно построить первую нелинейную динамическую систему (НДС) (12), (14), и вторую нелинейную НДС (13), (15).

Действительно, новые переменные ξ и δ можно трактовать как новое время вдоль траекторий.

a. Система (12), (14) может быть рассмотрена как НДС. Она имеет неподвижную точку (14), в которой нет вырождения (16), $\det J \neq 0$.

$$
M'_\xi(\xi,\delta) = -U'_\xi(\xi,\delta)\ T_1/(\beta\ Y). \tag{18}
$$

Тогда имеем $t'_\xi(\xi,\delta)=0$. Тогда $t(\xi,\delta)=\tau(\delta)$, и из (6) имеем $x'_\xi(\xi,\delta)=U'_\xi(\xi,\delta)/Y(\xi,\delta)$, а из (7), имеем

$$M(\xi,\delta)=Y'_\xi\ Y(\xi,\delta)/U'_\xi(\xi,\delta). \tag{19}$$

Приравниваем (18) и частную производную по переменной ξ от выражения (19) и получаем

$$T(\xi,\delta)=-U^n\ Y-\beta\ Y\ \left(\frac{\partial}{\partial\ \xi}\left(Y\ Y'_\xi/U'_\xi\right)\right)/U'_\xi. \tag{20}$$

Затем мы можем вычислить элементы новой матрицы Якоби J_1 для системы (12), (14), собственные числа, след, новый якобиан, информацию о фазовом потоке и другие характеристики.

b. Систему (13), (15) также можно рассматривать как НДС. Здесь также есть неподвижная точка (15), в которой нет вырождения (16), $\det J\neq 0$. Аналогично случаю (**a**) мы имеем

$$M'_\delta(\xi,\delta)=-U'_\delta(\xi,\delta)\ T_1/(\beta\ Y). \tag{21}$$

Тогда $t'_\delta(\xi,\delta)=0$. Пусть $t(\xi,\delta)=\xi$, и из (6) получим $x'_\delta(\xi,\delta)=U'_\delta(\xi,\delta)/Y(\xi,\delta)$, а из (7) имеем

$$M(\xi,\delta)=Y'_\delta\ Y(\xi,\delta)/U'_\delta(\xi,\delta). \tag{22}$$

Приравниваем (21) и частную производную от (22) по переменной δ, получим

$$T(\xi,\delta)=-U^n\ Y-\beta\ Y\ \left(\frac{\partial}{\partial\delta}\left(Y\ Y'_\delta/U'_\delta\right)\right)/U'_\delta. \tag{23}$$

Уравнение (14) с учётом равенства $t'_\xi=1$ примет вид

$$\frac{\partial}{\partial\delta}\left(\ T(\xi,\delta)/Y(\xi,\delta)\right)+\left(Y'_\delta\ U'_\xi-Y'_\xi\ U'_\delta\right)/Y^2=0. \tag{24}$$

Тогда можно вычислить элементы новой матрицы Якоби J_2 для системы (13), (15), и так далее. Отметим наличие симметрии в соотношениях (18)–(20) и (21)–(23) относительно замены ξ на δ.

Изучение устойчивости решений КдВ выходит за рамки данной работы.

4. Свойство условий разрешимости системы (12)–(15)

На втором этапе рассмотрим систему НДУсЧП первого порядка (12)–(15) относительно функций $x=x(\xi,\delta)$, $t=t(\xi,\delta)$. Хорошо известно, что условием разрешимости такого типа систем является равенство вторых смешанных производных функций $x = x(\xi, \delta)$ и $t = t(\xi, \delta)$ по аргументам ξ и δ. Основой для вычисления вторых производных являются уравнения (12)–(15). Тогда получим

$$\frac{\partial^2 x(\xi,\delta)}{\partial\xi\,\partial\delta} = \frac{\partial^2 x(\xi,\delta)}{\partial\delta\,\partial\xi},\ \frac{\partial^2 t(\xi,\delta)}{\partial\xi\,\partial\delta} = \frac{\partial^2 t(\xi,\delta)}{\partial\delta\,\partial\xi}. \tag{25}$$

Следующая теорема представляет один из центральных результатов метода НФКЗП:

Теорема 2. Пусть дана система уравнений (12)–(15). Тогда

a. Мы имеем два условия разрешимости

$$\frac{\partial z_1(\xi,\delta)}{\partial\delta} - \frac{\partial z_2(\xi,\delta)}{\partial\xi} = TQ = 0,\ \frac{\partial z_3(\xi,\delta)}{\partial\delta} - \frac{\partial z_4(\xi,\delta)}{\partial\xi} = Y{\Psi_0}^2\,Q = 0, \tag{26}$$

для которых существует нетривиальный общий множитель $Q(\xi, \delta)$ для любой произвольной гладкой функции $M(\xi, \delta)$.

b. Два условия разрешимости (12)–(15) сводятся к равенству нулю общего множителя

$$Q(\xi,\delta) = 0 \tag{27}$$

для любых гладких функций $U(\xi, \delta),\ Y(\xi, \delta),\ T(\xi, \delta),\ M(\xi, \delta)$.

Доказательство. Это свойство НДУсЧП было неизвестно ранее и впервые опубликовано в [11] для НДУсЧП приведенного во введении. Новое НДУсЧП $Q = 0$ зависит от неизвестных функций $Y(\xi, \delta),\ T(\xi, \delta),\ M(\xi, \delta),\ U(\xi, \delta)$ и их первых производных. Уравнение (27) получаем непосредственными вычислениями (26). Это уравнение в исходном виде очень громоздкое[2], однако, после построения точного решения оно существенно упрощается и получим в итоге «скрытое» ключевое уравнение содержащее всего три члена суммы. Уравнение вида, указанного в формулировке теоремы , для уравнения КдВ в первом случае было впервые приведено в докладе [21]и впервые опубликовано в данной работе.

Если какая-то четвёрка гладких функций U, Y, T, M удовлетворяет соотношению (27), тогда система (12)–(15) и (5), (6), (8), (10) является разрешимой. С добавленным уравнением (7) решение первоначального НДУсЧП КдВ (1) восстанавливается (2). *Теорема 2 доказана.*

5. Точные решения уравнения Кортевега–де Вриза.

[2]Для его записи требуется более трёх страниц формата А4 шрифтом 14. Для проверки была использована система компьютерных символьных вычислений Wolfram Mathematica.

Конструирование точных решений НДУсЧП KdV методом НФКЗП для функций $U(\xi,\delta),\ Y(\xi,\delta), T(\xi,\delta),\ M(\xi,\delta)$ позволяет доказать, что если определена функция первой производной $Y(\xi,\delta)$, то определены и все остальные функции. Тогда мы можем вернуться к первоначальным решениям (2)–(4) уравнения KdV (1) в параметрической форме.

Теорема 3. Пусть дана система (5)–(8), (10). Тогда замена переменных (2)–(4) позволяет для функции первой производной $Y(\xi,\delta)$ получить уравнение в новых переменных, и это уравнение отделяется от всех других уравнений и зависит только от функции $U(\xi,\delta)$ и её производных:

$$\frac{\partial}{\partial\delta}\ \left(U^n(\xi,\delta)+\beta\ \left(\frac{\partial}{\partial\delta}\ (Y\ Y'_\delta/U'_\delta\ )\right)/U'_\delta\ \right)=(Y'_\delta\ U'_\xi-Y'_\xi\ U'_\delta)/Y^2. \tag{28}$$

Ещё одна замена для функции $Y(\xi,\delta)$ имеет вид[3]

$$Y(\xi,\delta)=\sqrt{G(\eta,\xi)}\Big|_{\eta=U(\xi,\delta)},\ \eta=U(\xi,\delta),\ t(\xi,\delta)=\xi. \tag{29}$$

Тогда новый класс точных решений НДУсЧП KdV описывается формулами

$$\begin{aligned}
&M(\xi,\delta)=G'_\eta(\eta,\xi)/2\Big|_{\eta=U(\xi,\delta)},\\
&T(\xi,\delta)=-\sqrt{G(\eta,\xi)}\ (2\ \eta^n+\beta\ G''_{\eta\eta}(\eta,\xi))/2\Big|_{\eta=U(\xi,\delta)},\\
&x(\xi,\delta)=X(\eta,\xi)\Big|_{\eta=U(\xi,\delta)},\\
&\frac{\partial\ X(\eta,\xi)}{\partial\tau}=\eta^n+\beta\ G''_{\eta\eta}/2,\quad \frac{\partial\ X(\eta,\xi)}{\partial\ \eta}=1/\sqrt{G(\eta,\xi)},\\
&\det J=-U'_\delta(\xi,\delta)/G(\eta,\xi)^{1/2}\Big|_{\eta=U(\xi,\delta)},
\end{aligned} \tag{30}$$

и функция $G(\eta,\xi)$ определяется из нового в теории КдВ уравнения

$$\frac{\partial G(\eta,\xi)}{\partial\xi}/(\beta\ G(\eta,\xi)^{3/2})+\frac{\partial^3\ G(\eta,\xi)}{\partial\eta^3}+2n\eta^{n-1}/\beta=0. \tag{31}$$

Якобиан имеет вид $\det J=-U'_\delta/\sqrt{G(\eta,\tau)}\Big|_{\eta=U(\xi,\delta)}$. Функция $U(\xi,\delta)$ остается произвольной гладкой, трижды непрерывно дифференцируемой функцией.

Доказательство. Рассмотрим случай (**b**) в параграфе 3. Пусть $t(\xi,\delta)=\xi$, тогда получим соотношения (21)–(24). Условия разрешимости (25) в этом

[3] в статье, для простоты выкладок, формулы приведены для положительной ветви решения, за исключением примера, где это необходимо

случае сводятся к уравнению (24). Уравнение $t'_\xi = 1$ следует из (14) и тоже принимает форму (24). Комбинируем два соотношения (23) и (24), исключаем функцию T, тогда справедливо уравнение (28). После замены переменных (29) опять получим уравнение (31).

Из (12), (13) получим соотношения для производных

$$x'_\xi(\xi,\delta) = \left(U'_\xi/\sqrt{G(\eta,\xi)} + \eta^n + \beta\, G''_{\eta\eta}/2\right)\Big|_{\eta=U(\xi,\delta)},$$

$$x'_\delta(\xi,\delta) = U'_\delta/\sqrt{G(\eta,\xi)}\Big|_{\eta=U(\xi,\delta)}.$$

Положим $x(\xi,\delta) = X(U(\xi,\delta),\xi)$, тогда следуют соотношения (30).

Для разрешимости (25) в переменных $\eta,\ \xi$ должно быть выполнено $\frac{\partial^2 X(\eta,\xi)}{\partial\eta\,\partial\xi} = \frac{\partial^2 X(\eta,\xi)}{\partial\xi\,\partial\eta}$, тогда мы получим уравнение (31) снова. Это означает, что точное решение (28)–(31) существует. *Теорема 3 доказана.*

Пример. Кратко опишем нетривиальное новое точное решение (31), а следовательно, и (1). При $n = 1$ уравнение (31) имеет решение $G(\eta,\xi) = \Xi(\theta)$ с инвариантом $\theta = \eta + V\xi$. Тогда из (31) следует обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ$_3$). Первый интеграл ОДУ$_3$ имеет вид ОДУ$_4$

$$\Xi''(\theta) \mp 2V/(\beta\sqrt{\Xi(\theta)}) = -C_4 - 2\theta/\beta,$$

C_4 – константа. Это нелинейное ОДУ$_4$ с правой частью. Во-вторых, можно умножить ОДУ$_4$ на функцию $\Xi'(\theta)$. После интегрирования получим квадратуру

$$(\Xi'(\theta))^2/2 + C_5 + C_4\Xi(\theta) + 2(\theta\Xi - \textstyle\int \Xi(\theta)\,d\theta)/\beta - 4V\sqrt{\Xi(\theta)}/\beta = 0,$$

C_5, C_4 – константы. Положим $X(\eta,\xi) = X_1(\eta + V\xi)$. Тогда из (30) следует $X(\theta) = \pm\int(1/\sqrt{\Xi(\theta)})\,d\theta$. Это неявное уравнение для вычисления функции $\Xi(\theta)$.

Заметим, кроме того, что из ОДУ$_4$ следует неавтономная динамическая система

$\Xi'(\theta) = p(\theta),\ p'(\theta) = -C_4 - 2\theta/\beta \pm 2V/\beta\sqrt{\Xi(\theta)})$. Вычисляем $\frac{d\theta}{d\Xi(\theta)} = 1/\left(\frac{d\Xi(\theta)}{d\theta}\right) = 1/p(\theta)$, тогда матрица Якоби$_2$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2/(\beta p) \pm V/(\beta\Xi^{3/2}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Неподвижная точка определяется выражениями $p = 0,\ \Xi = 4V^2/(C_4\beta + 2\theta)^2$. Отсюда следует, что при различных значениях параметров на экваторе сферы Пуанкаре могут существовать особые точки центр или седло. Далее следует провести анализ существования бифуркаций. Подробное исследование показывает, что данное новое точное решение описывает волну несимметричную с большим значением производной на переднем фронте, отличающуюся от решения К. Якоби. Это решение упомянуто в параграфе 2 и подробно исследовано, например, в [8, 9, 17]. Очевидно, что полное исследование этого решения должно быть изложено в отдельной работе. Другое решение имеет вид $G(\eta,\xi) = \eta^{n+2}(\Psi(\varphi))'$, $\varphi = \eta^{3ns/2}\xi^s$, $s \neq 0$. Отметим, что уравнения (28), (31) являются новыми в теории уравнения КдВ.

Замечание 1. Для уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргерса [1–3, 9, 17], в котором в уравнение (1) добавлены вторые производные (диссипация) не существует решения, построенного методом НФКЗП, аналогичного построенному в теореме 3. При доказательстве теоремы 3 мы три раза получаем одно и тоже уравнение (28), (31). В уравнении с диссипацией этого не происходит, так как получаются различные уравнения, отличающиеся слагаемыми, связанными с диссипацией.

6. Возможность построения асимптотических решений уравнения (31) и в целом уравнения КдВ с функциональным произволом.

Замечание 2. Покажем, что в вырожденном случае из приведённых в теореме 3 формул следуют классические результаты. Якобиан (16) равен нулю на группе преобразований сдвига $U(\xi,\delta) = U_0(\delta - V\xi)$, или если функция первой производной $Y(\xi,\delta) = Y_0(U(\xi,\delta))$ зависит только от функции $U(\xi,\delta)$. Это случай вырождения и метод НФКЗП неприменим. Если $Y(\xi,\delta) = Y_0(U(\xi,\delta))$, тогда функция $G(\eta,\xi) = G(\eta)$ тогда из уравнений (28), (31) мы получим уравнение для функции первой производной $Y(\xi,\delta)$ (4) $Y^2(\eta) = -2\,\eta^{2+n}/(\beta(n+1)(n+2)) + C_1 + C_2\,\eta + C_3\,\eta^2$, $n \neq -1,-2$.
Это аналог ОДУ в начале параграфа 2.

Для примера, мы выберем заготовку для построения приближенного асимптотического решения уравнения (31), по малому параметру $0 < \varepsilon < 1$ методом, похожим на метод Пуанкаре–Лайтхила–Го, который активно применялся в [6, 7], в виде

$$G(\eta,\xi,\varepsilon) = -2\eta^{n+2}/(\beta(n+1)(n+2))\;(1 + s\;\varepsilon\;\eta^{\sigma-n-2}\psi(\eta,\xi) + O(\varepsilon^2)) + \\ +C_1(1 + \varepsilon\;\eta^{\sigma}\rho(\eta,\xi) + O(\varepsilon^2)) + C_2\eta\;(1 + \varepsilon\;\eta^{-1+\sigma}\varphi(\eta,\xi) + O(\varepsilon^2)) + \\ +C_3\eta^2\;(1 + \varepsilon\;\eta^{-2+\sigma}\mu(\eta,\xi) + O(\varepsilon^2)). \qquad (32)$$

Здесь s, σ – константы. Существуют функции поправки $\psi(\eta,\xi)$, $\rho(\eta,\xi)$, $\varphi(\eta,\xi)$, $\mu(\eta,\psi)$ порядка ε, которые удовлетворяют линейной ДУсЧП. Коэффициент перед функциями поправок $\psi(\eta,\xi), \psi(\eta,\xi), \varphi(\eta,\xi), \mu(\eta,\xi)$ можно выбрать разными способами. Разрешая ЛДУсЧП, одну из функций можно выразить через остальные. Произвольный выбор такой функции можно использовать для решения задачи Коши. Можно рассмотреть вариант, в котором надо приравнять все четыре функции поправок. Подробному вычислению асимптотических решений уравнения КдВ должна быть посвящена отдельная работа.

7. Второй класс точных решений уравнения Кортевега–де Вриза

Описание этого класса приведем коротко. Второй класс решений более сложный, чем первый.

Теорема 4. Пусть дана система (5)–(8), (10). Тогда точное решение НДУсЧП КдВ (1) имеет вид

$$Y(\xi,\delta)=\sqrt{G(\eta,\delta)}\Big|_{\eta=U(\xi,\delta)},\ \eta=U(\xi,\delta),\ x(\xi,\delta)=\delta, \tag{33}$$

$$M(\xi,\delta)=M_0(\eta,\delta)\Big|_{\eta=U(\xi,\delta)},\ t(\xi,\delta)=\tau(\eta,\delta)\Big|_{\eta=U(\xi,\delta)}, \tag{34}$$

$$M_0(\eta,\delta)=G'_\delta(\eta,\delta)/(2\ \sqrt{G(\eta,\delta)})+G'_\eta(\eta,\delta)/2. \tag{35}$$

Функция $T(\xi,\delta)$ определена в (17). После замены (33)–(35) получим

$T(\xi,\delta)=T_0(U(\xi,\delta),\delta)\Big|_{U(\xi,\delta)=\eta}$. Тогда $T_0(\eta,\delta)=$

$$= -\left(\sqrt{G(\eta,\delta)}(\beta M'_{0\ \delta}(2M_0-G'_\eta(\eta,\delta))+G'_\delta(\eta,\delta)(\eta^n+\beta M'_{0\ \eta})/G'_\delta(\eta,\delta)\right)=$$
$$=-\eta^n\sqrt{G(\eta,\delta)}+\beta(G'_\delta)^2/(4\ \sqrt{G^3})-\beta G''_{\delta\delta}/(2\sqrt{G})+\beta\tfrac{\partial G(\eta,\delta)}{\partial\delta}\tfrac{\partial G(\eta,\delta)}{\partial\eta}/(4G)-$$
$$-\beta\tfrac{\partial^2G(\eta,\delta)}{\partial\eta\partial\delta}-\beta\sqrt{G}\tfrac{\partial^2G(\eta,\delta)}{\partial\eta^2}/2.$$

Тогда уравнение для функции первой производной $Y(\xi,\delta)=\sqrt{G(\eta,\delta)}\Big|_{\eta=U(\xi,\delta)}$ в новых переменных отделяется от остальных уравнений и зависит только от функции $U(\xi,\delta)$, и ее производных :

$$\frac{\partial^3G(\eta,\delta)}{\partial\eta^3}+3\frac{\partial^3G(\eta,\delta)}{\partial\eta\partial\delta^2}/G+3\frac{\partial^3G(\eta,\delta)}{\partial\eta^2\partial\delta}/\sqrt{G(\eta,\delta)}-$$
$$-3\left(G'_\delta+\sqrt{G}G'_\eta\right)\frac{\partial^2G(\eta,\delta)}{\partial\eta\partial\delta}/(2G^2)+3\frac{\partial G(\eta,\delta)}{\partial\delta}\left(\frac{\partial G(\eta,\delta)}{\partial\eta}\right)^2/(4\sqrt{G^5})-$$
$$-3\left(-(G'_\delta)^2+GG''_{\eta\eta}\right)\frac{\partial G(\eta,\delta)}{\partial\eta}/(2G^3)+\frac{\partial^3G(\eta,\delta)}{\partial\delta^3}/\sqrt{G^3}+$$
$$+2n\eta^{n-1}/\beta-3G'_\delta G''_{\delta\delta}/(2\sqrt{G^5})+3(G'_\delta)^3/(4\sqrt{G^7})+\eta^nG'_\delta/(\beta\sqrt{G^3})=0. \tag{36}$$

Производные функции $\tau(\eta,\delta)$ имеют вид

$$\tau'_\delta(\eta,\delta)=4\ G^2(\eta,\delta)/\Psi_2,\qquad \tau'_\eta(\eta,\delta)=-4\sqrt{G^3(\eta,\delta)}/\Psi_2,$$

$$\Psi_2=4\eta^n G^2(\eta,\delta)-\beta(G'_\delta)^2+2\beta GG''_{\delta\delta}-\beta\sqrt{G}G'_\delta G'_\eta+4\beta\sqrt{G^3}G''_{\delta\eta}+2\beta G^2G''_{\eta\eta}.$$

Функция $U(\xi,\delta)$ — произвольная трижды непрерывно дифференцируемая функцией.

Доказательство.

Положим $x(\xi,\delta)=\delta,\ x'_\xi(\xi,\delta)=0,\ x'_\delta(\xi,\delta)=1$, тогда из (12),(13) следуют уравнения

$$\begin{gathered}\beta\ Y(\xi,\delta)\ \big(T'_\delta(\xi,\delta)\ M'_\xi(\xi,\delta)-T'_\xi(\xi,\delta)\ M'_\delta(\xi,\delta)\big)\,U'_\xi(\xi,\delta)+\\ +T_1(\xi,\delta)\ \big(T'_\delta(\xi,\delta)\ U'_\xi(\xi,\delta)-T'_\xi(\xi,\delta)\ U'_\delta(\xi,\delta)\big)\,U'_\xi(\xi,\delta)+\\ +\beta\ T(\xi,\delta)\ \big(M'_\delta(\xi,\delta)\ U'_\xi(\xi,\delta)-M'_\xi(\xi,\delta)\ U'_\delta(\xi,\delta)\big)\,Y'_\xi(\xi,\delta)=0,\end{gathered}\tag{37}$$

$$\begin{gathered}(\beta\ Y(\xi,\delta)\ \big(T'_\delta(\xi,\delta)\ M'_\xi(\xi,\delta)-T'_\xi(\xi,\delta)\ M'_\delta(\xi,\delta)\big)\ U'_\delta(\xi,\delta)+\\ +T_1(\xi,\delta)\ \big(T'_\delta(\xi,\delta)\ U'_\xi(\xi,\delta)-T'_\xi(\xi,\delta)\ U'_\delta(\xi,\delta)\big)\ U'_\delta(\xi,\delta)+\\ +\beta\ T(\xi,\delta)\ \big(M'_\delta(\xi,\delta)\ U'_\xi(\xi,\delta)-M'_\xi(\xi,\delta)\ U'_\delta(\xi,\delta)\big)\ Y'_\delta(\xi,\delta))/\Psi=1,\end{gathered}\tag{38}$$

Выражение для функции $T(\xi,\delta)$ следует из выражения (17). Используя (37),(38), после замены (33),(34) получим соотношение (35). Используя (14), (15), после замены (33)-(35) мы получим соотношения на производные $\tau'_\delta(\eta,\delta),\ \tau'_\eta(\eta,\delta)$, где используем соотношения (36). Далее делаем упрощения. Выразим третью производную $\frac{\partial^3G(\eta,\delta)}{\partial\eta^3}$ из уравнения (36) и исключим ее из соотношений на первые производные $\tau'_\delta(\eta,\delta),\ \tau'_\eta(\eta,\delta)$.

Кроме условия разрешимости (25) в переменных $\eta,\ \delta$, в данной ситуации также должны быть выполнены $\frac{\partial^2\tau(\eta,\delta)}{\partial\eta\ \partial\delta}=\frac{\partial^2\tau(\eta,\delta)}{\partial\delta\ \partial\eta}$. Здесь после замены (33)–(35) опять получим уравнение (36). Это означает, что точное решение (33)–(36) существует.

Из уравнения $x'_\delta=1$, которое имеет вид (38) с помощью (33)–(35) опять получим уравнение (36). *Теорема 4 доказана.*

Отметим, что при доказательстве теоремы 4 три раза возникает одно и тоже уравнение (36). В уравнении Кортевега–де Вриза–Бюргерса с диссипацией этого не происходит.

8. Новый класс точных решений уравнения Гарри Дима. Применим впервые метод НФКЗП, аналогично теоремам 1–4, к уравнению Гарри Дима

$$\frac{\partial Z(x,t)}{\partial t}+Z^\alpha\frac{\partial^3Z}{\partial x^3}=0.\tag{39}$$

Сделаем замену переменных (2)–(7). Уравнение (8) следует из (39) имеет вид

$$\frac{\partial M}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial M}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi} = -T(\xi,\delta)\ \det J\ U^{-\alpha}. \tag{40}$$

Мы имеем систему (5), (6), (40), (10). Справедливы теоремы аналогичные 1–4.

Теорема 5. Пусть дана система четырех уравнений (5), (6), (40), (10) относительно производных (11). Тогда СФЛАУ (5), (6), (40), (10) имеет единственное решение

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \xi} &= ((Y(\xi,\delta)\ \left(M'_\delta(\xi,\delta)\ T'_\xi(\xi,\delta) - M'_\xi(\xi,\delta)\ T'_\delta(\xi,\delta)\right) U'_\xi(\xi,\delta) + \\ &+T(\xi,\delta)\ \left(U'_\delta(\xi,\delta)\ M'_\xi(\xi,\delta) - U'_\xi(\xi,\delta)\ M'_\delta(\xi,\delta)\right)\ U^\alpha + T(\xi,\delta)\ U'_\xi(\xi,\delta)\times \\ &\times \left(U'_\delta(\xi,\delta)\ T'_\xi(\xi,\delta) - U'_\xi(\xi,\delta)\ T'_\delta(\xi,\delta)\right))/\Psi_1,\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \delta} &= (T(\xi,\delta)\ U'_\delta(\xi,\delta)\ \left(T'_\delta(\xi,\delta)\ U'_\xi(\xi,\delta) - T'_\xi(\xi,\delta)\ U'_\delta(\xi,\delta)\right) + \\ &+U^\alpha\ (Y(\xi,\delta)\ \left(T'_\delta(\xi,\delta)\ M'_\xi(\xi,\delta) - T'_\xi(\xi,\delta)\ M'_\delta(\xi,\delta)\right) U'_\delta(\xi,\delta) + \\ &+T(\xi,\delta)\ \Big(M'{}_\delta(\xi,\delta)\ U'_\xi(\xi,\delta) - M'_\xi(\xi,\delta)\ U'_\delta(\xi,\delta)\Big)\, Y'_\delta(\xi,\delta))/\Psi_1,\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial t}{\partial \xi} &= \Big(Y(\xi,\delta)\ M'{}_\xi(\xi,\delta)\ U^\alpha + T(\xi,\delta)\ U'_\xi(\xi,\delta)\Big)\times \\ &\times \left(Y'_\delta(\xi,\delta)\ U'_\xi(\xi,\delta) - Y'_\xi(\xi,\delta)\ U'_\delta(\xi,\delta)\right)/\Psi_1,\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial t}{\partial \delta} &= (Y(\xi,\delta)\ M'_\delta(\xi,\delta)\ U^\alpha + T(\xi,\delta)\ U'_\delta(\xi,\delta))\times \\ &\times \left(Y'_\xi(\xi,\delta)\ U'_\delta(\xi,\delta) - Y'_\delta(\xi,\delta)\ U'_\xi(\xi,\delta)\right)/\Psi_1, \\ \Psi_1 &= (Y(Y\left(M'_\delta(\xi,\delta)\ T'_\xi(\xi,\delta) - M'_\xi(\xi,\delta)\ T'_\delta(\xi,\delta)\right) + \\ &+T\left(Y'_\delta(\xi,\delta)\ M'_\xi(\xi,\delta) - Y'_\xi(\xi,\delta)\ M'_\delta(\xi,\delta)\right))\ U^\alpha + \\ &+T(Y\left(U'_\delta(\xi,\delta)\ T'_\xi(\xi,\delta) - U'_\xi(\xi,\delta)\ T'_\delta(\xi,\delta)\right) + \\ &+T\left(Y'_\delta(\xi,\delta)\ U'_\xi(\xi,\delta) - Y'_\xi(\xi,\delta)\ U'_\delta(\xi,\delta)\right))).\end{aligned} \tag{44}$$

Функцию $T(\xi,\delta)$ мы можем определить из (7) аналогично (17).

Приведенная теорема 5 аналогична теореме 1, поэтому её доказательство проводится аналогично.

Теорема 6. Пусть дана система (5)–(7), (10), (40). Тогда после замены переменных уравнение для функции первой производной $Y(\xi,\delta)$ в новых переменных отделяется от остальных уравнений и зависит только от функции $U(\xi,\delta)$ и её производных:

$$\frac{\partial}{\partial\delta}\left(U(\xi,\delta)^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\delta}\left(YY'{}_{\delta}\right)/U'{}_{\delta}\right)/U'_{\delta}\right)=(Y'_{\delta}U'_{\xi}-Y'_{\xi}U'_{\delta})/Y^{2}. \tag{45}$$

Замена переменных для функции $Y(\xi,\delta)$ имеет вид

$$Y(\xi,\delta)=\sqrt{G(\eta,\xi)}\Big|_{\eta=U(\xi,\delta)},\ \eta=U(\xi,\delta),\quad t(\xi,\delta)=\xi, \tag{46}$$

где гладкая функция $G(\eta,\xi)$ определяется уравнениями

$$G(\eta,\xi)^{-3/2}\frac{\partial G(\eta,\xi)}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta^{\alpha}\frac{\partial^{2}G(\eta,\xi)}{\partial\eta^{2}}\right)=0. \tag{47}$$

Тогда существует точное решение НДУсЧП ГД (39), которое описывается формулами

$$\begin{gathered}M(\xi,\delta)=G'_{\eta}(\eta,\xi)/2\Big|_{\eta=U(\xi,\delta)},\quad T(\xi,\delta)=-\eta^{\alpha}\sqrt{G(\eta,\xi)}G''_{\eta\eta}(\eta,\xi)/2\Big|_{\eta=U(\xi,\delta)},\\ x(\xi,\delta)=X(\eta,\xi)\Big|_{\eta=U(\xi,\delta)},\quad \frac{\partial\ X(\eta,\xi)}{\partial\xi}=\eta^{\alpha}G''_{\eta\eta}/2,\quad \frac{\partial X(\eta,\xi)}{\partial\eta}=1/\sqrt{G(\eta,\xi)},\\ \det J=-U'_{\delta}(\xi,\delta)/G(\eta,\xi)^{1/2}\Big|_{\eta=U(\xi,\delta)}.\end{gathered} \tag{48}$$

Функция $U(\xi,\delta)$ — произвольная трижды непрерывно дифференцируемая функция.

Доказательство. Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 3. Рассмотрим неподвижную точку в (44) $t(\xi,\delta)=\xi,\ t'_{\delta}=0$, и из (40) получим соотношения

$$M'_{\delta}(\xi,\delta)=-U'_{\delta}(\xi,\delta)TU^{-\alpha}/Y,\ \ t(\xi,\delta)=\xi,\ M(\xi,\delta)=Y'_{\delta}Y(\xi,\delta)/U'_{\delta}(\xi,\delta). \tag{49}$$

Приравнивая производные из (49) $M'_{\delta}\equiv M'_{\delta}$, получим

$$T(\xi,\delta)=-U^{\alpha}Y\left(\frac{\partial}{\partial\delta}\left(YY'_{\delta}/U'_{\delta}\right)\right)/U'_{\delta}. \tag{50}$$

Используем уравнение (43) $t'_{\xi}=1$ и получим

$$\frac{\partial}{\partial\delta}\left(T(\xi,\delta)/Y(\xi,\delta)\right)+\left(Y'_{\delta}U'_{\xi}-Y'_{\xi}U'_{\delta}\right)/Y^{2}=0. \tag{51}$$

Исключая из (50) и (51) функцию T, мы получим (45) и (48). Из условий разрешимости (25) опять следуют уравнения (45) и (48). Положим $x(\xi,\delta) = X(U(\xi,\delta),\xi)$, тогда получим соотношения для производных (47). Из уравнений (47) также можем получить условие разрешимости $\frac{\partial^2 X(\eta,\xi)}{\partial\eta\partial\xi} = \frac{\partial^2 X(\eta,\xi)}{\partial\xi\partial\eta}$, которое должно быть выполнено. Отсюда также опять следуют уравнения (45), (48). *Теорема 6 доказана.*

Отметим, что уравнения (45), (48) являются новыми в теории уравнения ГД и они при доказательстве теоремы 6 появляются три раза. Этого не происходит в уравнении ГД–Бюргерса с диссипацией.

7. Второй класс точных решений уравнения Гарри Дима. Второй класс решений более сложный, чем первый.

Теорема 7. Пусть дана система (5), (6), (40), (10). Тогда точное решение НДУсЧП ГД (39) имеет вид

$$Y(\xi,\delta) = \sqrt{G(\eta,\delta)}\Big|_{\eta=U(\xi,\delta)},\ \eta = U(\xi,\delta),\ x(\xi,\delta) = \delta, \tag{52}$$

$$\begin{aligned} &M(\xi,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} M_0(U(\xi,\delta),\delta)\Big|_{U(\xi,\delta)=\eta},\\ &M_0(\eta,\delta) = \Big(G'_\delta(\eta,\delta)/\sqrt{G(\eta,\delta)} + G'_\eta(\eta,\delta)\Big)/2,\\ &t(\xi,\delta) = \tau(U(\xi,\delta),\delta). \end{aligned} \tag{53}$$

Функция $T(\xi,\delta)$ определена из (7)

$$T(\xi,\delta) = T_0(U(\xi,\delta),\delta)\Big|_{U(\xi,\delta)=\eta}.$$

Тогда $T_0(\eta,\delta) = (1/G'_\delta(\eta,\delta))\Big(\eta^\alpha\sqrt{G(\eta,\delta)}(M'_{0\delta}(\eta,\delta)(-2M_0+G'_\eta(\eta,\delta))-G'_\delta(\eta,\delta)M'_{0\eta}(\eta,\delta))\Big) =$
$= \eta^n(G'_\delta)^2/(4\sqrt{G(\eta,\delta)}^3 - \eta^\alpha G''_{\delta\delta}/(2\sqrt{G}) + \eta^\alpha G'_\delta G'_\eta/(4\,G) - \eta^\alpha G''_{\delta\eta} - \eta^\alpha\sqrt{G}G''_{\eta\eta}/2.$

Уравнение для функции первой производной

$$Y(\xi,\delta) = \sqrt{G(\eta,\delta)}\Big|_{U(\xi,\delta)=\eta}$$

в новых переменных отделяется от остальных уравнений и зависит только от функции $U(\xi,\delta)$ и её производных :

$$\frac{\partial^3 G(\eta,\delta)}{\partial\eta^3}+3\frac{\partial^3 G(\eta,\delta)}{\partial\eta\partial\delta^2}/G+3\frac{\partial^3 G(\eta,\delta)}{\partial\eta 2\partial\delta}/\sqrt{G(\eta,\delta)}+\alpha G''_{\eta\eta}/\eta+$$
$$+\left(2\alpha/(\eta\sqrt{G})-3G'_\delta/(2G^2)-3G'_\eta/(2\sqrt{G^3})\right)\frac{\partial^2 G(\eta,\delta)}{\partial\eta\partial\delta}+$$
$$+3\frac{\partial G(\eta,\delta)}{\partial\delta}\left(\frac{\partial G(\eta,\delta)}{\partial\eta}\right)^2/(4\sqrt{G^5})+\frac{\partial^3 G(\eta,\delta)}{\partial\delta^3}/\sqrt{G^3}-\alpha(G'_\delta)^2/(2\ \eta\ G^2)+$$
$$+\left(-\alpha G'_\delta/(2\eta\sqrt{G^3})+3(G'_\delta)^2/(2G^3)-3G''_{\delta\delta}/(2G^2)\right)\frac{\partial G(\eta,\delta)}{\partial\eta}+$$
$$+\left(\alpha/(\eta G)-3G'_\delta/(2G^{5/2})\right)G''_{\delta\delta}+3(G'_\delta)^3/(4\sqrt{G^7})=0. \qquad (54)$$

Производные функции $\tau(\eta,\delta)$ имеют вид

$$\tau'_\delta(\eta,\delta)=4\eta^{-\alpha}G^{3/2}(\eta,\delta)/\Psi_3,\ \tau'_\eta(\eta,\delta)=-4\eta^{-\alpha}\sqrt{G^2(\eta,\delta)}/\Psi_3,$$
$$\Psi_3=(G'_\delta)^2+\sqrt{G}G'_\delta G'_\eta-2G\left(G''_{\delta\delta}+2\sqrt{G}G''_{\delta\eta}+GG''_{\eta\eta}\right). \qquad (55)$$

Функция $U(\xi,\delta)$ — произвольная трижды непрерывно дифференцируемая функция.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.

Положим $x(\xi,\delta)=\delta,\ x'_\xi(\xi,\delta)=0,\ x'_\delta(\xi,\delta)=1$, тогда из (41), (42) следуют два уравнения. Выражение для функции $T(\xi,\delta)$ следует из выражения (7), аналогично (37), (38). Используя замены (52),(53) получим соотношение $T_0(\eta,\delta)$ и затем (53) $M_0(\eta,\delta)$ и уравнение (54). Вычисляем первые и вторые производные от этих функций, используемые в дальнейшем для упрощений полученных выражений. Используя замены (52), (53) получим соотношения на производные (55) $\tau'_\delta(\eta,\delta)$, $\tau'_\eta(\eta,\delta)$.

Условия разрешимости (25) в переменных $\eta,\ \delta$ также должны быть выполнены $\frac{\partial^2\tau(\eta,\delta)}{\partial\eta\partial\delta}=\frac{\partial^2\tau(\eta,\delta)}{\partial\delta\partial\eta}$. Здесь опять получим уравнение (54).

Теорема 7 доказана.

Замечание 3. В теоремах 4, 5, 7, 8 описана только одна ветвь решения, за исключением примера, где необходимо описать обе ветви. Формулы для отрицательной ветви решения $Y(\xi,\delta)=-\sqrt{G(\eta,\xi)}$ выводятся аналогично.

Благодарности

Авторы благодарны В.П. Маслову, М.В. Карасеву, В.Г. Данилову, В.Ф. Зайцеву за внимание к работе и полезные советы.

Список литературы

[1] Маслов В. П. Асимптотические методы и теория возмущений. – М.: Наука. 1988, 312 с.

[2] Маслов В. П., Цупин В. А. Современные проблемы математики, 1977, №8, с. 273.

[3] Maslov V. P., Omel'yanov G. A. Geometric Asymptotics for Nonlinear PDE // Amer. Math. Soc. Providence 2001, v. 202, 360 p.

[4] Маслов В. П. Квантовая экономика. – М.: Наука, 2007. – 80 с.

[5] Маслов В. П., Данилов В. Г., Волосов К. А. Математическое моделирование технологических процессов изготовления БИС. – М.: МИЭМ, 1984.

[6] Маслов В. П., Данилов В. Г., Волосов К. А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса (эволюция диссипативных структур). С добавлением Н.А.Колобова. – М.: Наука, 1987.

[7] Maslov V. P., Danilov V. G., Volosov K. A. Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes. – Kluver Academic Publishers. Dordrecht, Boston, London, 1995. – 316 p.

[8] Clarkson P. A., Kruskal M. D. New sinilarity reduction of the Boussinesq equation // J.Math.Phys., 1989, V. 30, №10, pp. 2201–2213.

[9] Solitons. Edited by R. K. Bullough, P. J. Caudrey with contributions by R. K. Bullought, F. Calogero, P. J. Caudrey, A. Degasperis, L. D. Faddev, H. M. Gibbs, R. Hirota, G. L. Lamb, Jr. A. H. Luther, D. W. McLaughlin, A. C. Newell, S. P. Novikov, M. Toda, M. Wadati, V. E. Zakharov. – New Yurk. 1980.

[10] Волосов К. А. Мат. заметки 1994, Т. 56, В. 6, С.122-126. English transl. Transformation of Approximate solutions of liner parabolic equations into asymptotic solutions of quasilinear parabolic equations // Mathematical Notes. 1994. Vol. 56. No 5–6, pp. 1295–1299.

[11] Волосов К. А. // Дифф. уравн. 2007, Т. 43, No 4, С. 492–497. English transl. Differential Equations. Pleiades Publishing Ltd., ISSN 0012–2661. Vol. 43, No 4, p. 507–512, 2007.

[12] Volosova A. K., Volosov K. A. Construction Solutions of PDE in Parametric Form // Hindawi Publ. Corp., Int. Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. V. 2009, Article ID 319269, 17 p., http://www.hindawi.com/journals/ijmms/2009/319269.htmt.
doi:10.1155/2009/319269

[13] Volosova A. K., Volosov K. A. Stochastic systems under periodic and white noise external excitation // The 3rd International Conference on Nonlinear Dynamics Nd-KhPI 2010, Kharkov, Ukraine, p. 437–442.

[14] Волосов К. А. Конструирование решений квазилинейных уравнений с частными производными // Сибирский журнал индустриальной математики. 2008, т. XI, 2 (34), 29–39 с. English transl. Construction of solutions of PDE. Journal of Applied and Industtrial Mathematics, 2009, V. 3, N. 4, pp. 519–527.

[15] Volosov K. A. Doctorial dissertation, MIEM, Moscow, Russia, MIIT, 2007,
http://eqworld.ipmnet.ru dis volosov Doc2007.pdf

[16] Волосов К. А. Формулы для точных решений квазилинейных уравнений с частными производными в неявной форме // ДАН, 2008, т. 418, с. 11–14. English transl. Implicit Formulas for Exaxt Solutions of Quasilinear Pathial Differential Equations. ISSN 1064-5624, Doklady Mathematics, 2008, Vol. 77, No 1, pp. 1–4, представлено академиком В.П. Масловым.

[17] Kudrashov N. A. From singular manifold to integrable evolution equations // J.Phys.A: Math. Gen. 27, (1994), 2457–2470. print in the UK.

[18] Volosov K. A., Vdovina E. K., Volosova A. K. Accompany matrix of the Korteweg – de Vries equation. International conference on the differential equations // Samara–Diff 2011, 26–30 june 2011, p. 32–33. Math-Net.Ru, Google Schoar, ZentralBlatt.

[19] Volosov K. A., Vdovina E. K., Volosova A. K. Accompany matrix of the Korteweg – de Vries equation // 8th International ISAAC Congress. Moscow, 22–27 august 2011, p. 278. Math-Net.Ru, Google Schoar, ZentralBlatt.

[20] Volosov K. A., Vdovina E. K. About expansion of number of models which have pairs of Lax's // International Journal Equation and Applications. 2012, v. 11, No 1, p. 27–30.

[21] Волосова Н. К., Волосов К. А., Волосова А. К., Вакуленко С. П. К теории уравнения Кортевега – де Вриза // LXX Международная конференция, посвященная 220-летию Университета. Российский государственный педагогический университет имени А. И. Герцена. 10–15 апреля 2017, с. 38–52. The theory adding to equation of Korteweg – de Vries. LXX International jubilee conference. St. Peterburg. Herzen State Pedagogical University of Russia, 10–15 April 2017, p. 38–52.

[22] Bratus A. S., Volosov K. A. Regularization of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation with nonlinearity of the module type in optimal control problems // Journal of Mathematical Sciences. Publisher cosultarts Bureau. An Inprint of Springer Verlag New–York LLG. – april 2005 – Vol.126. No 6. – P. 1542–1552.
http://dx.doi.org/10.1007/s10958-005-0042-1,
http://www.springeronline.com/authors ISSN 1072–3374 (paper) 1573-8795 (Online) DoI 10.1007/s10958-005-0042.

[23] Братусь А. С., Волосов К. А. Точные решения уравнения Беллмана для задач оптимальной коррекции с интегральным ограничением на суммарный ресурс управления // ПММ. 2004, Т. 68, No 5, С. 48–55. Engl. tran. in J.Appl.Math. and Mech. Bratus A.S., Volosov K. A. Exact solutions of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation for problems of optimal correction with a limited total control resourse. (Russian) Prikl.Mat.Mekh. 68 (2004), p. 819–832.

[24] Volosov K. A., Danilov V. G., Maslov V .P. Combustion wave asymptotics in nonlinear inhomogeneous media with slowly varying properties // Dokl. Akad. Nauk SSSR 290:5 (1986), 1089–1094 (Russian); English transl. in Soviet Math. Dokl.

[25] Volosov K. A., Danilov V. G., Maslov V. P. Weak discontinuity structure of solutions of quasilinear parabolic equations // Mat. Zametki 43:6 (1988), 829–838 (Russian); English transl. in Math. Notes.

[26] Маслов В. П., Цупин В. А. δ-образные обобщённые по Соболеву решения квазилинейных уравнений // УМН, 1979, т. 34, No 1 (205), 235–236. М.: Наука, 1987. English transl. δ-shaped Sobolev generalized solutions of quasilinear equations. Russian mathematical Surveys. 1979. V. 34, No 1 (205), 231–236.
http://dx.doi. org/10. 1070/RM1979v034n01ABEH002884

[27] Маслов В. П., Омельянов Г. А., Цупин В. А. Asymptotics of some differential and pseudodifferential equations, and dynamical systems with small dispersion. Math. USSR – Sb. 50:1 (1985), 191–212.

[28] Маслов В. П., Цупин В. А. Propagation of a shock wave in an isentropic gas with small viscosity // Journal of Soviet Mathematics. 1980. V. 13, No 1, pp. 163–185.

[29] Маслов В. П., Омельянов Г. А. Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // УМН, 1981, т. 36, No 3, 235–236. Asymptotic soliton – form solutions of equations with small dispersion. Russian math. Surveys, V. 36, No 3, (1981), pp. 73–149.

[30] Dobrochotov S., Maslov V. Multyphase asymptotics of nonlinear partial equations with a small parameter // Tn. Sov. Science rev., Phys. Rev., 1981. Amsterdam: Over Publ. Ass, 1982.

[31] Maslov V. P., Omel'yanov G. A. Soliton–like asymptotics of internal waves in a stratified fluid with small dispersion (Russian) Differentsial'nye Uravneniya V. 21. (1985), No 10, 1766–1775, 1837.

[32] Maslov V. P. Three algebras corresponding to nonsmooth solutions of quasilinear hiperbolic equations // Uspekhi Math. Nauk, V. 35, (1980) (Russian); Englis transl. in Russian Math.Surveys.

[33] Maslov V. P. The Complex WKB Method for Nonlinear Equations. I.Linear Theory. – Birkhäuser, Basel – Boston – Berlin, 1994.

[34] Maslov V. P. Nonstandard characteristics in asymptotic problems // Uspeki Mat. Nauk V. 38:6 (1983), pp. 3–36.