ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2005
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Теория нелинейных колебаний

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А.В.Захаров

Россия, 620085, Екатеринбург, Ленина, д. 51,
Уральский государственный университет им. А.М. Горького,
математико-механический факультет,
e-mail: hazarov@etel.ru

Аннотация

В работе исследуется влияние запаздывания на периодические колебания в консервативной системе. Показано, что введение запаздывания в консервативную систему может привести к появлению изолированных периодических решений. Приведены достаточные условия устойчивости этих решений. Представлены результаты численных экспериментов, подтверждающие теоретический анализ проблемы.

1. Постановка и обсуждение задачи

Рассмотрим скалярное нелинейное дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + F(x(t), x(t-\tau)) = 0, \tag{1.1}$$

где F – непрерывная функция по совокупности аргументов x и x_τ в области $(-a, a) \times (-a, a)$, $a > 0$, $F(0,0) = 0$, $\tau > 0$. Пусть $f(x) = F(x, x)$, $x \in (-a, a)$, – нечетная функция, $f(x) > 0$ при $0 < x < a$ и существует производная $f'(0) > 0$.

Работа продолжает исследования устойчивости τ-периодических решений дифференциального уравнения с запаздыванием (1.1), начатые в [1]. Конкретизируются условия устойчивости, полученные в этой работе. Для других классов дифференциальных уравнений с запаздыванием аналогичные вопросы рассматривались в работах [2, 3].

Искомое τ-периодическое решение уравнения (1.1), если оно существует, принадлежит семейству периодических решений обыкновенного автономного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0, \qquad x \in (-a, a). \tag{1.2}$$

Пусть $x(t, \mu)$, $t \in \mathbb{R}$, $\mu \in (0, a)$, – периодическое решение уравнения (1.2) с периодом $T(\mu)$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0, \mu) = \mu$, $\dot{x}(0, \mu) = 0$, $\mu \in (0, a)$. Функция периода T непрерывна на интервале $(0, a)$ и справедлива асимптотическая формула $T(\mu) = 2\pi/\sqrt{f'(0)} + o(\mu)$.

Предложение 1.1 [1]. *Пусть F – непрерывная функция в области $(-a, a) \times (-a, a)$, $F(0, 0) = 0$, функция f нечетна, $f(x) > 0$ при $0 < x < a$ и существует производная $f'(0) > 0$. Тогда для существования τ-периодического решения дифференциального уравнения с запаздыванием* (1.1) *необходимо и достаточно, чтобы число τ принадлежало интервалу* $(\inf\limits_{0<\mu<a} T(\mu), \sup\limits_{0<\mu<a} T(\mu))$. *Этот интервал дополняется значением* $t = \inf\limits_{0<\mu<a} T(\mu)$ $\big[t = \sup\limits_{0<\mu<a} T(\mu)\big]$, *если* $\inf\limits_{0<\mu<a} T(\mu) = T(\mu_1)$ $\big[\sup\limits_{0<\mu<a} T(\mu) = T(\mu_2)\big]$ *для некоторого* $\mu_1 \in (0, a)$ $\big[\mu_2 \in (0, a)\big]$.

Пусть F – непрерывно дифференцируемая функция в области $(-a, a) \times (-a, a)$. При исследовании на устойчивость периодического решения дифференциального уравнения с запаздыванием (1.1) $x_0(t) = x(t, \mu^0)$, $t \in \mathbb{R}$, где μ^0 – некоторый корень уравнения $T(\mu) = \tau$, рассмотрим уравнение линейного приближения

$$\ddot{y}(t) + F_1(x(t, \mu^0))y(t) + F_2(x(t, \mu^0))y(t - \tau) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

где $F_1(x) = \dfrac{\partial F(x, x)}{\partial x}$, $F_2(x) = \dfrac{\partial F(x, x)}{\partial x_\tau}$, $x \in (-a, a)$, для уравнения возмущенного движения. Коэффициенты дифференциального уравнения с запаздыванием (1.3) являются τ-периодическими функциями.

В уравнении (1.3) параметр μ^0 заменим на μ и рассмотрим однопараметрическое семейство дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\ddot{y}(t) + F_1(x(t, \mu))y(t) + F_2(x(t, \mu))y(t - T(\mu)) = 0, \qquad \mu \in [0, a). \tag{1.4}$$

В уравнении (1.4) сделаем замену переменных

$$t = T(\mu)s/(2\pi), \qquad y(T(\mu)s/(2\pi)) = \tilde{y}(s).$$

В результате получим семейство дифференциальных уравнений с запаздыванием и с 2π-периодическими коэффициентами

$$\ddot{\tilde{y}}(s) + \frac{T^2(\mu)}{4\pi^2}(F_1(\tilde{x}(s, \mu))\tilde{y}(s) + F_2(\tilde{x}(s, \mu))\tilde{y}(s - 2\pi)) = 0, \ \mu \in [0, a), \tag{1.5}$$

где $s \in \mathbb{R}$, $\tilde{x}(\cdot, \mu)$ – 2π-периодическое решение уравнения

$$\frac{d^2\tilde{x}}{ds^2} + \frac{T^2(\mu)}{4\pi^2} f(\tilde{x}) = 0. \tag{1.6}$$

Преобразуем семейство дифференциальных уравнений с запаздыванием (1.5) к виду

$$J\dot{\tilde{\boldsymbol{y}}}(s) = \tilde{H}_1(s,\mu)\tilde{\boldsymbol{y}}(s) + \tilde{H}_2(s,\mu)\tilde{\boldsymbol{y}}(s-2\pi), \qquad s \in \mathbb{R}^+ = [0,+\infty), \tag{1.7}$$

где $\tilde{\boldsymbol{y}} = (\tilde{y}, 2\pi\dot{\tilde{y}}/T(\mu))^T$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{H}_i$, $i = 1,2,$ – 2π-периодические матричнозначные функции, которые при каждом значении параметра $\mu \in [0,a)$ и аргумента $s \in [0,2\pi]$ удовлетворяют условиям: $\tilde{H}_i^T(s,\mu) = \tilde{H}_i(s,\mu)$, $i = 1,2$, и определяются формулами

$$\tilde{H}_1(s,\mu) = \begin{pmatrix} \dfrac{T(\mu)}{2\pi}F_1(\tilde{x}(s,\mu)) & 0 \\ 0 & \dfrac{T(\mu)}{2\pi} \end{pmatrix}, \ \tilde{H}_2(s,\mu) = \begin{pmatrix} \dfrac{T(\mu)}{2\pi}F_2(\tilde{x}(s,\mu)) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Функцию F_2 непрерывную на интервале $(-a,a)$ назовем *знакоопределенной* $\big[$*определенно-положительной или определенно-отрицательной*$\big]$, если она не принимает нулевых значений $\big[$принимает положительные или отрицательные значения$\big]$ на этом интервале. Для знакоопределенной функции F_2 значения матрицы-функции $\tilde{H}_2$ являются знакопостоянными матрицами.

Исследуем на устойчивость семейство систем дифференциальных уравнений с запаздыванием (1.7). Устойчивость системы (1.7) определяется расположением спектра оператора монодромии U, определяемого формулой [5]

$$(U\boldsymbol{\varphi})(\vartheta) = \tilde{\boldsymbol{y}}(2\pi+\vartheta,\boldsymbol{\varphi}),\ \vartheta \in [-2\pi,0],\ \boldsymbol{\varphi} \in C([-2\pi,0],\mathbb{R}^2).$$

Оператор монодромии действует в пространстве $C([-2\pi,0],\mathbb{R}^2)$. Собственные числа ρ и собственные функции оператора монодромии определяются из уравнения

$$(U\boldsymbol{\varphi})(\vartheta) = \rho\boldsymbol{\varphi}(\vartheta), \qquad \vartheta \in [-2\pi,0].$$

Сведем задачу нахождения ненулевых собственных чисел ρ оператора монодромии U к задаче нахождения собственных чисел $z = \rho^{-1}$ краевой задачи [7]

$$J\dot{\boldsymbol{\varphi}} = (\tilde{H}_1(\vartheta,\mu) + z\tilde{H}_2(\vartheta,\mu))\boldsymbol{\varphi}, \qquad \mu \in [0,a), \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(-2\pi) = z\boldsymbol{\varphi}(0), \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{1.9}$$

Пусть $\hat{\Phi}(\vartheta,z,\mu) = \|\hat{\varphi}_{ij}(\vartheta,z,\mu)\|_1^2$, $\vartheta \in [-2\pi,0]$, $z \in \mathbb{C}$, $\mu \in [0,a)$, $(\hat{\Phi}(-2\pi,z,\mu) = I_2$, $z \in \mathbb{C}$, $\mu \in [0,a))$ – нормированная фундаментальная матрица решений системы (1.8). Тогда, используя краевое условие (1.9), получим трансцендентное уравнение

$$\det[z\hat{\Phi}(0,z,\mu) - I_2] = 0, \qquad \mu \in [0,a), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{1.10}$$

для нахождения собственных чисел z краевой задачи (1.8), (1.9). Полагая $A(z,\mu) = (\hat{\varphi}_{11}(0,z,\mu) + \hat{\varphi}_{22}(0,z,\mu))/2$, $z \in \mathbb{C}$, $\mu \in [0,a)$, и учитывая, что при $\vartheta \in [-2\pi,0]$, $z \in \mathbb{C}$, $\mu \in [0,a)$,

$$\det[\hat{\Phi}(\vartheta,z,\mu)] = \det[\hat{\Phi}(-2\pi,z,\mu)]\exp\left\{\int_{-2\pi}^{\vartheta}\mathrm{Tr}[J^{-1}(\tilde{H}_1(s,\mu) + z\tilde{H}_2(s,\mu))]ds\right\} = 1,$$

записываем уравнение (1.10) в виде

$$D(z,\mu) = z^2 - 2A(z,\mu)z + 1 = 0, \qquad z \in \mathbb{C}, \qquad \mu \in [0,a). \tag{1.11}$$

Система дифференциальных уравнений с запаздыванием (1.7) имеет 2π-периодическое решение $\{\dot{\tilde{x}}(s,\mu),\ \ddot{\tilde{x}}(s,\mu)2\pi/T(\mu)\}$, $s \in [0,2\pi]$, $\mu \in [0,a)$. Действительно, подставив периодическое решение $\tilde{x}(s,\mu)$, $s \in [0,2\pi]$, $\mu \in [0,a)$, в уравнение (1.6) и продифференцировав его по времени, получим тождество

$$\frac{d^2\dot{\tilde{x}}(s,\mu)}{ds^2} + \frac{T^2(\mu)}{4\pi^2}(F_1(\tilde{x}(s,\mu))\dot{\tilde{x}}(s,\mu) + F_2(\tilde{x}(s,\mu))\dot{\tilde{x}}(s,\mu)) \equiv 0, \quad s \in \mathbb{R},\ \mu \in [0,a).$$

Указанному решению отвечает решение Флоке с мультипликатором $\rho = 1$. Мы имеем критический случай в задаче устойчивости периодического решения.

Теорема 1.1. *Пусть выполняются требования предложения 1.1 и $T(\mu^0) = \tau$. Тогда τ-периодическое решение $x_0(t) = x(t,\mu^0)$, $t \in \mathbb{R}$, системы* (1.1), *соответствующее значению $\mu = \mu^0$, устойчиво, если внутри единичного круга $\{z : |z| \le 1,\ z \in \mathbb{C}\}$ нет ни одного корня уравнения* (1.11) *и корень $z = 1$ является простым, и неустойчиво, если внутри единичного круга есть хотя бы один корень этого уравнения.*

Доказательство. Пусть характеристическое уравнение (1.11) краевой задачи (1.8), (1.9) имеет корень, по модулю меньший единицы. Ему отвечает собственное число ρ оператора монодромии U, по модулю большее единицы. Тогда система линейного приближения (1.5) возмущенного уравнения для периодического решения $\tilde{x}(\cdot,\mu^0)$ неустойчива [5]. Используя теорему о неустойчивости движения по линейному приближению [8; гл. 10, §10.3, теорема 10.3.1], делаем заключение о неустойчивости периодического решения x_0 уравнения (1.1).

Пусть все корни характеристического уравнения (1.11) краевой задачи (1.8), (1.9) по модулю больше единицы, кроме одного корня $z = 1$. Простому корню $z = 1$ отвечает простое собственное число $\rho = 1$ оператора монодромии U. Действительно, $\dfrac{\partial D(1/\rho,\mu^0)}{\partial \rho} = -\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial D(1/\rho,\mu^0)}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial D(1,\mu^0)}{\partial z} \neq 0$. Используя аналог теоремы Андронова–Витта для дифференциальных уравнений с запаздыванием [8; гл. 10, §10.3, следствие 10.3.1], делаем заключение об устойчивости периодического решения x_0 уравнения (1.1).

В работе [1] установлены важные свойства корней уравнения (1.11):

Лемма 1.1. *Пусть выполнены условия предложения* 1.1, *функция F непрерывно дифференцируема в области $(-a,a) \times (-a,a)$ и $F_2(x) \neq 0$ на интервале $(-a,a)$. Тогда собственное число z краевой задачи* (1.8), (1.9) *удовлетворяет условию $|z| = 1$ в том и только в том случае, когда $z = 1$ или $z = -1$.*

Собственные числа краевой задачи (1.8), (1.9), непрерывно зависящие от параметра $\mu \in [0,a)$, при его изменении могут приходить внутрь единичного круга на комплексной плоскости или уходить из него только через точки на действительной оси $z = 1$ или $z = -1$.

Так как краевая задача (1.8), (1.9) всегда имеет собственное число $z = 1$, то при переходе через единичную окружность собственное число $z = 1$ становится кратным.

Корень $z = 1$ характеристического уравнения (1.11) является кратным, если выполняется условие

$$\frac{\partial A(1,\mu)}{\partial z} = 0, \qquad \mu \in [0,a),$$

в противном случае, он является простым. Это уравнение определяет те значения $\mu \in [0,a)$, при которых возможен переход через единичную окружность в точке $z = 1$. Вместе с тем, уравнение

$$A(-1,\mu) = -1, \qquad \mu \in [0,a),$$

определяет те значения $\mu \in [0,a)$, при которых возможен переход корней характеристического уравнения (1.11) через единичную окружность в точке $z = -1$.

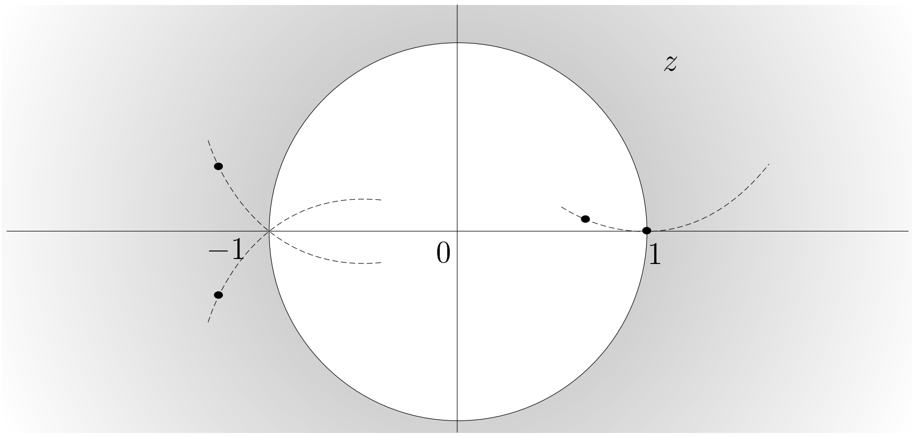

Рис. 1.1. Переход корней характеристического уравнения (1.11) при изменении параметра μ через точки $z = 1$ и $z = -1$.

2. Квазигармоническое дифференциальное уравнение с запаздыванием

Пусть F – трижды непрерывно дифференцируемая функция в области $(-a,a)\times(-a,a)$ и функции F_i, $i = 1,2$, четные. Задаем асимптотические разложения $F_i(y) = a_0^{(i)} + a_2^{(i)}y^2 + o(y^2)$, $i = 1,2$, $f(y) = a_1 y + a_3 y^3 + o(y^3)$. Полагая в уравнении (1.5) $\mu = 0$, получим дифференциальное уравнение с запаздыванием и с постоянными коэффициентами

$$\ddot{\tilde{y}}(s) + \frac{1}{a_1}\Big(a_0^{(1)}\tilde{y}(s) + a_0^{(2)}\tilde{y}(s-2\pi)\Big) = 0. \tag{2.1}$$

Характеристические показатели уравнения (2.1) являются корнями характеристического уравнения [4; с. 115]

$$D(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{a_1}\Big(a_0^{(1)} + a_0^{(2)}e^{-2\pi\lambda}\Big) = 0. \tag{2.2}$$

Используя метод D-разбиения [4; гл. 3, §3], найдем множества в плоскости параметров $a_0^{(1)}$, $a_0^{(2)}$ из области $\mathfrak{D} = \{(a_0^{(1)}, a_0^{(2)}) : a_0^{(1)} + a_0^{(2)} > 0\}$, в которых характеристическое уравнение (2.2) имеет одинаковое количество чисто мнимых корней и корней с положительной действительной частью.

Преобразуем уравнение (2.2) к виду

$$a_0^{(1)}(\lambda^2+1)+a_0^{(2)}(\lambda^2+e^{-2\pi\lambda})=0. \tag{2.3}$$

Проведя в (2.3) преобразование $\lambda=i\omega$, переводящее мнимую ось в набор прямых плоскости параметров $a_0^{(1)}$, $a_0^{(2)}$, и разделив действительную и мнимую части уравнения, получим систему

$$\begin{aligned}(-\omega^2+1)\,a_0^{(1)}+(-\omega^2+\cos(2\pi\omega))\,a_0^{(2)} &= 0, && (2.4)\\ -\sin(2\pi\omega)\,a_0^{(2)} &= 0, && (2.5)\end{aligned}$$

ненулевое решение которой существует при условии $\Delta=(\omega^2-1)\sin(2\pi\omega)=\ 0$. Это решение определяет множества в плоскости параметров, для которых чисто мнимые значения $\lambda=i\omega$ являются корнями характеристического уравнения (2.2). Из $\Delta=0$ имеем $\omega=\pm n/2$, $n=0,1,2,\ldots$ Значения $\omega=\pm n/2$, $n=0,4,6,8,\ldots$, при подстановке в (2.4) определяют прямую $a_0^{(1)}+a_0^{(2)}=0$, которая не входит в область допустимых значений. Значения $\omega=\pm1$ тождественно удовлетворяют системе (2.4), (2.5), следовательно характеристическое уравнение (2.2) имеет два корня $\lambda=\pm i$ при любых значениях параметров $a_0^{(1)}$, $a_0^{(2)}$. Значения $\omega=\pm n/2$, $n=1,3,5,\ldots$, при подстановке в (2.4) определяют прямые

$$a_0^{(2)}=\frac{4-n^2}{4+n^2}a_0^{(1)},\qquad n=1,3,5,\ldots, \tag{2.6}$$

на которых характеристическое уравнение (2.2) имеет еще два "дополнительных"корня $\lambda=\pm in/2$.

Через M обозначим точку области $\mathfrak{D}$ с координатами $a_0^{(1)}$ и $a_0^{(2)}$. При построении D-разбиения вводим множества:

$$E_2=\left\{\text{M}:\ a_0^{(2)}>-a_0^{(1)},\ a_0^{(2)}>\frac{3}{5}a_0^{(1)}\right\},\ \partial E_0=\left\{\text{M}:\ a_0^{(2)}=\frac{3}{5}a_0^{(1)},\ a_0^{(2)}>0\right\},$$
$$E_0=\left\{\text{M}:\ 0<a_0^{(2)}<\frac{3}{5}a_0^{(1)}\right\},\ \Gamma_0=\left\{\text{M}:\ a_0^{(2)}=0,\ a_0^{(1)}>0\right\},$$
$$D_0=\left\{\text{M}:\ -\frac{5}{13}a_0^{(1)}<a_0^{(2)}<0\right\},\ \partial D_r=\left\{\text{M}:\ a_0^{(2)}=\frac{4-(r+3)^2}{4+(r+3)^2}a_0^{(1)},\ a_0^{(2)}<0\right\},$$
$$D_r=\left\{\text{M}:\ \frac{4-(r+3)^2}{4+(r+3)^2}a_0^{(1)}<a_0^{(2)}<\frac{4-(r+1)^2}{4+(r+1)^2}a_0^{(1)}\right\},\ r=2,4,\ldots$$

Они указаны на рисунке 2.1. Здесь нижний индекс обозначает количество корней характеристического уравнения (2.2) с положительной действительной частью (обоснование см. далее). Множества с литерой E соответствуют положительным значениям параметра $a_0^{(2)}$, множества с литерой D соответствуют отрицательным значениям параметра $a_0^{(2)}$.

Если точка M принадлежит множеству Γ_0, то характеристическое уравнение (2.2) имеет лишь два корня $\lambda=\pm i$. Следовательно, во всей области $-\frac{5}{13}a_0^{(1)}\le a_0^{(2)}\le\frac{3}{5}a_0^{(1)}$ характеристическое уравнение не имеет корней с положительной действительной частью. Таким образом, множества E_0, Γ_0, D_0 являются "устойчивыми"[4; гл. 3, §3].

Определим правила перехода корней характеристического уравнения (2.2) через множества $\partial E_0(n=1)$, ∂D_{n-3}, $n=3,5,\ldots$, соответствующие соотношениям (2.6).

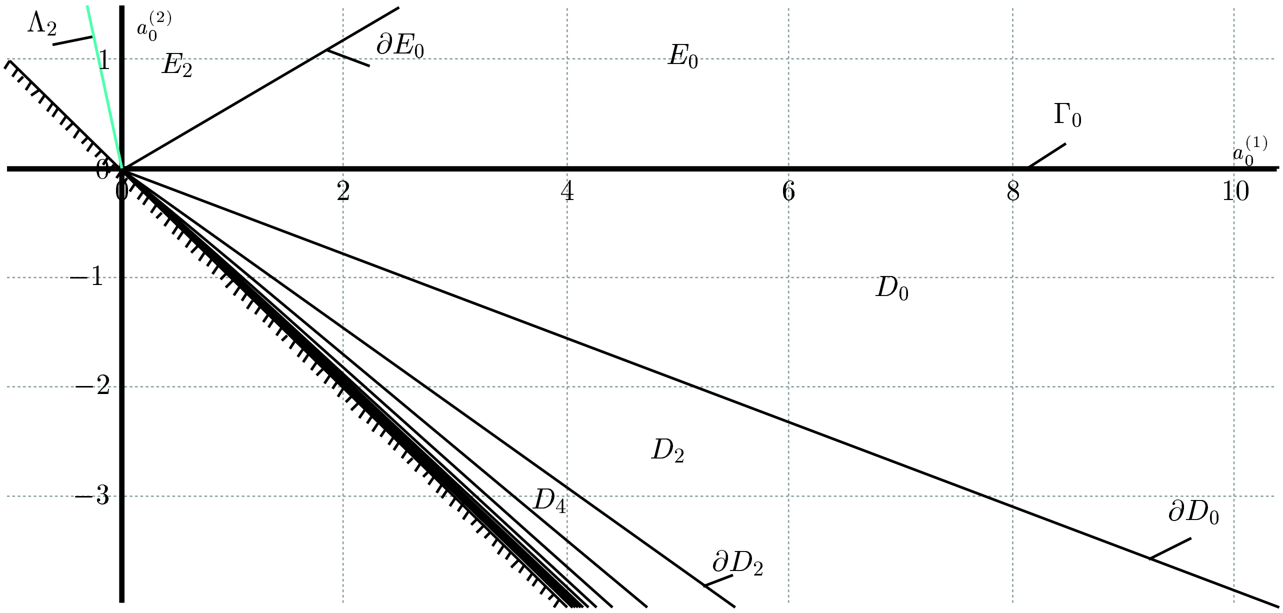

Рис. 2.1. D-разбиение плоскости параметров $a_0^{(1)}$, $a_0^{(2)}$.

При фиксированном значении $a_0^{(1)} = \beta > 0$ в малой окрестности параметра $a_0^{(2)} = \dfrac{4-n^2}{4+n^2}\beta$ найдем характеристический показатель $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ уравнения (2.2) в виде асимптотического разложения. Подставляя $a_0^{(2)} = \dfrac{4-n^2}{4+n^2}\beta + \varepsilon$ и $\lambda(\varepsilon) = in/2 + \lambda_1\varepsilon + o(\varepsilon)$ в (2.3), получим уравнение для нахождения коэффициента λ_1:

$$-\frac{4+n^2}{4} + \frac{2(4-n^2)\pi\beta\lambda_1}{4+n^2} + i\frac{8n}{4+n^2}\beta\lambda_1 = 0,$$

откуда

$$\lambda_1 = \frac{(4+n^2)^2}{8\beta}\frac{(4-n^2)\pi - 4in}{16n^2 + (n^2-4)^2\pi^2}. \tag{2.7}$$

Следовательно, при переходе границы ∂E_0 $(n=1)$ $\big[\partial D_{n-3},\ n = 3, 5, \ldots\big]$ в сторону увеличения значения параметра $a_0^{(2)}$ происходит переход пары комплексно сопряженных корней характеристического уравнения (2.2) из левой полуплоскости в правую $\big[$из правой полуплоскости в левую$\big]$.

При помощи данного правила вводятся обозначения множеств D-разбиения с индексами, целочисленные значения которых равны количеству корней характеристического уравнения, расположенных в правой части комплексной плоскости (см. рис. 2.1). Причем количество таких корней всегда есть четное число.

В данной работе при исследовании устойчивости уравнения возмущенного движения (2.1) множество Γ_0 не рассматривается, так как является особым случаем и требует дополнительного исследования.

Введем величину $k = \sqrt{(a_0^{(1)} - a_0^{(2)})/(a_0^{(1)} + a_0^{(2)})}$. Тогда соотношения (2.6) примут вид

$$k = \frac{n}{2}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{2.8}$$

Множествам
$$\partial E_0,\ \partial D_r,\quad r = 0, 2, 4, ... \tag{2.9}$$
соответствуют равенства (2.8) или, что то же самое, (2.6) при $n = 1$, $n = r + 3$. В множествах (2.9) характеристическое уравнение (2.2) имеет по два "дополнительных"чисто мнимых корня – $\lambda = ik$, $\lambda = -ik$.

Таким образом, в каждом из множеств D-разбиения известно количество чисто мнимых корней характеристического уравнения (2.2) и количество корней этого уравнения с положительной действительной частью. Остальные корни в соответствующей области имеют отрицательные действительные части.

При малых значениях параметра μ коэффициенты уравнения (1.5) близки к постоянным коэффициентам уравнения (2.1), т.е. уравнение (1.5) является квазигармоническим дифференциальным уравнением с запаздыванием. Характеристические показатели уравнения (1.5) при малых значениях параметра μ близки к характеристическим показателям уравнения (2.2).

Предложение 2.1. *Пусть F – трижды непрерывно дифференцируемая функция в области $(-a, a) \times (-a, a)$, f – нечетная, $f(x) > 0$ при $0 < x < a$, $f'(0) > 0$ и функции F_i, $i = 1, 2$, четные. Для точек* M, *принадлежащих множествам* (2.9), *характеристические показатели квазигармонического дифференциального уравнения с запаздыванием* (1.5), *обращающиеся при $\mu = 0$ в чисто мнимые характеристические показатели уравнения* (2.1), *определяются асимптотическими формулами:*
$$\lambda_1(\mu) \equiv i, \tag{2.10}$$
$$\lambda_2(\mu) = i + \frac{3\pi a_0^{(2)} a_3}{4\left(a_1^2 + \pi^2 {a_0^{(2)}}^2\right)}\mu^2 + o(\mu^2), \tag{2.11}$$
$$\lambda_{3,4}(\mu) = ik - \frac{\chi(k)(1-k^2)(\pi(1-k^2) \pm 2ik)}{8a_0^{(2)}\left(4k^2 + \pi^2(1-k^2)^2\right)}\mu^2 + o(\mu^2), \tag{2.12}$$
где $\chi(k) = (2-k^2)a_2^{(1)} - (2+k^2)a_2^{(2)} \neq 0$. Для других точек $\mathrm{M} \in \mathfrak{D}$ *сохраняются только первый и второй характеристические показатели.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для точек $\mathrm{M} \in \mathfrak{D}$ характеристическое уравнение (2.2) имеет пару чисто мнимых корней $\lambda = \pm i$. Им отвечает один полупростой характеристический показатель $\lambda_0 = i$ дифференциального уравнения с запаздыванием (2.1), которому отвечают два линейно независимых решения Флоке: $y_1(s) = e^{is}$, $y_2(s) = e^{-is}$. Квазигармоническое уравнение с запаздыванием (1.5) имеет 2π-периодическое решение $\tilde{y}(s, \mu) = \dot{\tilde{x}}(s, \mu)$, которое является решением Флоке этого уравнения с характеристическим показателем (2.10). В силу двухкратности характеристического показателя λ_0 квазигармоническое дифференциальное уравнение с запаздыванием (1.5) имеет еще один характеристический показатель $\lambda_2(\mu)$ ($\lambda_2(0) = \lambda_0 = i$). При его нахождении используем метод С. Н. Шиманова [5] подсчета характеристических показателей. В работе [1] показано, что имеет место асимптотическое разложение (2.11).

Для точек M из множеств (2.9) характеристическое уравнение (2.2) имеет пару чисто мнимых корней $\tilde{\lambda} = \pm in/2$. Им отвечает один полупростой характеристический показатель

$\tilde{\lambda}_0 = in/2$ дифференциального уравнения с запаздыванием (2.1), которому отвечают два линейно независимых решения Флоке: $y_1(s) = e^{ins/2}$, $y_2(s) = e^{-ins/2}$. В силу двухкратности характеристического показателя $\tilde{\lambda}_0$ квазигармоническое дифференциальное уравнение с запаздыванием (1.5) имеет два характеристических показателя: $\lambda_{3,4}(\mu)$ ($\lambda_{3,4}(0) = \tilde{\lambda}_0 = in/2$).

Характеристический показатель $\tilde{\lambda}$, отвечающий корню $\tilde{\lambda}_0 = in/2$ характеристического уравнения (2.2), ищем в виде асимптотического разложения

$$\tilde{\lambda}(\mu) = in/2 + \lambda_1\mu + \lambda_2\mu^2 + o(\mu^2).$$

Ему отвечает решение Флоке $\tilde{y}(s,\mu) = u(s,\mu)e^{\tilde{\lambda}(\mu)s}$, $s \in \mathbb{R}$, квазилинейного дифференциального уравнения с запаздыванием (1.5), в котором функция u является 2π-периодическим решением обыкновенного квазигармонического дифференциального уравнения

$$\ddot{u} + 2\tilde{\lambda}(\mu)\dot{u} + \left(\tilde{\lambda}^2(\mu) + \frac{T^2(\mu)}{4\pi^2}(F_1(\tilde{x}(s,\mu)) + F_2(\tilde{x}(s,\mu))e^{-2\pi\tilde{\lambda}(\mu)})\right)u = 0,$$

где, как показано в [1],

$$\tilde{x}(s,\mu) = \cos(s)\mu + \frac{a_3}{32a_1}(\cos(3s) - \cos(s))\mu^3 + o(\mu^3), \qquad s \in \mathbb{R},$$
$$T(\mu) = \frac{2\pi}{\sqrt{a_1}}\left(1 - \frac{3a_3}{8a_1}\mu^2 + o(\mu^2)\right).$$

Решение этого уравнения будем искать в форме асимптотического разложения

$$u(s,\mu) = u_0(s) + u_1(s)\mu + u_2(s)\mu^2 + o(\mu^2).$$

Функции u_0, u_1, u_2 являются 2π-периодическими решениями следующих обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{u}_0 + in\dot{u}_0 = 0, \tag{2.13}$$
$$\ddot{u}_1 + in\dot{u}_1 + 2\lambda_1\dot{u}_0 + (in + 2\pi a_0^{(2)}/a_1)\lambda_1 u_0 = 0, \tag{2.14}$$
$$\begin{gathered}\ddot{u}_2 + in\dot{u}_2 + 2\lambda_1\dot{u}_1 + (in + 2\pi a_0^{(2)}/a_1)\lambda_1 u_1 + 2\lambda_2\dot{u}_0 + ((1 - 2\pi^2 a_0^{(2)}/a_1)\lambda_1^2 \\ +(a_2^{(1)} - a_2^{(2)})\cos^2(s)/a_1 - 3a_3n^2/(16a_1) + (in + 2\pi a_0^{(2)}/a_1)\lambda_2)u_0 = 0.\end{gathered} \tag{2.15}$$

Периодическое решение уравнения (2.13) имеет вид

$$u_0(s) = c_0 + c_{-n}e^{-ins}, s \in \mathbb{R},$$

где c_0, c_{-n} – произвольные комплексные числа. С учетом полученных результатов перепишем уравнение (2.14):

$$\ddot{u}_1 + in\dot{u}_1 + (-2inc_{-n}e^{-ins} + (in + 2\pi a_0^{(2)}/a_1)(c_0 + c_{-n}e^{-ins}))\lambda_1 = 0. \tag{2.16}$$

Необходимые и достаточные условия существования периодического решения линейной неоднородной системы в резонансном случае [6; с. 109] имеют вид

$$\begin{pmatrix} (in + 2\pi a_0^{(2)}/a_1)\lambda_1 & 0 \\ 0 & (-in + 2\pi a_0^{(2)}/a_1)\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_{-n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Они выполняются при ненулевых c_0 и c_{-n}, если $\lambda_1 = 0$. При выполнении последнего условия 2π-периодическое решение уравнения (2.16) имеет вид $u_1(s) = 0$, $s \in \mathbb{R}$. С учетом полученных результатов перепишем уравнение (2.15):

$$\ddot{u}_2 + in\dot{u}_2 + 2\lambda_2\dot{u}_0 + \left(\frac{a_2^{(1)} - a_2^{(2)}}{a_1}\cos^2(s) - \frac{3a_3}{16a_1}n^2 + \left(in + 2\pi\frac{a_0^{(2)}}{a_1}\right)\lambda_2\right)u_0 = 0.$$

Необходимые и достаточные условия существования периодического решения линейной неоднородной системы в резонансном случае [6; гл. 2, §4, равенство (4.13)] имеют вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\chi(n/2)}{4a_1} + \left(in + 2\pi\frac{a_0^{(2)}}{a_1}\right)\lambda_2 & 0 \\ 0 & \frac{\chi(n/2)}{4a_1} - \left(in - 2\pi\frac{a_0^{(2)}}{a_1}\right)\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_{-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Они выполняются при ненулевых c_0 и c_{-n}, если λ_2 является корнем квадратного уравнения

$$\left(n^2 + 4\pi^2\frac{{a_0^{(2)}}^2}{a_1^2}\right)\lambda_2^2 + 4\pi\frac{\chi(n/2)}{4a_1}\frac{a_0^{(2)}}{a_1}\lambda_2 + \left(\frac{\chi(n/2)}{4a_1}\right)^2 = 0.$$

Его корни определяются формулами

$$\lambda_2 = \frac{\chi(n/2)}{4}\frac{-2\pi a_0^{(2)} \pm ina_1}{\left(n^2a_1^2 + 4\pi^2{a_0^{(2)}}^2\right)}.$$

Асимптотическое разложение действительной части искомых характеристических показателей уравнения (1.5) принимает вид (2.12).

Связь между собственными числами ρ оператора монодромии U и характеристическими показателями λ уравнения возмущенного движения (1.5) имеет вид $\rho = e^{2\pi\lambda}$. Поэтому справедливо следующее

Следствие 2.1. *Пусть выполняются условия предложения* 2.1. *Для точек* M, *принадлежащих множествам* (2.9), *корни характеристического уравнения* (1.11), *модули которых при* $\mu = 0$ *равны* 1, *определяются асимптотическими формулами:*

$$z_1(\mu) \equiv 1,$$

$$z_2(\mu) = 1 - 2\pi\frac{3\pi a_0^{(2)}a_3}{4\left(a_1^2 + \pi^2{a_0^{(2)}}^2\right)}\mu^2 + o(\mu^2),$$

$$z_{3,4}(\mu) = -1 - 2\pi\frac{\chi(k)(1-k^2)(\pi(1-k^2) \pm 2ik)}{8a_0^{(2)}\left(4k^2 + \pi^2(1-k^2)^2\right)}\mu^2 + o(\mu^2),$$

для множеств (2.9). *Для других точек* $\mathrm{M} \in \mathfrak{D}$ *сохраняются только первый и второй корни.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения следует из предложения 2.1.

Следствие 2.2. *Пусть выполняются условия предложения* 2.1. *Если точка* M *принадлежит множествам* (2.9), *то при возрастании параметра* μ *от нуля пара комплексно сопряженных корней характеристического уравнения* (1.11) *сходит с единичной окружности в точке* $z = -1$ *во внешнюю часть* $\big[$*во внутреннюю часть*$\big]$ *единичного круга* $\{z : |z| \leq 1,\ z \in \mathbb{C}\}$ *при условии*

$$F_2(0)\chi(k) > 0 \quad [F_2(0)\chi(k) < 0]. \tag{2.17}$$

Доказательство. Справедливость утверждения вытекает из следствия 2.1.

Замечание 2.1. Если точка M принадлежит множествам (2.9), то при $\mu = 0$ на границе единичной окружности $|z| = 1$ в точках $z = 1$ и $z = -1$ находится по одной паре корней характеристического уравнения (1.11). Для других точек $M \in \mathfrak{D}$ при $\mu = 0$ на границе единичной окружности $|z| = 1$ в точке $z = 1$ находится пара корней характеристического уравнения (1.11). Нижний индекс каждого из множеств D-разбиения определяет количество корней характеристического уравнения (1.11) внутри единичной окружности $|z| = 1$.

Доказательство. Справедливость утверждения вытекает из следствия 2.1.

Замечание 2.2. Характеристическое уравнение (1.11) при $\mu = 0$ не имеет корней с модулем, меньшим единицы, или имеет четное число таких корней.

Доказательство. Справедливость утверждения следует из процедуры построения областей D-разбиения.

Замечание 2.3. Пусть λ_* – корень уравнения $\pi(\lambda^2 + 1) + \lambda(1 - e^{2\pi\lambda}) = 0$. Тогда для точек множества $\Lambda_2 = \Big\{\mathrm{M} :\ a_0^{(2)} = \Lambda\, a_0^{(1)}\Big\}$, где $\Lambda = \dfrac{\lambda_* e^{2\pi\lambda_*}}{\pi - \lambda_* e^{2\pi\lambda_*}}$, при $\mu = 0$ существует единственный двукратный действительный корень характеристического уравнения (1.11).

Доказательство. Условием кратности корня λ_* характеристического уравнения (2.2) является условие $\dfrac{dD(\lambda_*)}{d\lambda} = 0$. Дифференцируя (2.2) по λ получаем $2\lambda_* - 2\pi\dfrac{a_0^{(2)}}{a_1}e^{-2\pi\lambda_*} = 0$, откуда $\dfrac{a_0^{(2)}}{a_1} = \dfrac{\lambda_* e^{2\pi\lambda_*}}{\pi}$. Из равенства $D(\lambda_*) = 0$ имеем $\dfrac{a_0^{(2)}}{a_1} = \dfrac{\lambda_*^2 + 1}{1 - e^{-2\pi\lambda_*}}$. Приравнивая полученные соотношения, запишем уравнение для нахождения кратных корней характеристического уравнения (2.2):

$$\frac{\pi(\lambda^2 + 1) + \lambda(1 - e^{2\pi\lambda})}{\pi(1 - e^{-2\pi\lambda})} = 0, \quad \lambda \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

Корни уравнения (2.18) являются корнями уравнения $\lambda + \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{\pi}(e^{2\pi\lambda} - 1)$. При $\lambda < 0$ функция $\lambda + \dfrac{1}{\lambda}$ не превосходит значения -2, а функция $(e^{2\pi\lambda} - 1)/\pi$ принимает значения в диапазоне от $-1/\pi$ до 0. Следовательно, при $\lambda < 0$ уравнение (2.18) не имеет действительных корней. При $0 < \lambda < 1$ функция $\lambda + \dfrac{1}{\lambda}$ монотонно убывает, а функция $(e^{2\pi\lambda} - 1)/\pi$ монотонно возрастает и при $\lambda = 1$ принимает значение, большее 2. Следовательно, на $(0, 1)$ существует единственный корень уравнения (2.18). При $1 < \lambda < +\infty$ справедливо неравенство $(e^{2\pi\lambda}-1)/\pi > \lambda+1 > \lambda+\dfrac{1}{\lambda}$, из которого следует, что на этом промежутке уравнение (2.18) не имеет корней.

Корень уравнения (2.18) находим численным методом Ньютона. Получаем приближенное значение $\lambda_* \approx 0,37505$. Имеем $\dfrac{a_0^{(2)}}{a_1} = \dfrac{\lambda_* e^{2\pi\lambda_*}}{\pi} \approx 1.25996$, откуда $\Lambda \approx -4.84669$. Таким образом, в множестве Λ_2 характеристическое уравнение (2.2) имеет двукратный положительный корень. Оно делит множество E_2 на две части (см. рис. 2.1). При возрастании параметра $a_0^{(2)}$ при фиксированном $a_0^{(1)}$, как следует из формулы (2.7), через множество ∂E_0 из левой полуплоскости комплексного пространства λ в правую его полуплоскость переходит пара комплексно сопряженных корней характеристического уравнения (2.2), обращающихся на множестве ∂E_0 в чисто мнимые корни $\lambda = \pm i/2$. Поэтому справа от Λ_2 находится область, где характеристическое уравнение имеет два комплексно сопряженных корня с положительной действительной частью. Слева от Λ_2 находится область, где характеристическое уравнение (2.2) имеет два положительных действительных корня.

Покажем, что кратность корня λ_* равна 2, то есть выполняется неравенство $\dfrac{d^2D(\lambda_*)}{d\lambda^2} \neq 0$. Дважды дифференцируя (2.2), имеем $D''(\lambda) = 2 + 4\pi^2 \dfrac{a_0^{(2)}}{a_1} e^{-\lambda\tau}$. Так как в множестве Λ_2 $a_0^{(2)} > 0$, то $D''(\lambda_*) > 2$.

3. Устойчивость периодических решений нелинейного дифференциального уравнения с запаздыванием

Пусть выполнены условия леммы 1.1. Тогда корень $z = 1$ характеристического уравнения является кратным для тех и только тех значений параметра $\mu \in [0, a)$, для которых $T'(\mu) = 0$. Кратность этого корня равна 2 [1].

О п р е д е л е н и е 3.1. Параметр $\mu = \mu^a \in [0, a)$ назовем *критическим аргументом* функции T, если $T'(\mu^a) = 0$. Критический аргумент μ^a функции T назовем *невырожденным*, если $T''(\mu^a) \neq 0$.

Лемма 3.1 [1]. *Пусть выполняются условия леммы* 1.1, *функция f трижды непрерывно дифференцируема на интервале $(-a, a)$ и для критических аргументов $\mu = \mu^a \in [0, a)$ функции T вторая производная T'' отлична от нуля. Тогда при возрастании μ в малой окрестности критического значения только один корень характеристического уравнения переходит из внутренней части во внешнюю часть* [*из внешней части во внутреннюю часть*] *единичного круга $\{z : |z| \leq 1,\ z \in \mathbb{C}\}$ через точку $z = 1$, если*

$$F_2(0)T''(\mu^a) > 0 \qquad \big[F_2(0)T''(\mu^a) < 0\big].$$

При выполнении условий предложения 1.1, непрерывной дифференцируемости F в области $(-a, a) \times (-a, a)$ и четности функций F_i, $i = 1, 2$, функция A представима в виде

$$A(z, \mu) = 2\tilde{\varphi}_{11}^2(z, \mu) - 1, \qquad z \in \mathbb{C}, \qquad \mu \in [0, a),$$

где $\tilde{\varphi}_{11}$ – компонента матрицы-функции $\hat{\Phi}(-\pi, z, \mu) = \|\tilde{\varphi}_{ij}(z, \mu)\|_1^2$, $z \in \mathbb{C}$, $\mu \in [0, a)$. Значение $z = -1$ является корнем характеристического уравнения (1.11) для тех и только тех значений параметра $\mu \in [0, a)$, для которых $\varphi_{11}(\mu) = 0$. Если корень $z = -1$ характеристического уравнения существует, то он имеет кратность, равную 2 [1]. Здесь используется представление матрицы-функции $\hat{\Phi}(-\pi, -1, \mu) = \|\varphi_{ij}(\mu)\|_1^2$, $\mu \in [0, a)$.

О п р е д е л е н и е 3.2. Параметр $\mu = \mu^b \in [0, a)$ назовем *некритическим нулем* функции φ_{11} , если $\varphi_{11}(\mu^b) = 0$ и $\varphi_{11}'(\mu^b) \neq 0$.

В окрестности значения параметра $\mu = 0$ введем разложение фундаментальной матрицы

$$\hat{\Phi}(\vartheta,-1,\mu)=\hat{\Psi}_0(\vartheta)+\hat{\Psi}_1(\vartheta)\mu+\hat{\Psi}_2(\vartheta)\mu^2+o(\mu),\ \vartheta \in [-2\pi, 0], \tag{3.1}$$

и асимптотические разложения матричнозначных функций $\tilde{H}_i(\vartheta, \mu) = \tilde{H}_i^0(\vartheta) + \tilde{H}_i^2(\vartheta)\mu^2 + o(\mu)$, $i = 1, 2$, $\vartheta \in [-2\pi, 0]$, где $\tilde{H}_1^0(\vartheta) = \dfrac{T_0}{2\pi}\begin{pmatrix} a_0^{(1)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{H}_2^0(\vartheta) = \dfrac{T_0}{2\pi}\begin{pmatrix} a_0^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{H}_1^2(\vartheta) = \dfrac{T_0}{2\pi}\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{8}\dfrac{a_0^{(1)}a_3}{a_1} + a_2^{(1)}cos^2\vartheta & 0 \\ 0 & -\dfrac{3}{8}\dfrac{a_3}{a_1} \end{pmatrix}$, $\tilde{H}_2^2(\vartheta) = \dfrac{T_0}{2\pi}\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{8}\dfrac{a_0^{(2)}a_3}{a_1} + a_2^{(2)}cos^2\vartheta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\vartheta \in [-2\pi, 0]$.
Подставив разложение (3.1) в систему (1.8), получим

$$J\dot{\hat{\Psi}}_0(\vartheta) = (\tilde{H}_1^0(\vartheta) - \tilde{H}_2^0(\vartheta))\hat{\Psi}_0(\vartheta), \quad \hat{\Psi}_0(-2\pi) = I_2, \tag{3.2}$$

$$J\dot{\hat{\Psi}}_1(\vartheta) = (\tilde{H}_1^0(\vartheta) - \tilde{H}_2^0(\vartheta))\hat{\Psi}_1(\vartheta), \quad \hat{\Psi}_1(-2\pi) = 0, \tag{3.3}$$

$$J\dot{\hat{\Psi}}_2(\vartheta) = (\tilde{H}_1^0(\vartheta) - \tilde{H}_2^0(\vartheta))\hat{\Psi}_2(\vartheta) + (\tilde{H}_1^2(\vartheta) - \tilde{H}_2^2(\vartheta))\hat{\Psi}_0(\vartheta), \quad \hat{\Psi}_2(-2\pi) = 0, \tag{3.4}$$

Предложение 3.1. *При $\mu = 0$ справедливо тождество $\hat{\Psi}_1(\vartheta) \equiv 0$, $\vartheta \in [-2\pi, 0]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения следует из уравнения (3.3).

Из этого предложения вытекает, что нуль $\mu^b = 0$ функции φ_{11} является критическим. Введем обозначения множеств:

$$E_2'' = \left\{ \text{M}:\ a_0^{(2)} > -a_0^{(1)},\ a_0^{(2)} > a_0^{(1)} \right\}, \tilde{\Gamma}_2 = \left\{ \text{M}:\ a_0^{(2)} = a_0^{(1)},\ a_0^{(2)} > 0 \right\},$$
$$E_2' = \left\{ \text{M}:\ a_0^{(2)} < a_0^{(1)},\ a_0^{(2)} > \frac{3}{5}a_0^{(1)} \right\},$$
$$\Gamma_r = \left\{ \text{M}:\ a_0^{(2)} = \frac{4-(r+2)^2}{4+(r+2)^2}a_0^{(1)},\ a_0^{(2)} < 0 \right\}, \quad r = 2, 4, ..., \tag{3.5}$$
$$D_2' = \left\{ \text{M}:\ -\frac{3}{5}a_0^{(1)} < a_0^{(2)} < -\frac{5}{13}a_0^{(1)} \right\}, D_2'' = \left\{ \text{M}:\ -\frac{21}{29}a_0^{(1)} < a_0^{(2)} < -\frac{3}{5}a_0^{(1)} \right\}.$$

Они указаны на рисунке 3.1. Здесь нижний индекс обозначает количество корней характеристического уравнения (2.2) с положительной действительной частью. Множества с литерой E соответствуют положительным значениям параметра $a_0^{(2)}$, множества с литерой D соответствуют отрицательным значениям параметра $a_0^{(2)}$.

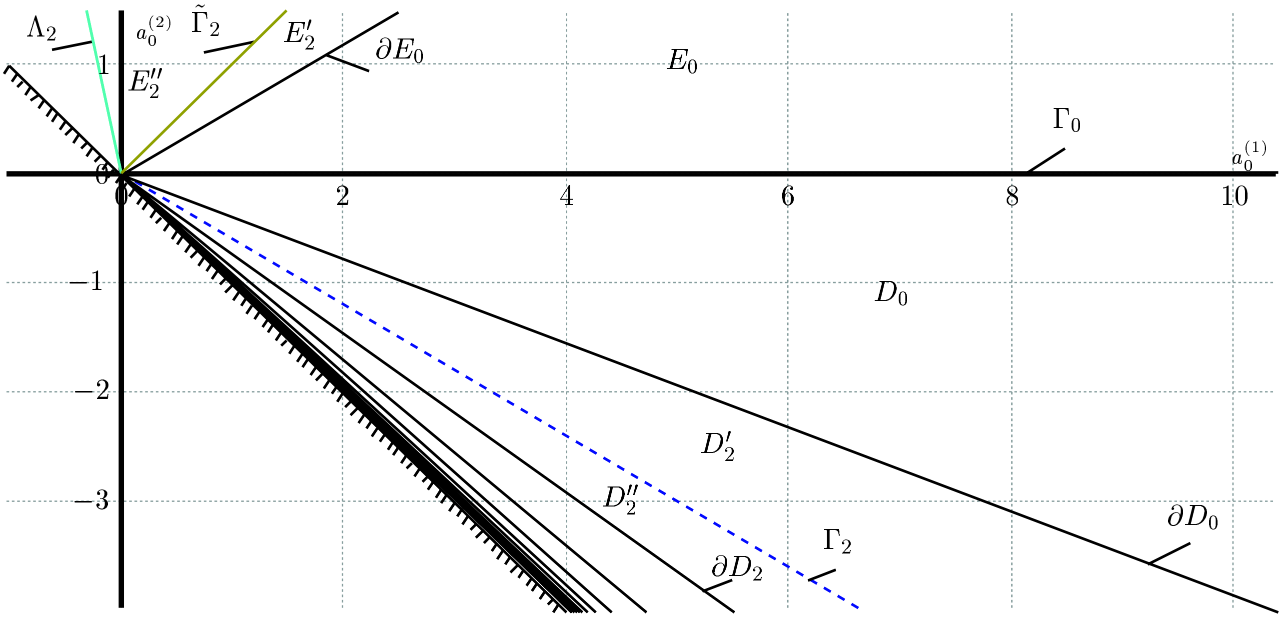

Рис. 3.1. D-разбиение плоскости параметров $a_0^{(1)}$, $a_0^{(2)}$.

Предложение 3.2. *Значение* $\varphi_{11}(0)$ *равно нулю тогда и только тогда, когда точка* M *принадлежит одному из множеств* (2.9). *В этом случае*

$$\varphi_{11}''(0) = \frac{(-1)^{(2k+1)/2}\pi\chi(k)}{4ka_1}, \tag{3.6}$$

где параметр k *определяется формулами* (2.8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим значение $\varphi_{11}(0)$. Из (3.2) получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{T_0^2}{4\pi^2}(a_0^{(1)} - a_0^{(2)})\varphi_1 = 0. \tag{3.7}$$

Для точек множества E_2'' общее решение уравнения (3.7) определяется формулой $\varphi(\vartheta) = c_1e^{p\vartheta} + c_2e^{-p\vartheta}$, $\vartheta \in [-2\pi, 0]$, где $p = \sqrt{-(a_0^{(1)} - a_0^{(2)})/a_1}$ – вещественное число, c_1, c_2 – произвольные вещественные числа. С его помощью находим матрицу

$$\hat{\Psi}_0(\vartheta) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{p(\vartheta+2\pi)} + e^{-p(\vartheta+2\pi)}}{2} & \dfrac{T_0}{2\pi p}\dfrac{(e^{p(\vartheta+2\pi)} - e^{-p(\vartheta+2\pi)})}{2} \\ \dfrac{2\pi p}{T_0}\dfrac{(e^{p(\vartheta+2\pi)} - e^{-p(\vartheta+2\pi)})}{2} & \dfrac{e^{p(\vartheta+2\pi)} + e^{-p(\vartheta+2\pi)}}{2} \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [-2\pi, 0]. \tag{3.8}$$

Откуда имеем $\varphi_{11}(0) = (e^{\pi p} + e^{-\pi p})/2 > 1$.

Для точек множества $\tilde{\Gamma}_2$ общее решение уравнения (3.7) определяется формулой $\varphi(\vartheta)= c_1 + c_2\vartheta$, $\vartheta \in [-2\pi, 0]$, где c_1, c_2 – произвольные вещественные числа. Следовательно,

$$\hat{\Psi}_0(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{T_0}{2\pi}(\vartheta + 2\pi) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [-2\pi, 0]. \tag{3.9}$$

Откуда имеем $\varphi_{11}(0) = 1$.

Для других точек множесва $\mathfrak{D}$ общее решение уравнения (3.7) определяется формулой $\varphi(\vartheta) = c_1 \cos k\vartheta + c_2 \sin k\vartheta$, $\vartheta \in [-2\pi, 0]$. Следовательно,

$$\hat{\Psi}_0(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos k(\vartheta + 2\pi) & \dfrac{T_0}{2\pi k} \sin k(\vartheta + 2\pi) \\ -\dfrac{2\pi k}{T_0} \sin k(\vartheta + 2\pi) & \cos k(\vartheta + 2\pi) \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [-2\pi, 0]. \tag{3.10}$$

Вычисляем матрицу

$$\hat{\Psi}_0(-\pi) = \begin{pmatrix} \beta & \alpha\gamma \\ -\dfrac{\gamma}{\alpha} & \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{a_1}k}, \ \beta = \cos(\pi k), \ \gamma = \sin(\pi k). \tag{3.11}$$

Откуда имеем $\varphi_{11}(0) = \cos(\pi k)$. Из равенства $\cos(\pi k) = 0$ находим $\pi k = \pi/2 + \pi m$, $m = 0, 1, 2, ...$, то есть $k = \dfrac{n}{2}$, $n = 1, 3, 5, ...$ Таким образом, если точка M принадлежит одному из множеств (2.9), то $\varphi_{11}(0) = 0$.

Решение уравнения (3.4) находится по формуле Коши и имеет вид

$$\hat{\Psi}_2(\vartheta) = \hat{\Psi}_0(\vartheta) J^{-1} \tilde{D}_2(\vartheta),$$

где $\tilde{D}_2(\vartheta) = \|\tilde{d}_{ij}^{(2)}(\vartheta)\|_1^2 = \int_{-2\pi}^{\vartheta} \hat{\Psi}_0^T(s)(\tilde{H}_1^2(s) - \tilde{H}_2^2(s))\hat{\Psi}_0(s)ds$, $\vartheta \in [-2\pi, 0]$. При $\vartheta = -\pi$ получаем

$$\hat{\Psi}_2(-\pi) = \begin{pmatrix} -\alpha\gamma\tilde{d}_{11}^{(2)} + \beta\tilde{d}_{21}^{(2)} & -\alpha\gamma\tilde{d}_{12}^{(2)} + \beta\tilde{d}_{22}^{(2)} \\ -\beta\tilde{d}_{11}^{(2)} - \gamma\alpha^{-1}\tilde{d}_{12}^{(2)} & -\beta\tilde{d}_{12}^{(2)} - \gamma\alpha^{-1}\tilde{d}_{22}^{(2)} \end{pmatrix}, \ \tilde{d}_{ij}^{(2)} = \tilde{d}_{ij}^{(2)}(-\pi). \tag{3.12}$$

Так как $\mu^b = 0$ – нуль функции φ_{11}, то элемент $\tilde{d}_{11}^{(2)}$, с учетом (3.10), имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{11}^{(2)} &= \frac{T_0}{2\pi} \int_{-2\pi}^{-\pi} \left((a_2^{(1)} - a_2^{(2)}) cos^2(s) - \frac{3a_3k^2}{8} \right) \cos^2 k(s + 2\pi) - \frac{3a_3k^2}{8} \sin^2 k(s + 2\pi) ds \\ &= \frac{T_0}{2\pi} \left(-\frac{3}{8} a_3 k^2 \pi + (a_2^{(1)} - a_2^{(2)}) \int_{-2\pi}^{-\pi} cos^2(s) \cos^2 k(s + 2\pi) ds \right) \\ &= \frac{T_0}{2\pi} \left(-\frac{3}{8} a_3 k^2 \pi + (a_2^{(1)} - a_2^{(2)}) \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{8\sqrt{a_1}} \chi(k). \end{aligned}$$

Для точек множеств (2.9) $\beta = 0$, $\gamma = sin(\pi k) = (-1)^{(2k-1)/2}$. Следовательно, из (3.12) имеем $\varphi''_{11}(0) = -2\alpha\gamma\tilde{d}_{11}^{(2)}$. Откуда получаем (3.6).

Предложение 3.3. *Значение* $\varphi_{12}(0)$ *равно нулю тогда и только тогда, когда точка* M *принадлежит одному из множеств* (3.5) *или* Γ_0. *В этом случае*

$$\varphi''_{12}(0) = \frac{(-1)^k \pi \chi(k)}{4a_1\sqrt{a_1}k^2}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для точек множества E_2'', используя (3.8), имеем $\varphi_{12}(0) = \dfrac{(e^{p\pi} - e^{-p\pi})}{2\sqrt{a_1}p} > \dfrac{\pi}{\sqrt{a_1}}$. Для точек множества $\tilde{\Gamma}_2$, используя (3.9), имеем $\varphi_{12}(0) = \dfrac{T_0}{2\pi}\pi = \pi/\sqrt{a_1}$. Для других точек множесва $\mathfrak{D}$, используя (3.11), имеем $\varphi_{12}(0) = sin(\pi k)/(\sqrt{a_1}k)$. Из равенства $sin(\pi k) = 0$ находим $\pi k = \pi m$, $m = 1, 2, 3, ...$, то есть $k = m$, $m = 1, 2, 3, ...$ Таким образом, если точка M принадлежит одному из множеств (3.5), то $\varphi_{12}(0) = 0$. Элемент $\tilde{d}_{22}^{(2)}$ имеет вид

$$\tilde{d}_{22}^{(2)}=\frac{T_0}{2\pi}\int\limits_{-2\pi}^{-\pi}\frac{1}{a_1k^2}\left((a_2^{(1)}-a_2^{(2)})cos^2(s)-\frac{3a_3k^2}{8}\right)\sin^2 k(s+2\pi)-\frac{3a_3}{8a_1}cos^2k(s+2\pi)ds$$

$$=\frac{T_0}{2\pi}\left(-\frac{3}{8}\frac{a_3}{a_1}\pi+\frac{(a_2^{(1)}-a_2^{(2)})}{a_1k^2}\int\limits_{-2\pi}^{-\pi}cos^2(s)\sin^2 k(s+2\pi)ds\right)$$

$$=\frac{T_0}{2\pi}\left(-\frac{3}{8}\frac{a_3}{a_1}\pi+\frac{(a_2^{(1)}-a_2^{(2)})}{a_1k^2}\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi\chi(k)}{8a_1\sqrt{a_1}k^2}.$$

Для точек множеств (3.5) $\beta = cos(\pi k) = (-1)^k$, $\gamma = 0$. Следовательно, из (3.12) имеем $\varphi_{12}''(0) = 2\beta\tilde{d}_{22}^{(2)}$. Откуда получаем (3.13).

Следствие 3.1. *Для точек области $\mathfrak{D}$ выполняются следующие соотношения:*

1) $\varphi_{11}(0) > 1,\ \varphi_{12}(0) > \pi/\sqrt{a_1}$ *при* $M \in E_2''$,

2) $\varphi_{11}(0) = 1,\ \varphi_{12}(0) = \pi/\sqrt{a_1},\quad k = 0$ *при* $M \in \tilde{\Gamma}_2$,

3) $0 < \varphi_{11}(0) < 1,\ 2/\sqrt{a_1} < \varphi_{12}(0) < \pi/\sqrt{a_1}$ *при* $M \in E_2'$,

4) $\varphi_{11}(0) = 0,\ \varphi_{12}(0) = 2/\sqrt{a_1},\quad k = 1/2$ *при* $M \in \partial E_0$,

5) $-1 < \varphi_{11}(0) < 0,\ 0 < \varphi_{12}(0) < 2/\sqrt{a_1}$ *при* $M \in E_0$,

6) $-1 < \varphi_{11}(0) < 0,\ -\dfrac{2}{3\sqrt{a_1}} < \varphi_{12}(0) < 0$ *при* $M \in D_0$,

7) $\varphi_{11}(0) = 0,\ \varphi_{12}(0) = \dfrac{(-1)^{(r+2)/2}}{\sqrt{a_1}k},\quad k = (r+3)/2$ *при* $M \in \partial D_r,\ r = 0, 2, \ldots,$

8) $\varphi_{11}(0) = (-1)^{(r+2)/2},\ \varphi_{12}(0) = 0,\quad k = (r+2)/2$ *при* $M \in \Gamma_r,\ r = 0, 2, \ldots,$

9) $0 < \varphi_{11}(0) < 1,\ -\dfrac{2}{3\sqrt{a_1}} < \varphi_{12}(0) < 0$ *при* $M \in D_2'$,

10) $0 < \varphi_{11}(0) < 1,\ 0 < \varphi_{12}(0) < \dfrac{2}{5\sqrt{a_1}}$ *при* $M \in D_2''$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения следует из доказательств предложения 3.2 и предложения 3.3.

Предположим, что на интервале $(0, a)$ все нули функции φ_{11} некритические.

Лемма 3.2 [1]. *Пусть выполняются условия леммы* 1.1. *Тогда при возрастании* μ *в малой окрестности некритического нуля* $\mu^b \in (0, a)$ *функции* φ_{11} *пара комплексно сопряженных корней характеристического уравнения* (1.11) *переходит из внутренней* *части во внешнюю часть* $\big[$*из внешней части во внутреннюю часть*$\big]$ *единичного круга* $\{z : |z| \le 1,\ z \in \mathbb{C}\}$ *через точку* $z = -1$, *если*

$$F_2(0)\varphi_{11}'(\mu^b)\varphi_{12}(\mu^b) < 0 \tag{3.14}$$

$$\big[F_2(0)\varphi_{11}'(\mu^b)\varphi_{12}(\mu^b) > 0\big]. \tag{3.15}$$

Эта лемма при $\mu \in (0, a)$ определяет направление перехода пары комплексно сопряженных корней характеристического уравнения в точке $z = -1$ знаком произведения $F_2(0)\varphi_{11}'(\mu^b)\varphi_{12}(\mu^b)$. Если существует критический нуль $\mu^b = 0$, то, как следует из предложения 3.2 и следствия 2.2, пара комплексно сопряженных корней характеристического уравнения (1.11) переходит из внутренней части во внешнюю часть $\big[$из внешней части во внутреннюю часть$\big]$ единичного круга $\{z : |z| \le 1,\ z \in \mathbb{C}\}$ через точку $z = -1$, если $F_2(0)\chi(k) > 0$ $\big[F_2(0)\chi(k) < 0\big]$.

Мы подсчитываем количество корней характеристического уравнения (1.11) с учетом их кратности, т.е. d-кратный корень заменяется d корнями. Введем число n_0, обозначающее количество пар корней характеристического уравнения (1.11) при $\mu = 0$ с модулем, меньшим единицы. В силу замечания 2.2, число $2n_0$ равно количеству всех таких корней, и в силу замечания 2.1, – равно значению нижнего индекса каждого из множеств D-разбиения.

При $\mu > 0$ четное число $2n$ корней характеристического уравнения (1.11) с модулем, меньшим единицы, образуют n пар корней, а нечетное число $2n + 1$ корней образуют n пар с дополнительным корнем. Ниже при использовании термина n пар корней характеристического уравнения (1.11) с модулем, меньшим единицы, мы подразумеваем, что для четного $\big[$нечетного$\big]$ числа корней дополнительный корень отсутствует $\big[$присутствует$\big]$.

На множестве точек, не являющихся нулями функции φ_{11} и принадлежащих интервалу $(0, a)$, определим функции c^- и c^+. Значение функции $c^-(\mu)$ $\big[c^+(\mu)\big]$ равно количеству некритических нулей $\mu^b \in (0, \mu)$, удовлетворяющих неравенству (3.14) $\big[$(3.15)$\big]$.

Представим несколько теорем об устойчивости системы дифференциальных уравнений с запаздыванием (1.7). Теоремы этого пункта статьи, сформулированы и доказаны на основе принадлежности точки M тому или иному множеству D-разбиения.

Теорема 3.1. *Пусть выполняются условия леммы* 1.1, *все нули* $\mu^b \in (0, a)$ *функции* φ_{11} *некритические и все критические аргументы функции* T *невырожденные,* $T(\mu^0) = \tau$, *где* $\mu^0 \in (0, a)$ *не является нулем функции* φ_{11} *и критическим аргументом функции* T. *Тогда* τ*-периодическое решение* $x(t, \mu^0)$ *уравнения* (1.1) *устойчиво, если вне точек множеств* (2.9), *а также в точках множеств* (2.9) *при условии* $F_2(0)\chi(k) > 0$, $\big[$*в точках множеств* (2.9) *при условии* $F_2(0)\chi(k) < 0$ $\big]$ *выполняются условия*

$$c^-(\mu^0) = c^+(\mu^0) + n_0\ \big[c^-(\mu^0) = c^+(\mu^0) + n_0 + 1\big], \quad F_2(0)T'(\mu^0) > 0, \tag{3.16}$$

и неустойчиво, если хотя бы одно из условий (3.16) *нарушается.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точка M не принадлежит множествам (2.9). Если выполняется первое из условий (3.16): $c^-(\mu^0) = c^+(\mu^0) + n_0$, то при изменении параметра μ от 0 до μ^0 все пары корней характеристического уравнения (1.11) переходят из внутренней части единичного круга во внешнюю через точку $z = -1$.

Пусть точка M принадлежит множествам (2.9) и выполняется условие $F_2(0)\chi(k) > 0$ $\left[F_2(0)\chi(k) < 0\right]$. Тогда, в силу следствия 2.2, при возрастании параметра μ от нуля в малой его окрестности в точке $z = -1$ происходит сход пары корней характеристического уравнения (1.11) во внешность [внутренность] единичного круга. Поэтому при малых μ внутри единичного круга находится n_0 $\left[n_0 + 1\right]$ корней. Пусть выполняется первое из условий (3.16): $c^-(\mu^0) = c^+(\mu^0) + n_0$ $\left[c^-(\mu^0) = c^+(\mu^0) + n_0 + 1\right]$. Тогда при изменении параметра μ от 0 до μ^0 все пары корней характеристического уравнения (1.11) переходят из внутренней части единичного круга во внешнюю через точку $z = -1$.

Для данного μ^0 внутри единичного круга может находиться не более одного корня характеристического уравнения, приходящего в него через точку $z = 1$. Условием отсутствия корней характеристического уравнения (1.11) внутри единичного круга будет второе из условий (3.16) [1]. В таком случае система (1.7) устойчива. Пусть нарушается первое из условий (3.16). Так как пары корней характеристического уравнения (1.11) не могут выйти через точку $z = 1$, то внутри единичного круга находится несколько пар корней. Следовательно, система (1.7) неустойчива. Пусть нарушается второе из условий (3.16) и выполняется первое условие. Для данного μ^0 внутри единичного круга находится один корень характеристического уравнения (1.11). Следовательно, система (1.7) неустойчива.

Ссылка на теорему 1.1 завершает доказательство утверждения.

П р и м е р 3.1. Рассмотрим уравнение (1.1), где $F(x, y) = 2x - 1.5y - 0.9x^3 + 3.5x^5 - 3.48x^7 + x^9$. Имеем $f(x) = 0.5x - 0.9x^3 + 3.5x^5 - 3.48x^7 + x^9$, $F_2(x) = -1.5$, $x \in [0, a)$, $a = 2.5$, $M = (2, -1.5) \in D_4$.

Функция T на интервале $(0, a)$ имеет три критических аргумента μ_1^a, μ_2^a и μ_3^a, и функция φ_{11} имеет четыре нуля на полуинтервале $[0, a)$ (см. рис. 3.2). Взяв запаздывание $\tau = 1$, получаем значение параметра μ_1, которому отвечает τ-периодическое решение уравнения (1.1). Это решение является устойчивым, так как выполняются требования теоремы 3.1 и условия устойчивости (3.16): $c^-(\mu_1) = c^+(\mu_1) + n_0$, где $c^-(\mu_1) = 3$, $c^+(\mu_1) = 1$, $n_0 = 2$, и $F_2(0)T'(\mu_1) > 0$. На рисунке 3.3 изображена траектория решения уравнения (1.1). Локализован предельный цикл, соответствующий значению $\mu = \mu_1$.

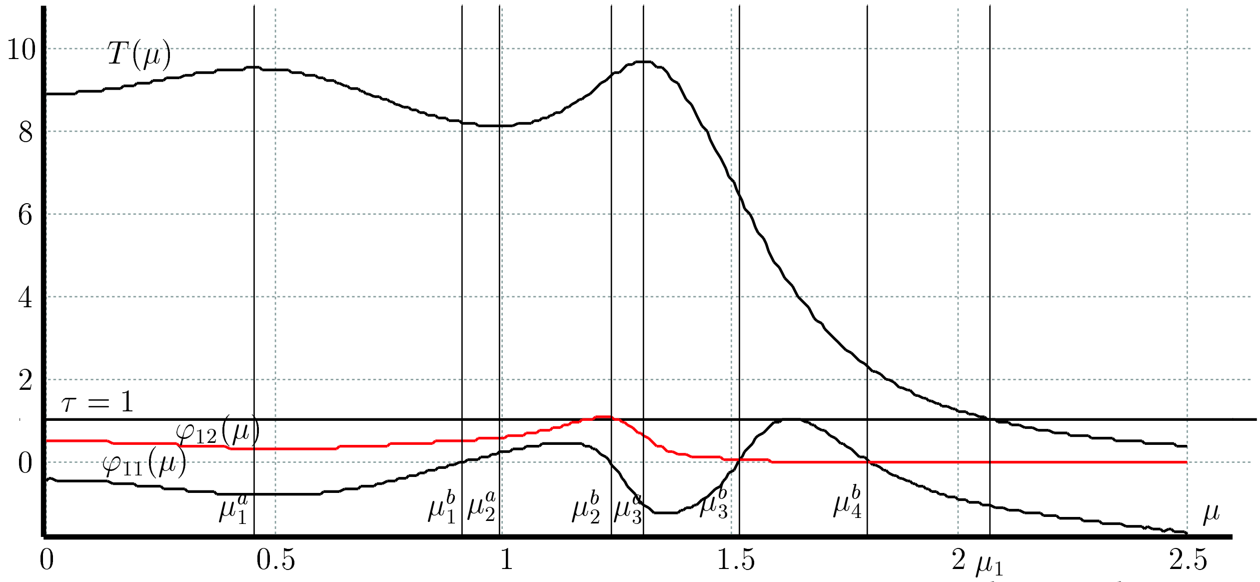

Рис. 3.2. Функции T, φ_{11} и φ_{12} ($\mu_1 = 2.074$; $\mu_1^a = 0.455$, $\mu_2^a = 0.986$, $\mu_3^a = 1.308$; $\mu_1^b = 0.92$, $\mu_2^b = 1.233$, $\mu_3^b = 1.517$, $\mu_4^b = 1.804$).(6)

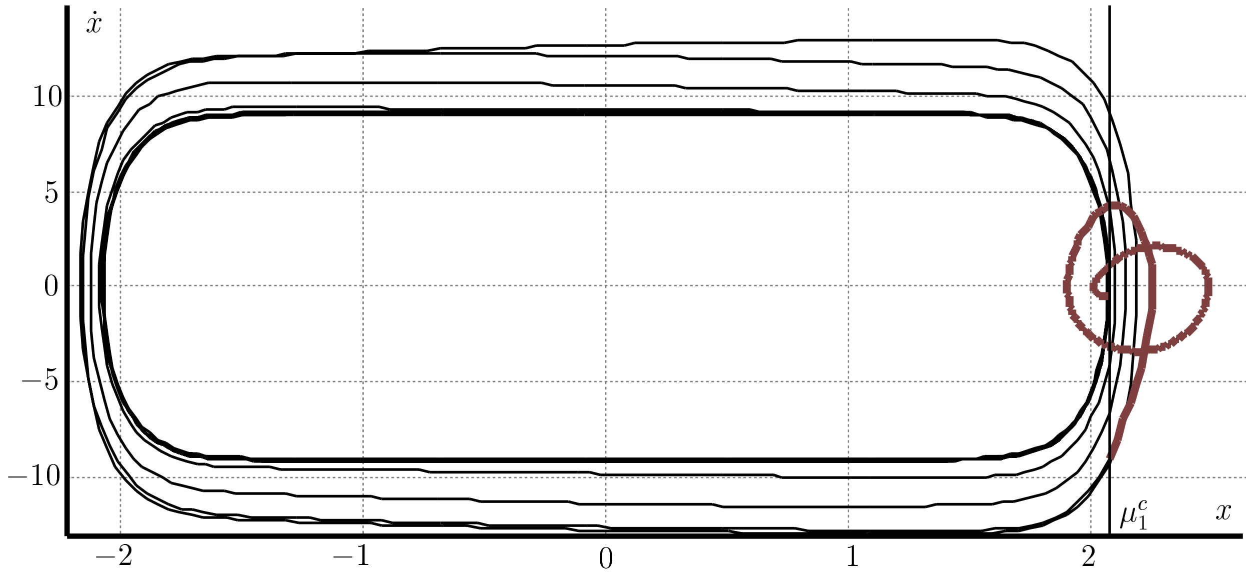

Рис. 3.3. Траектория решения ур. (1.1) ($\mu_1^c = 2.074$, $T_1^c = 1$, $p_1 = 151$, $t_1^p = 151$).(6)
Начальный сплайн: $(\{(t_i, x_i)\}|_1^5 = \{-1,\ 2.074;\ -0.671123,\ 2.133;\ -0.393531,\ 2.44032;\ -0.12938,\ 1.98098;\ 0,\ 2.074\}$, $\ddot{x}_1 = 0$, $\ddot{x}_5 = -262.918$).[1]

П р и м е р 3.2. Рассмотрим уравнение (1.1), где $F(x,y) = 29x - 21y - x^3 + 2x^5 - 3x^7 + x^9$. Имеем $f(x) = 8x - x^3 + 2x^5 - 3x^7 + x^9$, $F_2(x) = -21$, $x \in [0,a)$, $a = 3$, $\mathrm{M} = (29,-21) \in \partial D_2$, $k = 5/2$, $a_2^{(1)} = -3$, $a_2^{(2)} = 0$, $\chi(k) = -3(2 - k^2) > 0$.

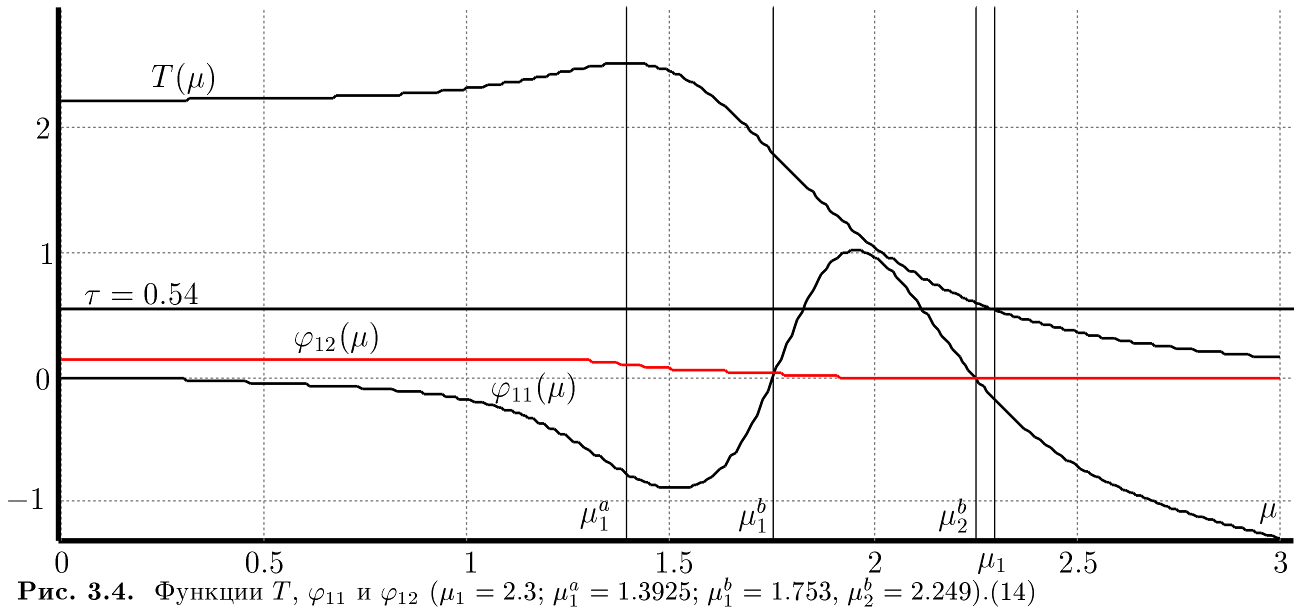

Рис. 3.4. Функции T, φ_{11} и φ_{12} ($\mu_1 = 2.3$; $\mu_1^a = 1.3925$; $\mu_1^b = 1.753$, $\mu_2^b = 2.249$).(14)

Функция T на интервале $(0,a)$ имеет один критический аргумент $\mu = \mu_1^a$, и функция φ_{11} имеет два нуля $\mu = \mu_1^b$, $\mu = \mu_2^b$ на полуинтервале $[0,a)$ (см. рис. 3.4). Взяв запаздывание $\tau = 0.54$, получаем одно значение параметра μ_1, которому отвечает τ-периодическое решение уравнения (1.1). Это решение является устойчивым, так как выполняются требования теоремы 3.1, условие $F_2(0)\chi(k) < 0$ и условия устойчивости (3.16): $c^-(\mu_1) = c^+(\mu_1) + n_0 + 1$,

[1]Начальная функция, определенная на промежутке запаздывания, представлена кубическим сплайном с переменным шагом построения и заданными на концах вторыми производными. На рисунке – жирная серая кривая. Интегрирование дифференциального уравнения с запаздыванием проведено методом шагов.

Обозначения результатов: μ_1^c – приближенное значение параметра μ^0 предельного цикла, вычисляемое с помощью процедуры численного интегрирования, T_1^c – приближенный период предельного цикла , p_1 – количество шагов интегрирования, t_1^p – общее время интегрирования.

где $c^-(\mu_1)=2$, $c^+(\mu_1)=0$, $n_0=1$, и $F_2(0)T'(\mu_1)>0$. На рис. 3.5 изображена траектория решения уравнения (1.1). Локализован предельный цикл, соответствующий значению $\mu=\mu_1$.

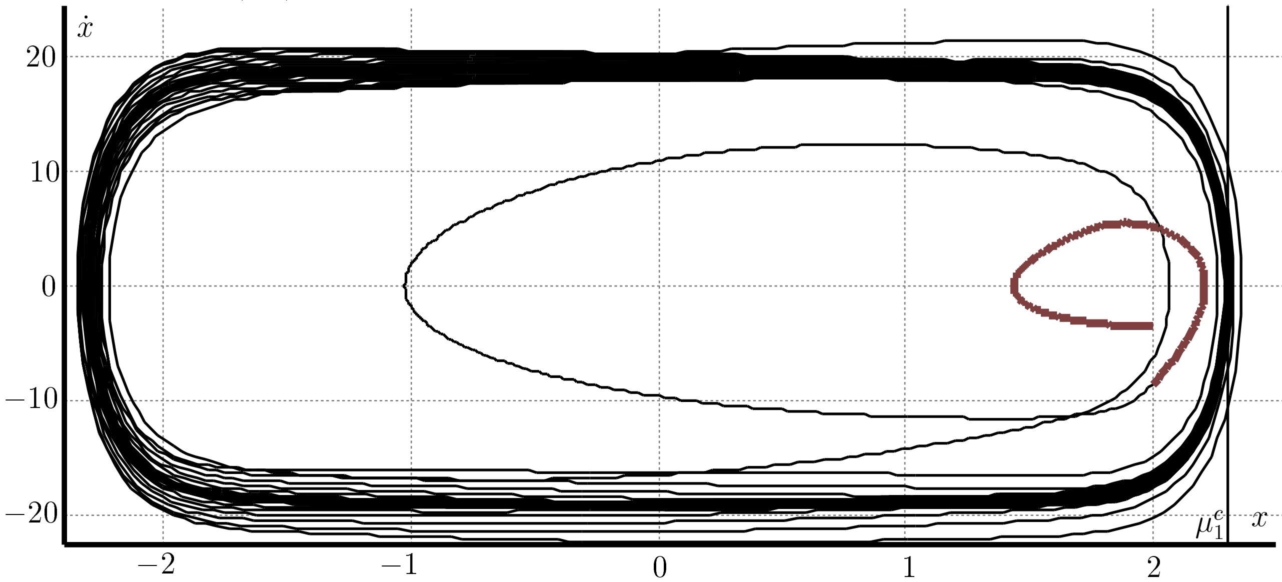

Рис. 3.5. Траектория решения ур. (1.1) ($\mu_1^c = 2.299$, $T_1^c = 0.54$, $p_1 = 151$, $t_1^p = 81.54$).(14)
Начальный сплайн: $(\{(t_i, x_i)\}|_1^3 = \{-0.54,\ 2;\ -0.17248,\ 1.71859;\ 0,\ 2\}$, $\ddot{x}_1 = 0$, $\ddot{x}_3 = -200$).

П р и м е р 3.3. Рассмотрим уравнение (1.1), где $F(x,y) = 29x - 21y + x^3 - 2x^5 + x^7$. Имеем $f(x) = 8x + x^3 - 2x^5 + x^7$, $F_2(x) = -21$, $x \in [0,a)$, $a = 3$, $\mathrm{M} = (29,-21) \in \partial D_2$, $k = 5/2$, $a_2^{(1)} = 3$, $a_2^{(2)} = 0$, $\chi(k) = 3(2-k^2) < 0$.

Функция T на интервале $(0,a)$ имеет один критический аргумент $\mu = \mu_1^a$, и функция φ_{11} имеет три нуля $\mu = \mu_1^b$, $\mu = \mu_2^b$, $\mu = \mu_3^b$ на полуинтервале $[0,a)$ (см. рис. 3.6). Взяв запаздывание $\tau = 0.5465$, получаем одно значение параметра μ_1, которому отвечает τ-периодическое решение уравнения (1.1). Оно является устойчивым, так выполняются требования теоремы 3.1, условие $F_2(0)\chi(k) > 0$ и условия устойчивости (3.16): $c^-(\mu_1) = c^+(\mu_1) + n_0$, где $c^-(\mu_1) = 2$, $c^+(\mu_1) = 1$, $n_0 = 1$, и $F_2(0)T'(\mu_1) > 0$. На рисунке 3.7 изображена траектория решения уравнения (1.1). Локализован предельный цикл, соответствующий значению $\mu = \mu_1$.

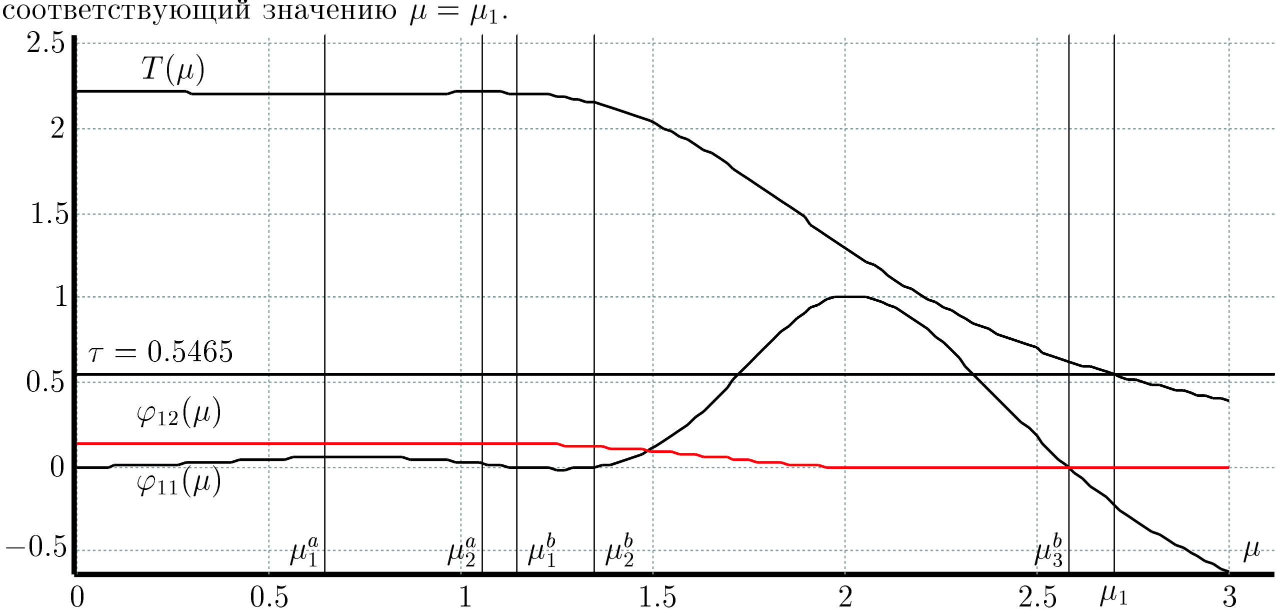

Рис. 3.6. Функции T, φ_{11} и φ_{12} ($\mu_1 = 2.701$; $\mu_1^a = 0.644$, $\mu_2^a = 1.055$; $\mu_1^b = 1.145$, $\mu_2^b = 1.35$, $\mu_3^b = 2.281$).(15)

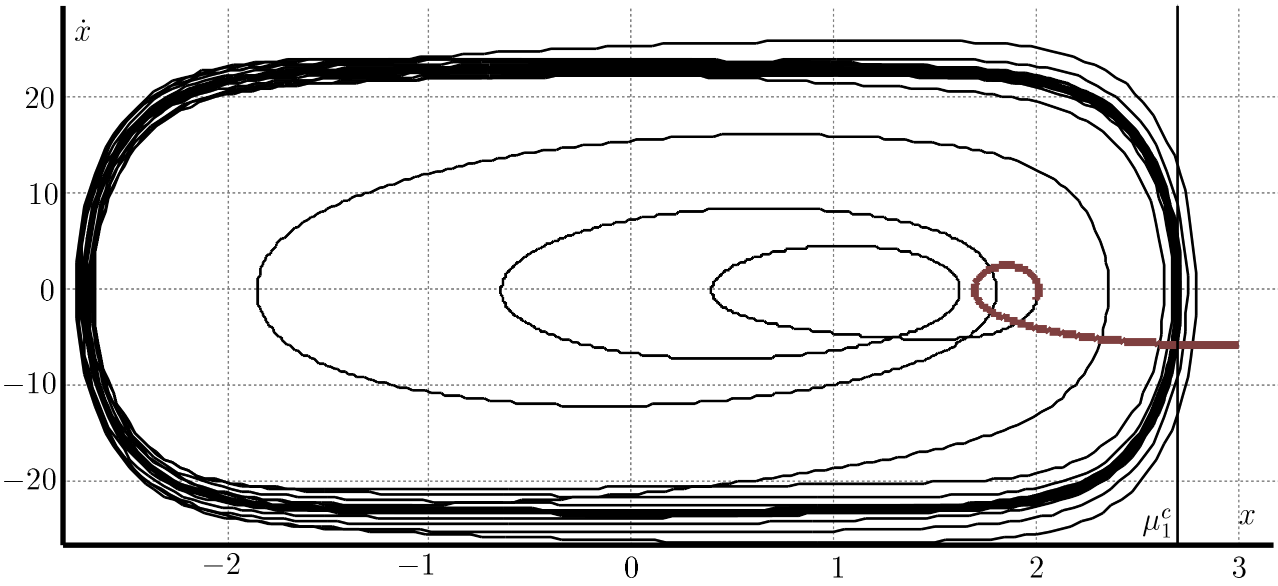

Рис. 3.7. Траектория решения ур. (1.1) ($\mu_1^c = 2.701655$, $T_1^c = 0.5465$, $p_1 = 151$, $t_1^p = 82.5215$).(15) Начальный сплайн: $(\{(t_i, x_i)\}|_1^3 = \{-0.5465, 3;\ -0.17248, 1.71859;\ 0, 2\}$, $\ddot{x}_1 = 0$, $\ddot{x}_3 = -67$).

Рассмотрим частный случай, когда первое из условий (3.16) отсутствует.

Теорема 3.2 [1]. *Пусть выполняются условия леммы* 3.1, *все критические аргументы функции T невырождены и $\varphi_{11}(\mu) \neq 0$ при $\mu \in [0, a)$, $T(\mu^0) = \tau$, где $\mu^0 \in (0, a)$ не является критическим аргументом функции T. Если точка* M *принадлежит одному из множеств E_2, D_r, $r = 2, 4, ...$, то при всех $\mu^0 \in (0, a)$ τ-периодическое решение $x(t, \mu^0)$ уравнения* (1.1) *неустойчиво. Если* $\mathrm{M} \in E_0 \bigcup D_0$, *то периодическое решение устойчиво для тех значений $\mu^0 \in (0, a)$, которые удовлетворяют неравенству*

$$F_2(0)T'(\mu^0) > 0, \tag{3.17}$$

и неустойчиво, если это неравенство строго нарушается.

П р и м е р 3.4. Рассмотрим уравнение (1.1), где $F(x, y) = 2x + 0.5y - 2x^3 + 2x^5$. Имеем $f(x) = 2.5x - 2x^3 + 2x^5$, $F_2(x) = 0.5$, $x \in [0, a)$, $a = 2$, $\mathrm{M} = (2, 1) \in E_0$.

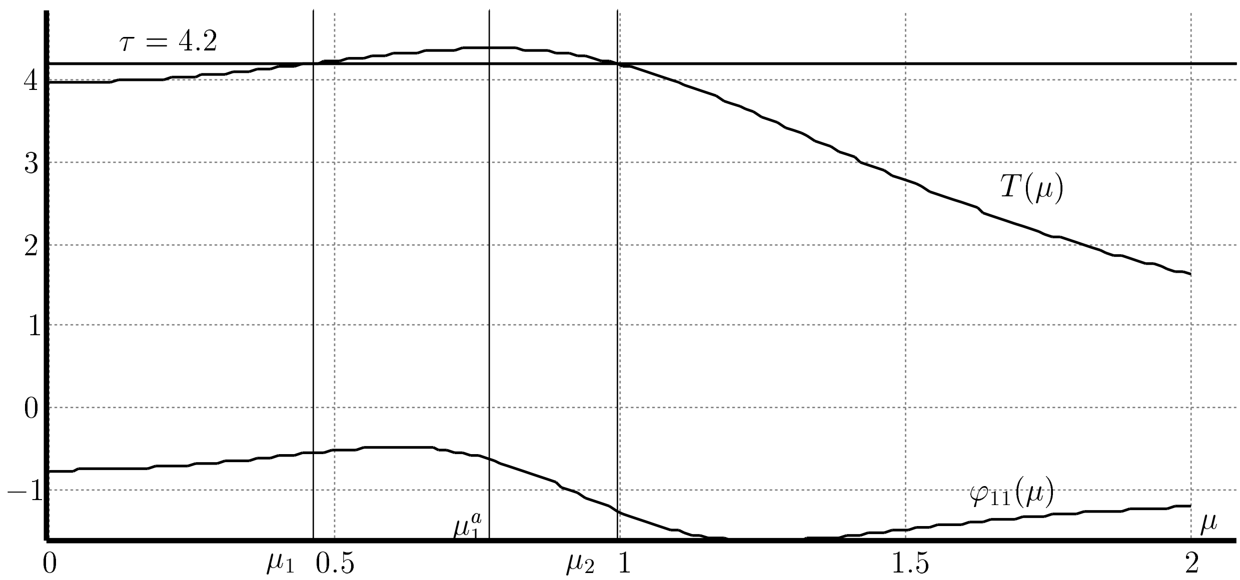

Рис. 3.8. Функции T и φ_{11} ($\mu_1 = 0.46$, $\mu_2 = 0.996$; $\mu_1^a = 0.778$).(7)

Функция T на интервале $(0, a)$ имеет один критический аргумент $\mu = \mu_1^a$, и функция φ_{11} не имеет нулей на полуинтервале $[0, a)$ (см. рис. 3.8). Взяв запаздывание $\tau = 4.2$, получаем два значения параметра μ_1 и μ_2, которым отвечают τ-периодические решения уравнения (1.1). Устойчивым является решение, отвечающее параметру $\mu = \mu_1$, так как выполняются требования теоремы 3.2 и условие устойчивости (3.17): $F_2(0)T'(\mu_1) > 0$. Согласно той же теореме τ-периодическое решение, отвечающее параметру $\mu = \mu_2$, неустойчиво, так как $F_2(0)T'(\mu_2) < 0$. На рисунке 3.9 изображена траектория решение уравнения (1.1). Локализован предельный цикл, соответствующий значению $\mu = \mu_1$.

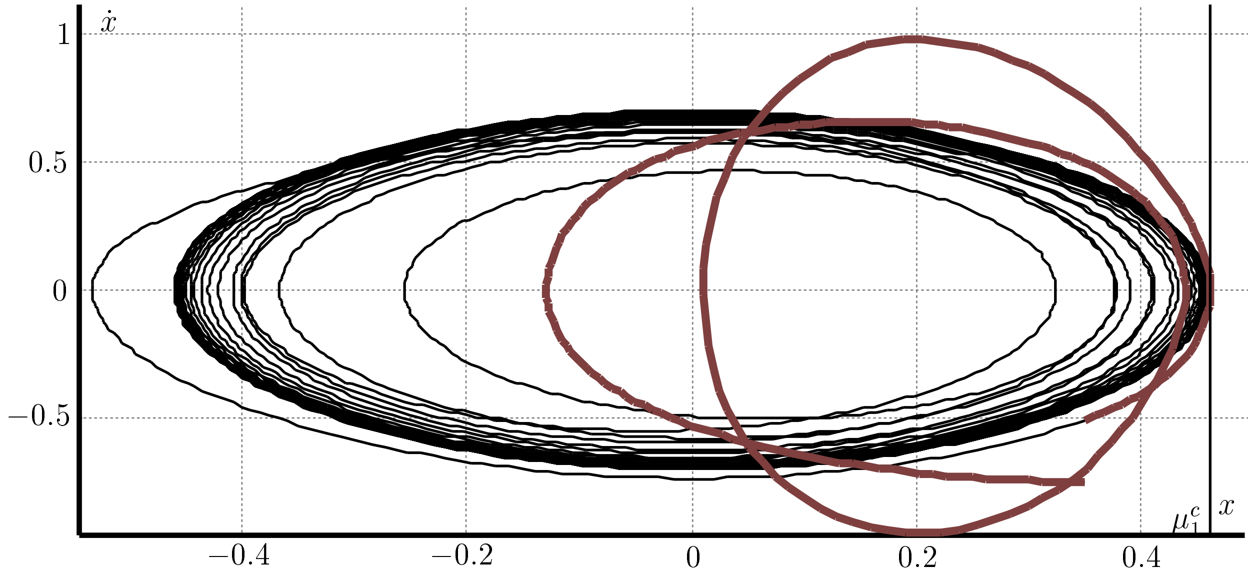

Рис. 3.9. Траектория решения ур. (1.1) ($\mu_1^c = 0.4595$, $T_1^c = 4.1999$, $p_1 = 101$, $t_1^p = 424.2$).(7)
Начальный сплайн: $(\{(t_i, x_i)\}|_1^6 = \{-4.2,\ 0.35;\ -3.12524,\ -0.118859;\ -1.63484,\ 0.338406;\ -1.1663,\ 0.0109006;\ -0.745805,\ 0.325887;\ 0,\ 0.35\},\ \ddot{x}_1 = 0,\ \ddot{x}_6 = -0.799754\ )$.

П р и м е р 3.5. Рассмотрим уравнение (1.1), где $F(x, y) = 2x - 0.25y + x^3 - 1.6x^5 + 0.5x^7 + 0.1x^9$. Имеем $f(x) = 1.75x + x^3 - 1.6x^5 + 0.5x^7 + 0.1x^9$, $F_2(x) = -0.25$, $x \in [0, a)$, $a = 3$, $\mathrm{M} = (2, -0.25) \in D_0$.

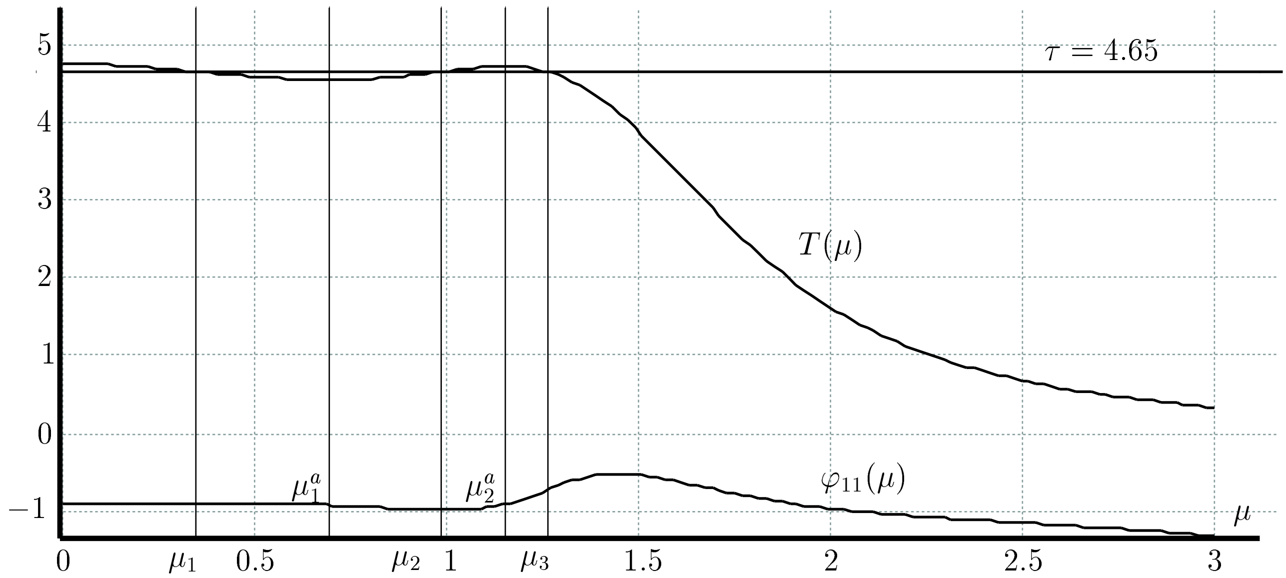

Рис. 3.10. Функции T и φ_{11} ($\mu_1 = 0.3435$, $\mu_2 = 0.923$, $\mu_3 = 1.2583$; $\mu_1^a = 0.694$, $\mu_2^a = 1.15$).(8)

Функция T на интервале $(0, a)$ имеет два критических аргумента μ_1^a и μ_2^a, и функция φ_{11} не имеет нулей на полуинтервале $[0, a)$ (см. рис. 3.10). Взяв запаздывание $\tau = 4.65$, получаем три значения параметра μ_1, μ_2 и μ_3, которым отвечают τ-периодические решения уравнения (1.1). Устойчивыми являются решения, отвечающие параметрам $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_3$, так как выполняются требования теоремы 3.2 и условие устойчивости (3.17): $F_2(0)T'(\mu_1) > 0$, $F_2(0)T'(\mu_3) > 0$. Согласно той же теореме τ-периодическое решение, отвечающее параметру $\mu = \mu_2$ неустойчиво, так как $F_2(0)T'(\mu_2) < 0$. На рисунке 3.11 изображены две траектории решений уравнения (1.1). Локализованы предельные циклы, соответствующие значениям $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_3$.

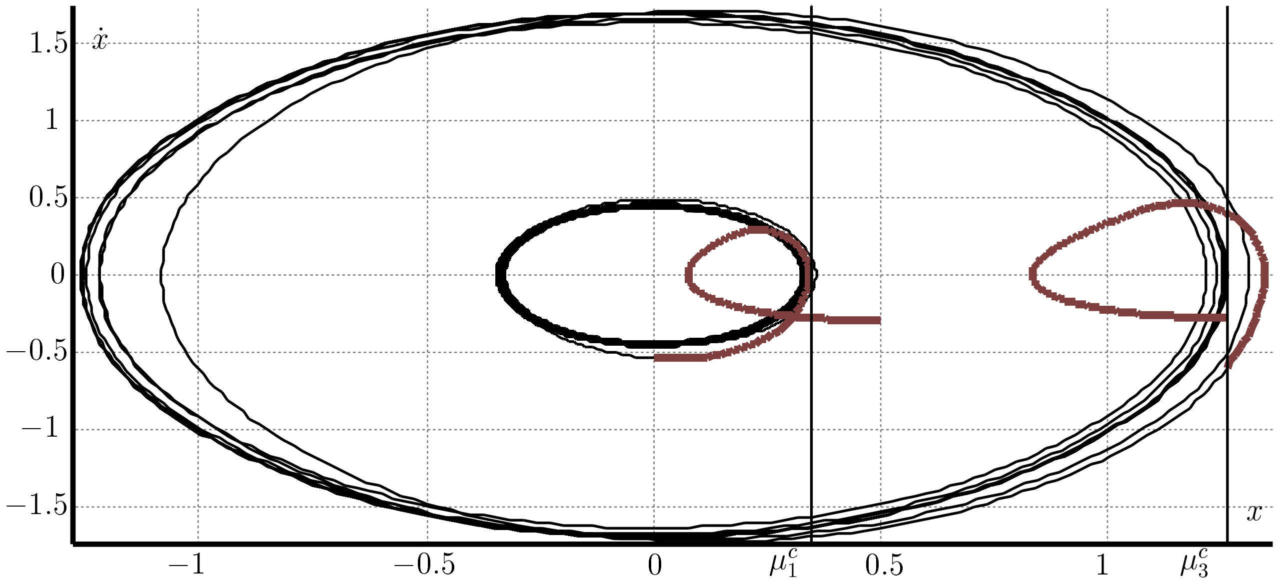

Рис. 3.11. Траектория решения ур. (1.1) ($\mu_1^c = 0.3458$, $T_1^c = 4.6499$, $p_1 = 151$, $t_1^p = 702.15$; $\mu_3^c = 1.2596$, $T_3^c = 4.6499$, $p_3 = 101$, $t_3^p = 469.65$).(8)
Начальный сплайн № 1: $(\{(t_i, x_i)\}|_1^4 = \{-4.65, 1.26; -2.41624, 0.833834; -1.03194, 1.09256; 0, 1.26\}$, $\ddot{x}_1 = 0$, $\ddot{x}_4 = -2.4455$). Начальный сплайн № 2: $(\{(t_i, x_i)\}|_1^4 = \{-4.65, 0.5; -1.71779, 0.167413;$ $-0.811705, 0.336049; 0, 0\}$, $\ddot{x}_1 = 0$, $\ddot{x}_4 = 0.125$).

Рассмотрим частный случай, когда первое из условий (3.16) можно заменить на более простое.

Лемма 3.3 [1]. *Пусть выполняются условия леммы* 1.1, *все нули функции* φ_{11} *на интервале* $(0, a)$ *некритические,* φ_{12} *знакоопределенна на интервале* $(0, a)$ *и в точках множеств* (2.9) $\chi(k) \neq 0$. *Тогда при возрастании параметра* μ *выходы из единичного круга через точку* $z = -1$ *пар комплексно сопряженных корней характеристического уравнения* (1.11) *чередуются с их входами.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция φ_{12} знакоопределенна на интервале $(0, a)$. Согласно предложению 3.3, вне точек множеств (3.5), знаки ее при всех $\mu \in (0, a)$ совпадают со знаком числа $\varphi_{12}(0)$, а в точках множеств (3.5) – со знаком ее ненулевой производной наименьшего порядка. В частности, $\varphi_{12}''(0) \neq 0$ в точках множеств (3.5), если $\chi(k) \neq 0$.

Пусть $\varphi_{11}(0) \neq 0$. То есть точка M не принадлежит множествам (2.9). При $\mu = 0$ на границе единичной окружности нет корня характеристического уравнения (1.11) $z = -1$. В последовательных нулях μ^b функции φ_{11} знаки производных $\varphi_{11}'(\mu^b)$ чередуются. Согласно лемме 3.2, при возрастании параметра μ выходы из единичного круга через точку $z=-1$ пар комплексно сопряженных корней характеристического уравнения (1.11) чередуются с их входами. Пусть $\varphi_{11}(0)=0$. В таком случае, точка M принадлежит одному из множеств (2.9). Проверим, может ли в этом случае при возрастании μ произойти два последовательных входа или выхода пар комплексно сопряженных корней через точку $z=-1$. Так как $\mu^b=0$ является критическим нулем функции φ_{11} , то знак ее при малых положительных значениях μ определяется знаком $\varphi''_{11}(0)$ (см. предложение 3.1).

Пусть μ_1^b есть первый некритический нуль функции φ_{11} . Согласно формуле (3.6), $sign[\varphi'_{11}(\mu_1^b)] = sign[(-1)^{(2k-1)/2}\chi(k)]$. Так как переход пары корней чрез точку $z=-1$ при $\mu^b=0$ определяется неравенствами (2.17), а переход пары при μ_1^b – неравенствами (3.14), (3.15), то чередование входа и выхода возможно лишь, если $sign[F_2(0)\chi(k)] = sign[F_2(0)\varphi'_{11}(\mu_1^b)\varphi_{12}(0)]$. Учитывая, что в точках множеств (2.9) $\varphi_{12}(0)=\alpha\gamma=\alpha(-1)^{(2k-1)/2}$, это условие преобразуется к виду, $sign[\chi(k)] = sign[(-1)^{(2k-1)/2}\chi(k)\dfrac{(-1)^{(2k-1)/2}}{\sqrt{a_1}k}]$, и далее $sign[\chi(k)] = sign[\dfrac{(-1)^{(2k-1)}}{\sqrt{a_1}k}\chi(k)]$. Так как $2k-1$ четное число, то условие выполняется для любой из точек множеств (2.9). В последующих нулях функции φ_{11}, согласно лемме 3.2, при возрастании параметра μ выходы из единичного круга через точку $z=-1$ пар комплексно сопряженных корней характеристического уравнения (1.11) чередуются с их входами.

З а м е ч а н и е 3.1. Пусть выполняются условия леммы 1.1, все нули функции φ_{11} на интервале $(0,a)$ некритические и $|\varphi_{11}(\mu)|<1$ при $\mu\in(0,a)$. Тогда при возрастании параметра μ выходы из единичного круга через точку $z=-1$ пар комплексно сопряженных корней характеристического уравнения (1.11) чередуются с их входами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определитель фундаментальной матрицы решений $\hat{\Phi}$ равен 1 для любых фиксированных значений ее аргументов. Имеем $\det[\hat{\Phi}(-\pi,-1,\mu)] = \varphi_{11}^2(\mu)-\varphi_{12}(\mu)\varphi_{21}(\mu)=1$ при $\mu\in(0,a)$. Отсюда следует, что выполняются неравенства $-2<\varphi_{12}(\mu)\varphi_{21}(\mu)<0$ при $\mu\in(0,a)$. Функции φ_{12} и φ_{21} сохраняют знак на интервале $(0,a)$ и имеют противоположные знаки. Из леммы 3.3 следует справедливость доказываемого утверждения.

Теорема 3.3. *Пусть выполняются условия леммы* 3.3 *и теоремы* 3.1. *Если* $\mathrm{M}\in D_r$, $r=4,6,...$, *то для* $\mu^0\in(0,a)$ τ*-периодическое решение* $x(t,\mu^0)$ *уравнения* (1.1) *неустойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 3.3 выход из единичного круга через точку $z=-1$ пары корней характеристического уравнения (1.11) чередуется с ее входом через эту же точку при возрастании параметра μ.

Так как при $\mu=0$ внутри единичного круга находится $n_0\geq 2$ пар корней характеристического уравнения (1.11), то в силу чередования переходов в точке $z=-1$ внутри единичного круга при $\mu\in(0,a)$ всегда находится хотя бы одна пара корней.

Так же как и в теореме 3.1, ссылка на теорему 1.1 завершает доказательство утверждения.

Теорема 3.4. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.3. *Если* $\mathrm{M}\in D''_2$, *то для* $\mu^0\in(0,a)$ τ*-периодическое решение* $x(t,\mu^0)$ *уравнения* (1.1) *неустойчиво. Если* $\mathrm{M}\in D'_2\bigcup E_2$, *то для* $\mu=\mu^0$ τ*-периодическое решение устойчиво, когда выполняются неравенства*

$$\varphi_{11}(\mu^0)<0, \quad F_2(0)T'(\mu^0)>0, \tag{3.18}$$

и неустойчиво, когда любое из этих неравенств строго нарушается.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathrm{M} \in D_2''$. Тогда, в силу следствия 3.1, имеем $\varphi_{11}(0) > 0$ и $\varphi_{12}(0) > 0$. Поэтому в первом некритическом нуле μ^b выполняется неравенство $F_2(0) \times \varphi_{11}'(\mu^b)\varphi_{12}(0) > 0$, то есть в силу леммы 3.2 произошел вход пары корней характеристического уравнения (1.11) внутрь единичного круга $|z| = 1$ через точку $z = -1$. Тогда при $\mu \in (0, a)$ количество пар корней характеристического уравнения (1.11) с модулем, меньшим единицы, равняется 1 или 2, так как при последующих переходах, в силу леммы 3.3 происходит чередование входов и выходов через точку $z = -1$. Поэтому система (1.7) неустойчива.

Пусть $\mathrm{M} \in D_2'$ $\big[$соотв. $\mathrm{M} \in E_2\big]$. Тогда в силу следствия 3.1 имеем $\varphi_{11}(0) > 0$ и $\varphi_{12}(0) < 0$ $\big[$соотв. $\varphi_{12}(0) > 0\big]$. Поэтому в первом некритическом нуле μ^b выполняется неравенство $F_2(0)\varphi_{11}'(\mu^b)\varphi_{12}(0) < 0$, то есть в силу леммы 3.2 произошел выход пары корней характеристического уравнения (1.11) из внутренности единичного круга $|z| = 1$ через точку $z = -1$. Тогда при $\mu \in (0, a)$ количество пар корней характеристического уравнения (1.11) с модулем, меньшим единицы, равняется 0 или 1, так как при последующих переходах, в силу леммы 3.3 происходит чередование входов и выходов через точку $z = -1$. В области $\varphi_{11}(\mu) < 0$, $\mu \in (0, a)$, выполняется равенство $c^-(\mu^0) = c^+(\mu^0) + n_0$, где $n_0 = 1$. Если вместе с тем выполняется условие $F_2(0)T'(\mu^0) > 0$, то в силу теоремы 3.1 система (1.7) устойчива при $\mu = \mu^0$.

В области $\varphi_{11}(\mu) > 0$, $\mu \in (0, a)$, выполняется неравенство $c^-(\mu^0) < c^+(\mu^0) + n_0$, где $n_0 = 1$, то есть внутри единичного круга находится одна пара корней и система (1.7) неустойчива при $\mu = \mu^0$. При выполнении условия $F_2(0)T'(\mu^0) < 0$ внутри единичного круга находится один дополнительный корень и система (1.7) неустойчива при $\mu = \mu^0$.

П р и м е р 3.6. Рассмотрим уравнение (1.1), где $F(x, y) = 2x - y + 2x^3 - 0.6x^5$. Имеем $f(x) = x + 2x^3 - 0.6x^5$, $F_2(x) = -1$, $x \in [0, a)$, $a = 1.7$, $\mathrm{M} = (2, -1) \in D_2'$.

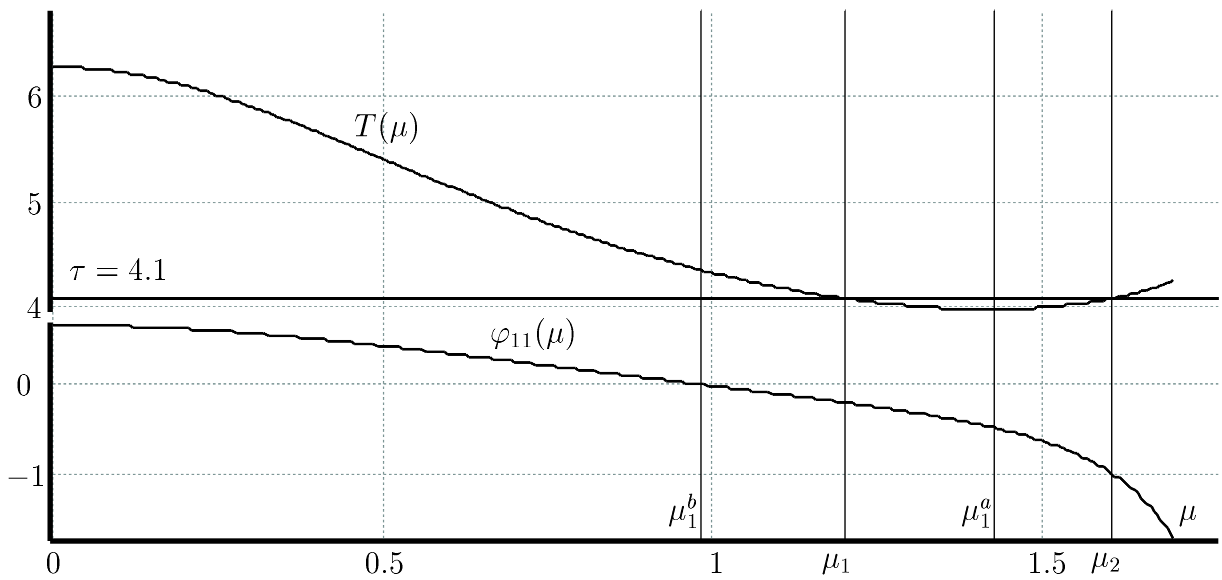

Рис. 3.12. Функции T и φ_{11} ($\mu_1 = 1.1812$, $\mu_2 = 1.62$; $\mu_1^a = 1.42$; $\mu_1^b = 0.985$).(3)

Функция T на интервале $(0, a)$ имеет один критический аргумент $\mu = \mu_1^a$, и функция φ_{11} имеет один нуль $\mu = \mu_1^b$ на полуинтервале $[0, a)$ (см. 3.12). Взяв запаздывание $\tau = 4.1$, получаем два значения параметра μ_1 и μ_2, которым отвечают τ-периодические решения уравнения (1.1). Устойчивым является решение, отвечающее параметру $\mu = \mu_1$, так как выполняются требования теоремы 3.4 и условия устойчивости (3.18): $\varphi_{11}(\mu_1) < 0$,

$F_2(0)T'(\mu_1) > 0$. Согласно той же теореме τ-периодическое решение, отвечающее параметру $\mu = \mu_2$ неустойчиво, так как $F_2(0)T'(\mu_2) < 0$. На рисунке 3.13 изображена траектория решения уравнения (1.1). Локализован предельный цикл, соответствующий значению $\mu = \mu_1$.

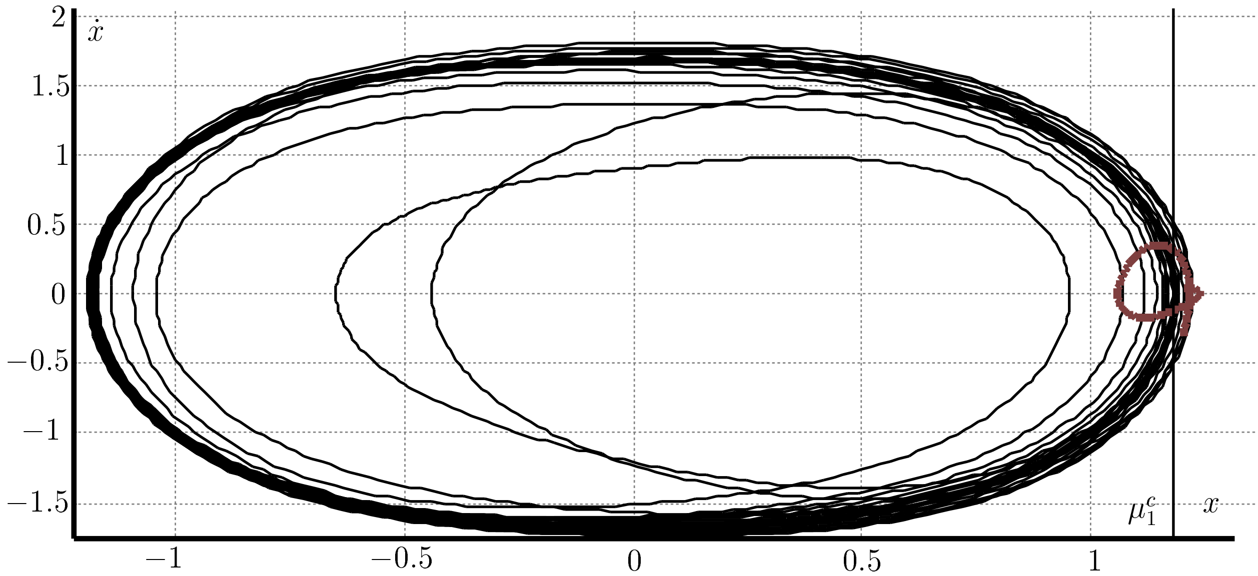

Рис. 3.13. Траектория решения ур. (1.1) ($\mu_1^c = 1.1826$, $T_1^c = 4.15$, $p_1 = 101$, $t_1^p = 414.1$).(3) Начальный сплайн: $(\{(t_i, x_i)\}|_1^4 = \{-4.1,\ 1.2;\ -1.51198,\ 1.13913;\ -0.554804,\ 1.09819;\ 0,\ 1.2\}$, $\ddot{x}_1 = 0$, $\ddot{x}_4 = -3.16301$).

П р и м е р 3.7. Рассмотрим уравнение (1.1), где $F(x,y) = 1.5x + y + 2x^3 - 1.3x^5 + 0.2x^7$. Имеем $f(x) = 2.5x + 2x^3 - 1.3x^5 + 0.2x^7$, $F_2(x) = 1$, $x \in [0, a)$, $a = 2.3$, $\mathrm{M} = (1.5, 1) \in E_2$.

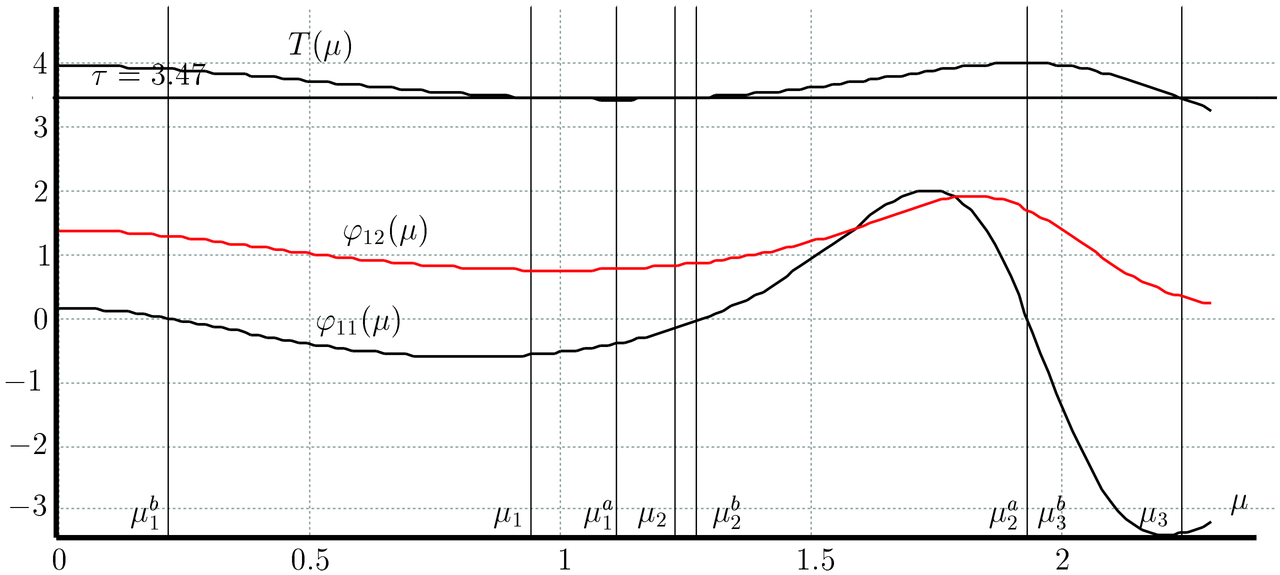

Рис. 3.14. Функции T, φ_{11} и φ_{12} ($\mu_1 = 0.963$, $\mu_2 = 1.25$, $\mu_3 = 2.24$; $\mu_1^a = 1.11$, $\mu_2^a = 1.93$; $\mu_1^b = 0.222$, $\mu_2^b = 1.288$, $\mu_3^b = 1.934$).(9)

Отметим, что в силу замечания 2.3 при $\mu = 0$ внутри единичной окружности находится одна комплексно сопряженная пара корней характеристического уравнения (1.11). Функция T на интервале $(0, a)$ имеет два критических аргумента $\mu = \mu_1^a$ и $\mu = \mu_2^a$, и функция φ_{11} имеет три нуля $\mu = \mu_1^b$, $\mu = \mu_2^b$, $\mu = \mu_3^b$ на полуинтервале $[0, a)$ (см. рис. 3.14). Взяв запаздывание $\tau = 3.47$, получаем три значения параметра μ_1, μ_2 и μ_3, которым отвечают τ-периодические решения уравнения (1.1). Устойчивым является решение, отвечающее параметру $\mu = \mu_2$, так как выполняются требования теоремы 3.4 и условия устойчивости (3.18): $\varphi_{11}(\mu_2) < 0$, $F_2(0)T'(\mu_2) > 0$. Согласно той же теореме τ-периодические решения, отвечающие параметрам $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_3$, неустойчивы, так как $F_2(0)T'(\mu_1) < 0$ и $F_2(0)T'(\mu_3) < 0$. На рисунке 3.15 изображена траектория решения уравнения (1.1). Локализован предельный цикл, соответствующий значению $\mu = \mu_2$.

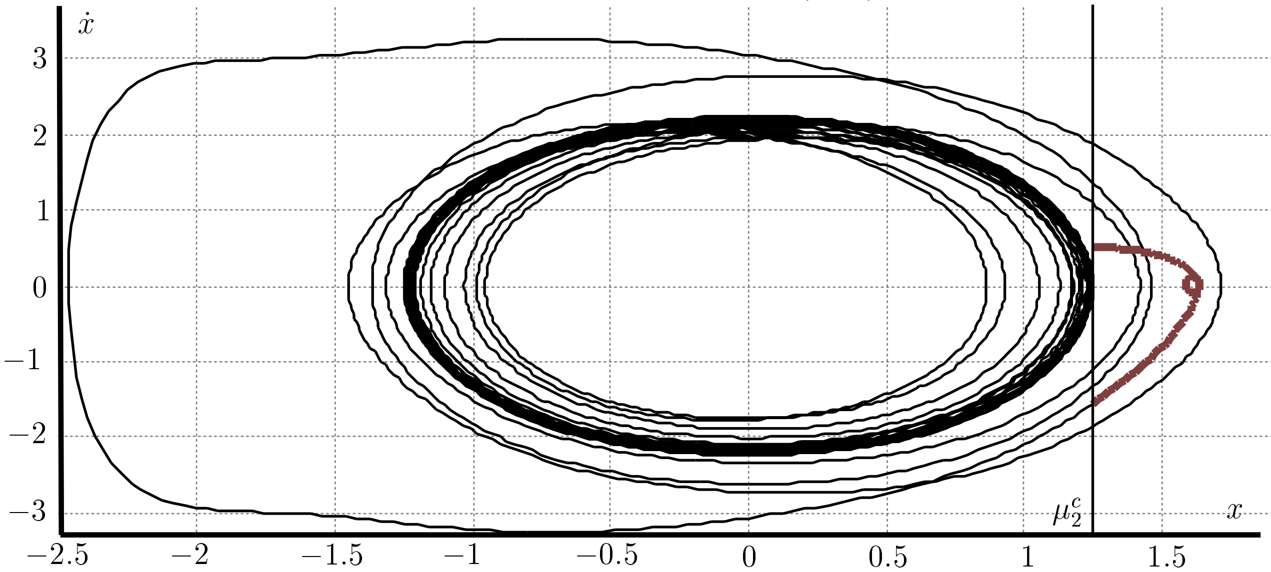

Рис. 3.15. Траектория решения ур. (1.1) ($\mu_2^c = 1.24657$, $T_2^c = 3.47$, $p_2 = 101$, $t_2^p = 350.47$).(9) Начальный сплайн: $(\{(t_i, x_i)\}|_1^4 = \{-3.47, 1.25; -2.63889, 1.59441; -0.952732, 1.59724; 0, 1.25\}$, $\ddot{x}_1 = 0$, $\ddot{x}_4 = -4.01764$).

П р и м е р 3.8. Рассмотрим уравнение (1.1), где $F(x,y) = -0.15x + 0.4y + 6x^3 - 0.42y^3 - 5x^5 + 1.5x^4y - 0.1y^5$. Имеем $f(x) = 0.25x + 5.58x^3 - 3.6x^5$, $F_2(x) = 0.4 - 1.26x^2 + x^4$, $x \in [0, a)$, $a = 1.2$, $\mathrm{M} = (-0.15, 0.4) \in E_2$.

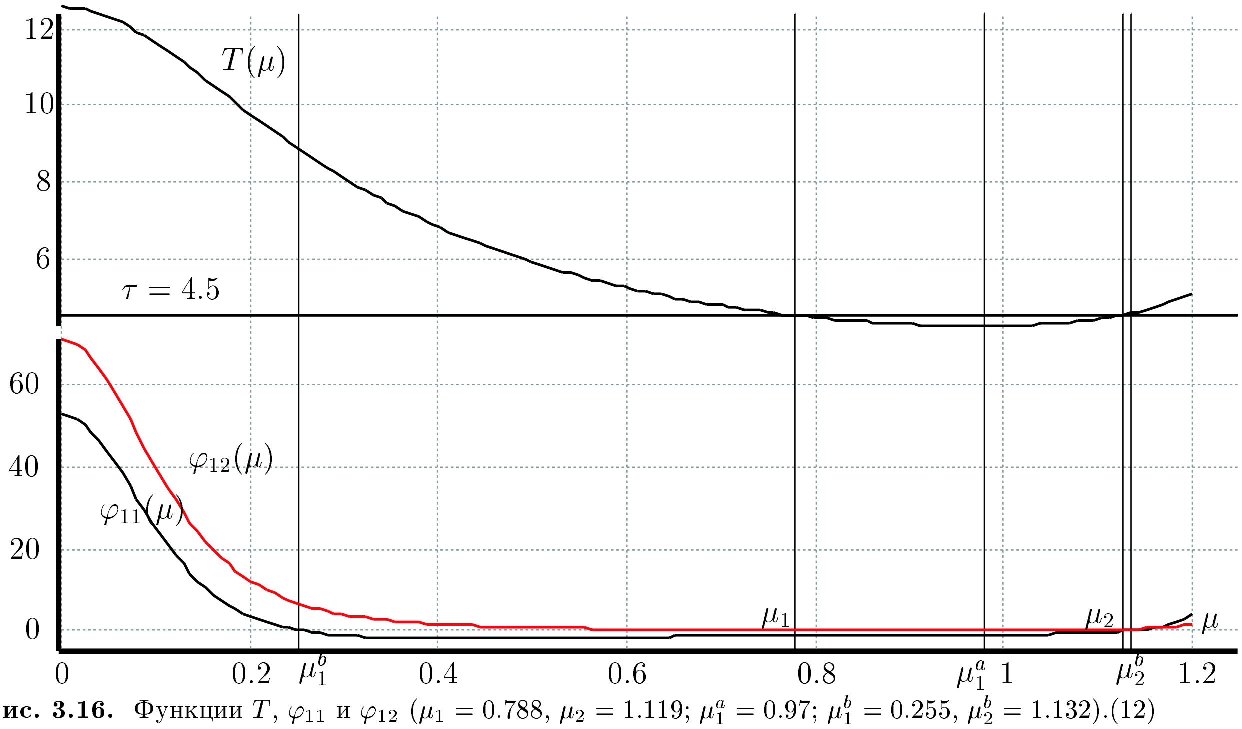

Рис. 3.16. Функции T, φ_{11} и φ_{12} ($\mu_1 = 0.788$, $\mu_2 = 1.119$; $\mu_1^a = 0.97$; $\mu_1^b = 0.255$, $\mu_2^b = 1.132$).(12)

Отметим, что в силу замечания 2.3 при $\mu = 0$ внутри единичной окружности находится одна пара действительных корней характеристического уравнения (1.11). Перед последующим выходом из единичного круга через точку $z = -1$ эти корни проходят процедуру слияния при некотором значении параметра μ. Функция T на интервале $(0, a)$ имеет один критический аргумент $\mu = \mu_1^a$, и функция φ_{11} имеет два нуля $\mu = \mu_1^b$ и $\mu = \mu_2^b$ на полуинтервале $[0, a)$ (см. рис. 3.16). Взяв запаздывание $\tau = 4.5$, получаем два значения параметра μ_1 и μ_2, которым отвечают τ-периодические решения уравнения (1.1). Устойчивым является решение, отвечающее параметру $\mu = \mu_2$, так как выполняются требования теоремы 3.4 и условия устойчивости (3.18): $\varphi_{11}(\mu_2) < 0$, $F_2(0)T'(\mu_2) > 0$. Согласно той же теореме τ-периодическое решение, отвечающее параметру $\mu = \mu_1$, неустойчиво, так как $F_2(0)T'(\mu_1) < 0$. На рисунке 3.17 изображена траектория решения уравнения (1.1). Локализован предельный цикл, соответствующий значению $\mu = \mu_2$.

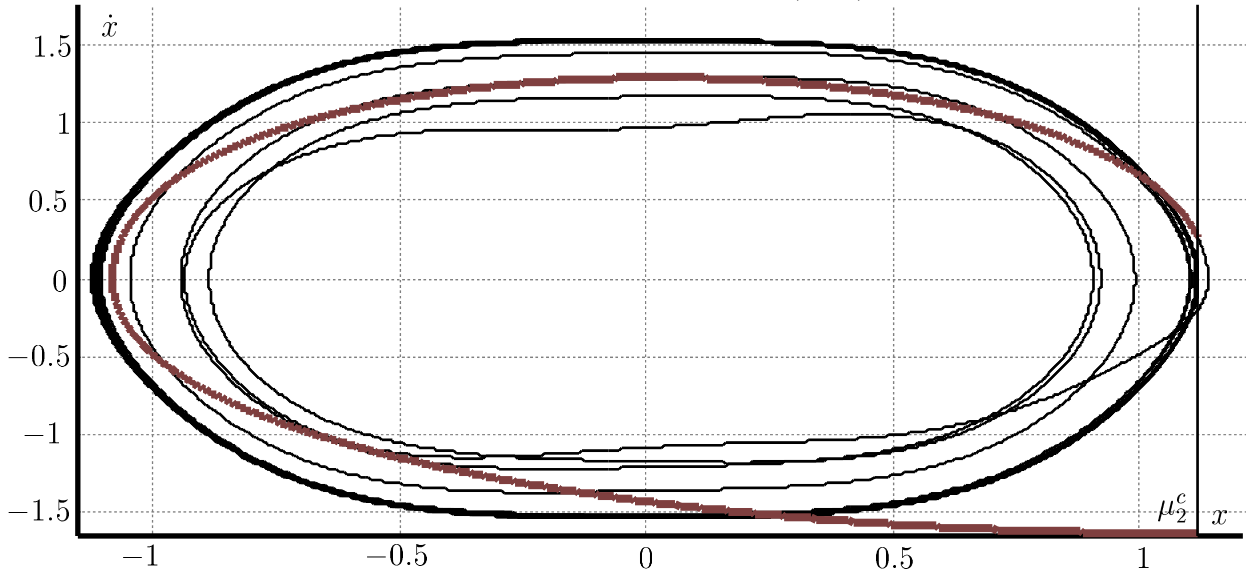

Рис. 3.17. Траектория решения ур. (1.1) ($\mu_2^c = 1.1185$, $T_2^c = 4.5$, $p_2 = 31$, $t_2^p = 139.5$).(12)
Начальный сплайн: $(\{(t_i, x_i)\}|_1^3 = \{-4.5,\ 1.12;\ -2.29567,\ -1.05808;\ 0,\ 1.12\},\ \ddot{x}_1 = 0,\ \ddot{x}_3 = -1.77507\ )$.

Теорема 3.5. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.3. *Если* $\mathrm{M} \in \Gamma_2$ *и* $\chi(k) < 0$, *то* τ*-периодическое решение* $x(t, \mu^0)$ *уравнения* (1.1) *устойчиво для* $\mu^0 \in (0, a)$, *когда выполняются неравенства* (3.18), *и неустойчиво, когда любое из этих неравенств строго нарушается. Если* $\mathrm{M} \in \Gamma_2$ *и* $\chi(k) > 0$, *то периодическое решение неустойчиво.*

Доказательство. В силу следствия 3.1 имеем $\varphi_{11}(0) = 1 > 0$ и $\varphi_{12}(0) = 0$. Из формулы (3.13) следует, что $\varphi_{12}''(0) = \dfrac{\pi\chi(2)}{16a_1\sqrt{a_1}}$. По лемме 3.2, направление перехода пары корней характеристического уравнения (1.11) в первом некритическом нуле μ^b, при условии $\chi(k) \neq 0$, зависит от знака произведения $F_2(0)\varphi_{11}'(\mu^b)\varphi_{12}''(0)$. При $\chi(k) < 0$ $\left[\chi(k) > 0\right]$, в силу леммы 3.2, произошел выход [вход] пары корней характеристического уравнения (1.11) из внутренней части во внешнюю часть [из внешней части во внутреннюю часть] единичного круга $|z| = 1$ через точку $z = -1$. В области $\varphi_{11}(\mu) < 0$, $\mu \in (0, a)$, выполняется равенство $c^-(\mu^0) = c^+(\mu^0) + n_0$, где $n_0 = 1$. Если вместе с тем выполняется условие $F_2(0)T'(\mu^0) > 0$, то в силу теоремы 3.1 система (1.7) устойчива при $\mu = \mu^0$.

В области $\varphi_{11}(\mu) > 0$, $\mu \in (0, a)$, выполняется неравенство $c^-(\mu^0) < c^+(\mu^0) + n_0$, где $n_0 = 1$, то есть внутри единичного круга находится одна пара корней и система (1.7) неустойчива при $\mu = \mu^0$. При выполнении условия $F_2(0)T'(\mu^0) < 0$ внутри единичного круга находится один дополнительный корень и система (1.7) неустойчива при $\mu = \mu^0$.

П р и м е р 3.9. Рассмотрим уравнение (1.1), где $F(x, y) = 5x - 3y - 0.1x^3 + 0.2y^3 + 2x^5$. Имеем $f(x) = 2x + 0.1x^3 + 2x^5$, $F_2(x) = -3 + 0.6x^2$, $x \in [0, a)$, $a = 1.8$, M $= (5, -3) \in \Gamma_2$, $k = 2$, $a_2^{(1)} = -0.3$, $a_2^{(2)} = 0.6$, $\chi(k) = -0.3(2 - k^2) - 0.6(2 + k^2) < 0$.

Функция T на интервале $(0, a)$ не имеет критических аргументов, и функция φ_{11} имеет один нуль $\mu = \mu_1^b$ на полуинтервале $[0, a)$ (см. рис. 3.18). Взяв запаздывание $\tau = 2$, получаем одно значение параметра μ_1, которому отвечает τ-периодическое решение уравнения (1.1). Оно является устойчивым, так как выполняются требования теоремы 3.4, условие $\chi(k) < 0$ и условия устойчивости (3.18): $\varphi_{11}(\mu_1) < 0$, $F_2(0)T'(\mu_1) > 0$. На рисунке 3.19 изображена траектория решения уравнения (1.1). Локализован предельный цикл, соответствующий значению $\mu = \mu_1$.

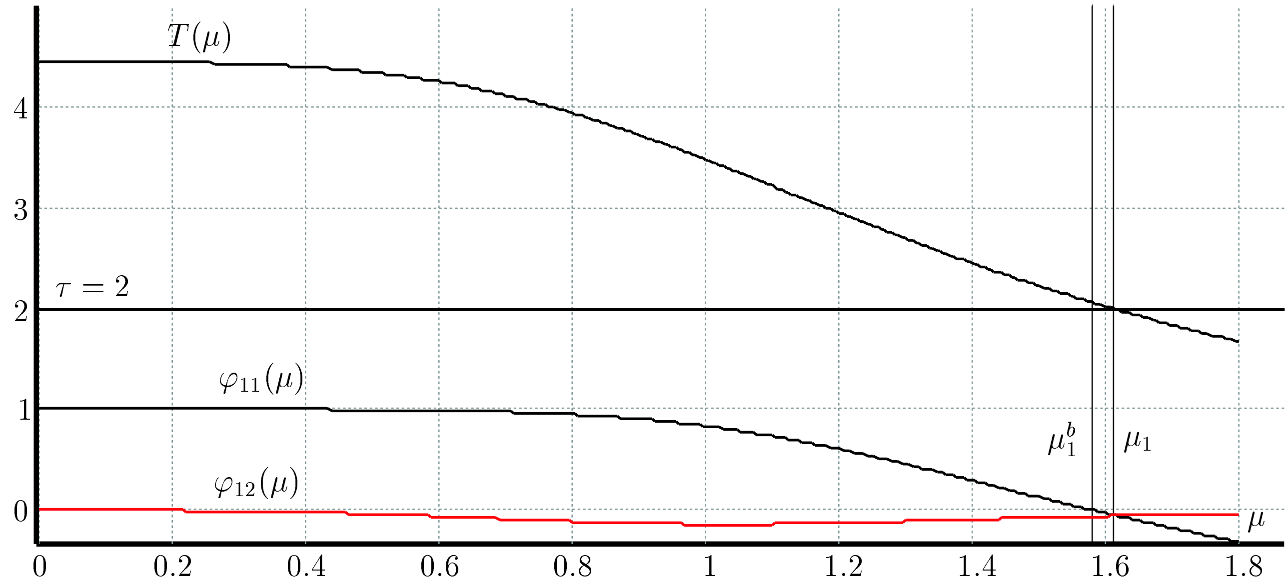

Рис. 3.18. Функции T, φ_{11} и φ_{12} ($\mu_1 = 1.6098$; $\mu_1^b = 1.58$).(1)

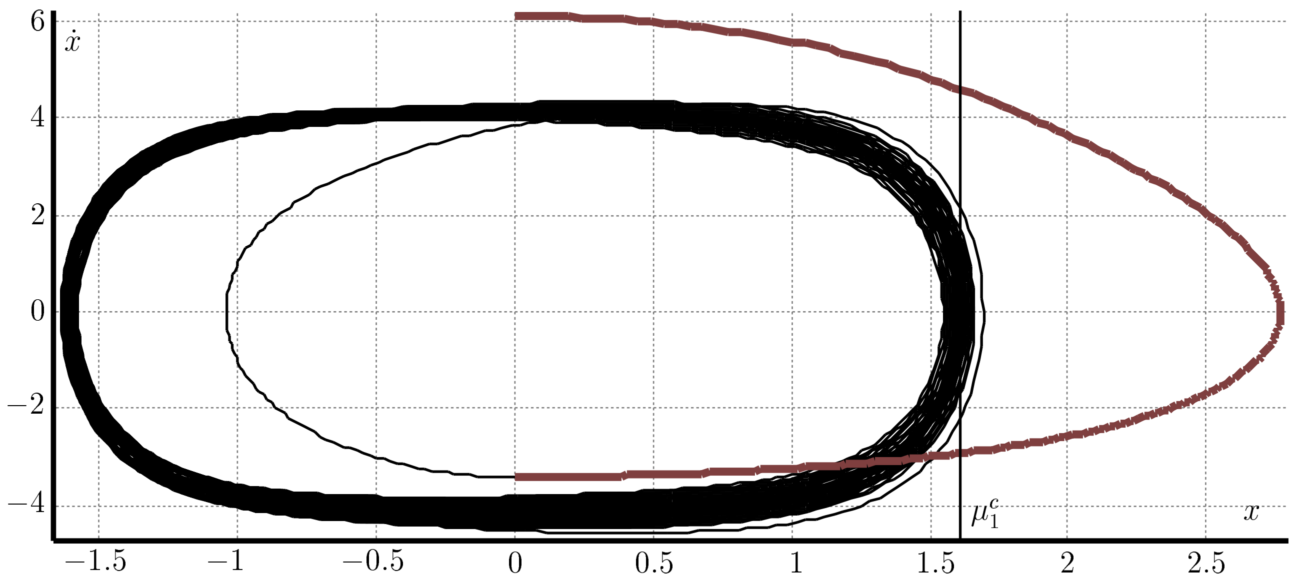

Рис. 3.19. Траектория решения ур. (1.1) ($\mu_1^c = 1.6102$, $T_1^c = 2$, $p_1 = 151$, $t_1^p = 302$).(1)
Начальный сплайн: $(\{(t_i, x_i)\}|_1^4 = \{-2, 0; -1.71943, 1.58076; -0.47247, 1.53935; 0, 0\}$, $\ddot{x}_1 = 0$, $\ddot{x}_4 = 0$).

Теорема 3.6. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.3. *Если* $\mathrm{M} \in D_0 \bigcup E_0$, *то для* $\mu = \mu^0$ τ*-периодическое решение* $x(t, \mu^0)$ *уравнения* (1.1) *устойчиво, когда выполняются неравенства* (3.18), *и неустойчиво, когда любое из этих неравенств строго нарушается.*

Доказательство. В силу следствия 3.1 имеем $\varphi_{11}(0) < 0$, а также $\varphi_{12}(0) > 0$ при $\mathrm{M} \in E_0$ и $\varphi_{12}(0) < 0$ при $\mathrm{M} \in D_0$. Поэтому в первом некритическом нуле μ^b выполняется неравенство $F_2(0)\varphi'_{11}(\mu^b)\varphi_{12}(0) > 0$, то есть в силу леммы 3.2 произошел вход пары корней характеристического уравнения (1.11) во внутренность единичного круга $|z| = 1$ через точку $z = -1$. Тогда при $\mu \in (0, a)$ количество пар корней характеристического уравнения (1.11) с модулем, меньшим единицы, равняется 0 или 1, так как при последующих переходах, в силу леммы 3.3 происходит чередование входов и выходов через точку $z = -1$. В области $\varphi_{11}(\mu) < 0$, $\mu \in (0, a)$, выполняется равенство $c^-(\mu^0) = c^+(\mu^0) + n_0$, где $n_0 = 0$. Если вместе с тем выполняется условие $F_2(0)T'(\mu^0) > 0$, то в силу теоремы 3.1 система (1.7) устойчива при $\mu = \mu^0$.

В области $\varphi_{11}(\mu) > 0$, $\mu \in (0, a)$, выполняется неравенство $c^-(\mu^0) < c^+(\mu^0) + n_0$, где $n_0 = 0$, то есть внутри единичного круга находится одна пара корней и система (1.7) неустойчива при $\mu = \mu^0$. При выполнении условия $F_2(0)T'(\mu^0) < 0$ внутри единичного круга находится один дополнительный корень и система (1.7) неустойчива при $\mu = \mu^0$.

Пример 3.10. Рассмотрим уравнение (1.1), где $F(x, y) = \mathrm{arctg}(2x + y)$. Имеем $f(x) = \mathrm{arctg}(3x)$, $F_2(x) = 1/(1 + 9x^2) > 0$, $x \in [0, a)$, $a = 10$, $\mathrm{M} = (2, 1) \in E_0$.

Функция T не имеет критических аргументов, и функция φ_{11} на интервале $(0, a)$ имеет один нуль $\mu = \mu_1^b$ (см. рис. 3.20). Взяв запаздывание $\tau = 3.715$, получаем значение параметра μ_1, которому отвечает τ-периодическое решение уравнения (1.1). Оно является устойчивым, так как выполняются требования теоремы 3.6 и условия устойчивости (3.18): $\varphi_{11}(\mu_1) < 0$, $F_2(0)T'(\mu_1) > 0$. На рисунке 3.21 изображена траектория решения уравнения (1.1). Локализован предельный цикл, соответствующий значению $\mu = \mu_1$.

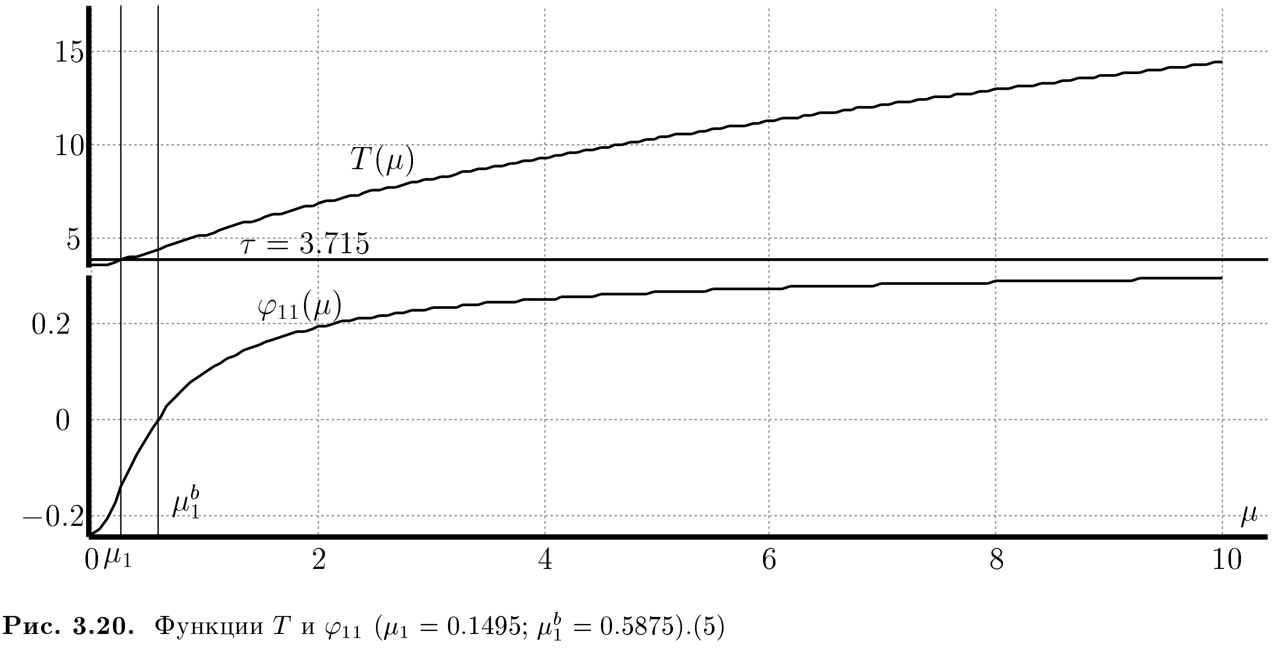

Рис. 3.20. Функции T и φ_{11} ($\mu_1 = 0.1495$; $\mu_1^b = 0.5875$).(5)

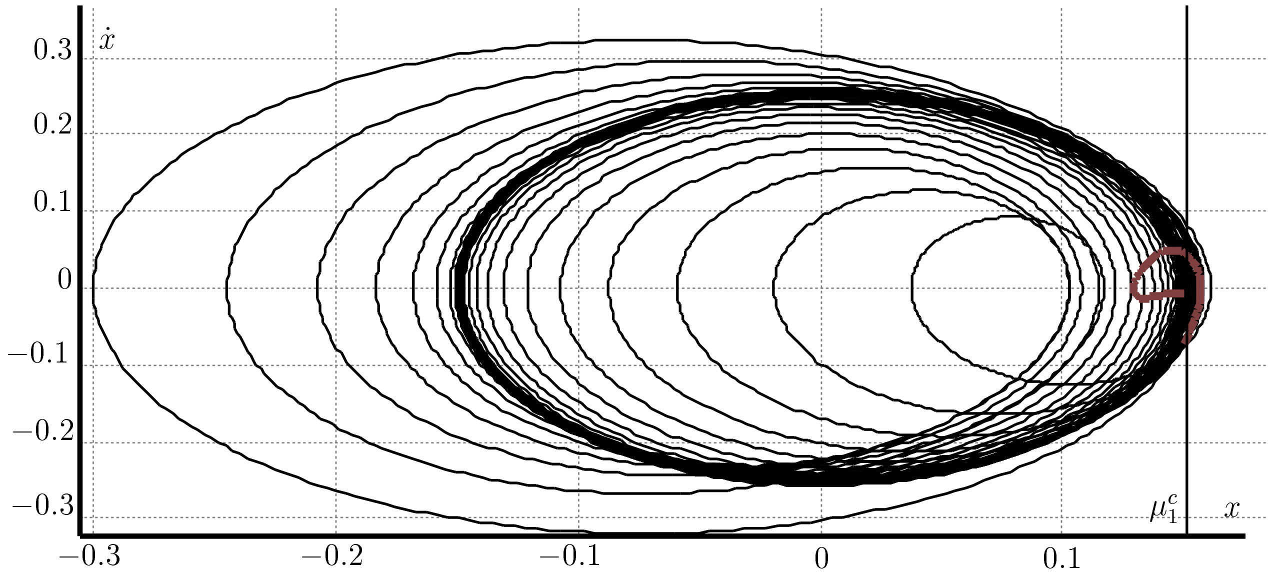

Рис. 3.21. Траектория решения ур. (1.1) ($\mu_1^c = 0.1506$, $T_1^c = 3.71499$, $p_1 = 151$, $t_1^p = 560.965$).(5) Начальный сплайн: $(\{(t_i, x_i)\}|_1^4 = \{-3.715,\ 0.15;\ -1.72931,\ 0.134044;\ -0.733951,\ 0.137572;\ 0,\ 0.15\}$, $\ddot{x}_1 = 0$, $\ddot{x}_4 = -0.422854$).

П р и м е р 3.11. Рассмотрим уравнение (1.1), где $F(x,y) = 2x + y - x^3 + 1.16x^5 - 0.246x^7 - 0.5x^5y^2 + 0.25x^3y^4 + 0.07x^9$. Имеем $f(x) = 3x - x^3 + 1.16x^5 - 0.496x^7 + 0.07x^9$, $F_2(x) = 1$, $x \in [0,a)$, $a = 1.85$, $\mathrm{M} = (2,1) \in E_0$.

Функция T на интервале $(0,a)$ имеет три критических аргумента μ_1^a, μ_2^a и μ_3^a, и функция φ_{11} имеет четыре нуля на полуинтервале $[0,a)$ (см. рис. 3.22). Взяв запаздывание $\tau = 3.794$, получаем четыре значения параметра μ_1, μ_2, μ_3 и μ_4, которым отвечают τ-периодические решения уравнения (1.1). Устойчивыми являются решения, отвечающие параметрам $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_3$, так как выполняются требования теоремы 3.6 и условия устойчивости (3.18): $\varphi_{11}(\mu_1) < 0$, $F_2(0)T'(\mu_1) > 0$ и $\varphi_{11}(\mu_3) < 0$, $F_2(0)T'(\mu_3) > 0$. Согласно той же теореме τ-периодические решения, отвечающие параметрам $\mu = \mu_2$ и $\mu = \mu_4$, неустойчивы, так как $F_2(0)T'(\mu_2) < 0$ и $F_2(0)T'(\mu_4) < 0$. На рисунке 3.23 изображены две траектории решений уравнения (1.1). Локализованы предельные циклы, соответствующие значениям $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_3$.

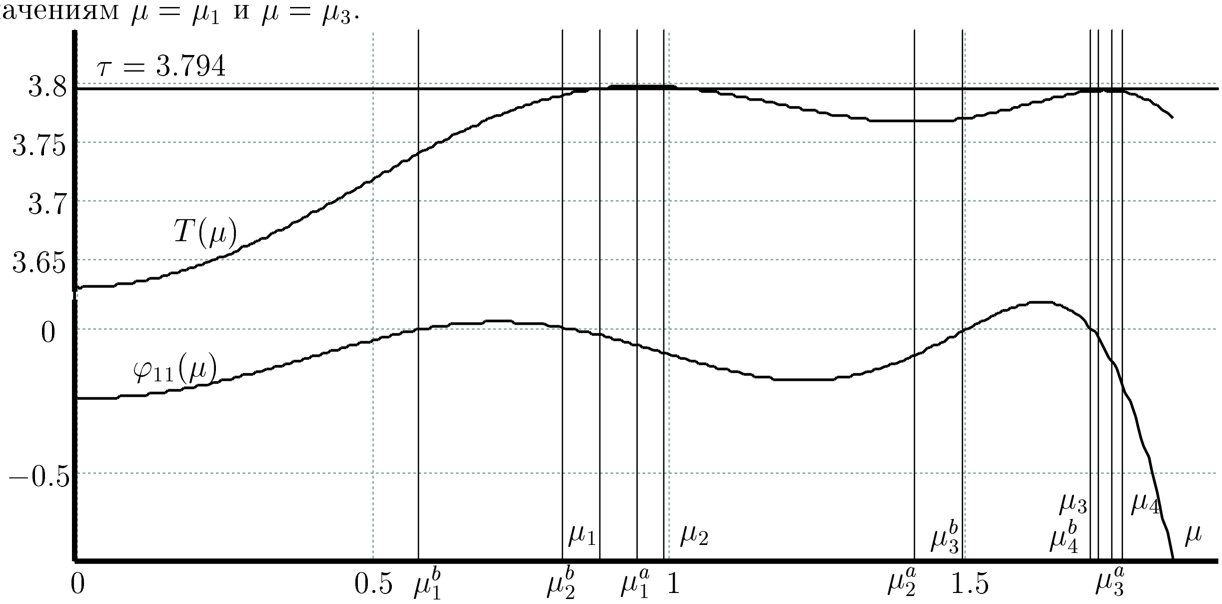

Рис. 3.22. Функции T и φ_{11} ($\mu_1 = 0.85923$, $\mu_2 = 1.05615$, $\mu_3 = 1.718$, $\mu_4 = 1.7501$; $\mu_1^a = 0.954$, $\mu_2^a = 1.409$, $\mu_3^a = 1.7335$; $\mu_1^b = 0.576$, $\mu_2^b = 0.837$, $\mu_3^b = 1.4975$, $\mu_4^b = 1.711$).(2)

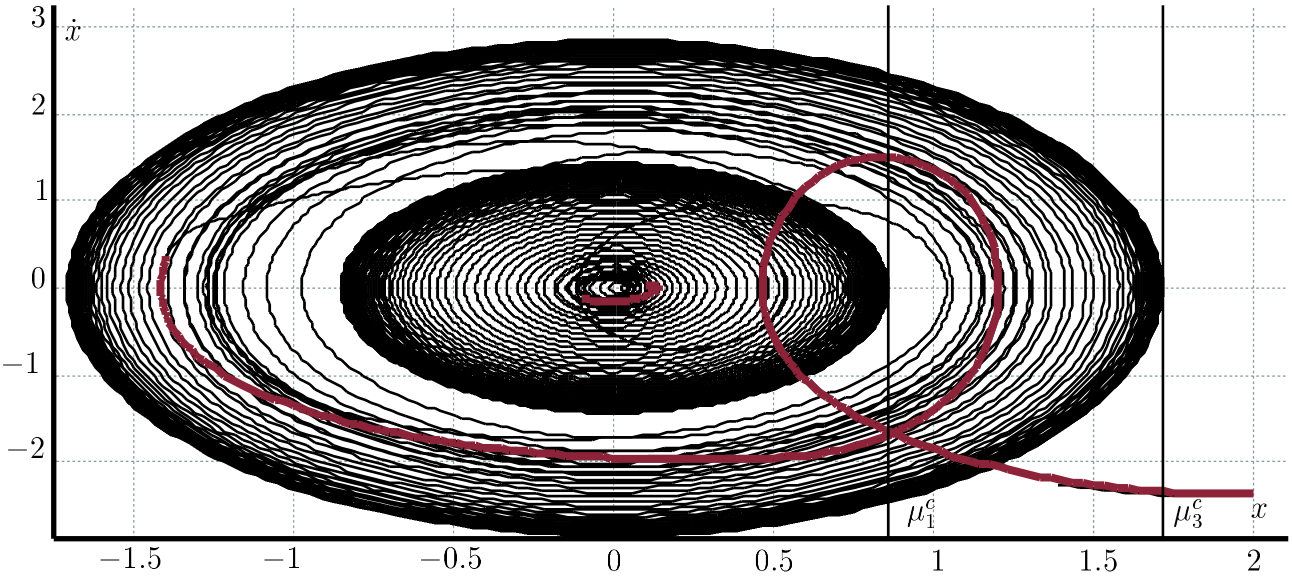

Рис. 3.23. Траектория решения ур. (1.1) ($\mu_1^c = 0.856457$, $T_1^c = 3.79399$, $p_1 = 251$, $t_1^p = 952.294$; $\mu_3^c = 1.71345$, $T_3^c = 3.79399$, $p_3 = 151$, $t_3^p = 572.894$).(2)
Начальный сплайн № 1: $(\{(t_i, x_i)\}|_1^3 = \{-3.794,\ 0.1;\ -1.32505,\ 0.0848403;\ 0,\ -0.1\}$, $\ddot{x}_1 = 0$, $\ddot{x}_3 = 0.0990116)$.
Начальный сплайн № 2: $(\{(t_i, x_i)\}|_1^5 = \{-3.794,\ 2;\ -2.67096,\ 0.521138;\ -2.088,\ 1.19837;\ -1.53391,\ 0.54878;$ $0,\ -1.4\}$, $\ddot{x}_1 = 0$, $\ddot{x}_5 = 3.36738$).

Теорема 3.7. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.3. *Если* $\mathrm{M} \in \partial D_r$, $r = 2, 4, 6, \ldots$, *то для* $\mu^0 \in (0, a)$ τ*-периодическое решение* $x(t, \mu^0)$ *уравнения* (1.1) *неустойчиво.*

Доказательство. Согласно лемме 3.3 выход из единичного круга через точку $z = -1$ пары корней характеристического уравнения (1.11) чередуется с ее входом через эту же точку при возрастании параметра μ.

Так как при $\mu = 0$ внутри единичного круга находится $n_0 \geq 1$ пар корней и на границе единичного круга в точке $z = -1$ находится одна пара корней характеристического уравнения (1.11), то в силу чередования переходов в точке $z = -1$ внутри единичного круга при $\mu \in (0, a)$ всегда находится хотя бы одна пара корней.

Теорема 3.8. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.3. *Если* $\mathrm{M} \in \partial E_0 \bigcup \partial D_0$, *то при условии* $\chi(k) \neq 0$, τ*-периодическое решение* $x(t, \mu^0)$ *уравнения* (1.1) *устойчиво для* $\mu^0 \in (0, a)$, *если выполняются неравенства* (3.18), *и неустойчиво, когда любое из этих неравенств строго нарушается.*

Доказательство. При $\mu = 0$ на границе единичного круга $|z| = 1$ в точке $z = -1$ находится пара корней характеристического уравнения (1.11). При условии $F_2(0)\chi(k) > 0$ $\left[F_2(0)\chi(k) < 0\right]$, по следствию 2.2 при возрастании от нуля малого параметра μ происходит сход этой пары корней во внешность $\left[\text{внутренность}\right]$ единичного круга. Тогда при $\mu \in (0, a)$ количество пар корней характеристического уравнения (1.11) с модулем, меньшим единицы, равняется 0 или 1, так как при последующих переходах, в силу леммы 3.3 происходит чередование входов и выходов через точку $z = -1$. Из формулы (3.6) следует, что при малых положительных μ выполняется условие $sign[\varphi_{11}(\mu)] = sign[\varphi_{11}''(0)] = sign[(-1)^{(2k+1)/2}\chi(k)]$. В точках множества ∂E_0 имеем $sign[\varphi_{11}(\mu)] = sign[-\chi(k)]$. Откуда $\varphi_{11}(\mu) < 0$ $\left[\varphi_{11}(\mu) > 0\right]$. В области $\varphi_{11}(\mu) < 0$, $\mu \in (0, a)$, выполняется равенство $c^-(\mu^0) = c^+(\mu^0) + n_0$, где $n_0 = 0$. В точках множества ∂D_0 имеем $sign[\varphi_{11}(\mu)] = sign[\chi(k)]$. Откуда $\varphi_{11}(\mu) > 0$ $\left[\varphi_{11}(\mu) < 0\right]$. В области $\varphi_{11}(\mu) < 0$, $\mu \in (0, a)$, выполняется равенство $c^-(\mu^0) = c^+(\mu^0) + n_0 + 1$, где $n_0 = 0$. Если вместе с тем выполняется условие $F_2(0)T'(\mu^0) > 0$, то в силу теоремы 3.1 система (1.7) устойчива при $\mu = \mu^0$.

При выполнении условия $F_2(0)T'(\mu^0) < 0$ внутри единичного круга находится один дополнительный корень и система (1.7) неустойчива при $\mu = \mu^0$.

П р и м е р 3.12. Рассмотрим уравнение (1.1), где $F(x, y) = 13x - 5y + 2x^3 - 0.6x^5$. Имеем $f(x) = 8x + 2x^3 - 0.6x^5$, $F_2(x) = -5$, $x \in [0, a)$, $a = 2$, $\mathrm{M} = (13, -5) \in \partial D_0$, $k = 3/2$, $a_2^{(1)} = 6$, $a_2^{(2)} = 0$, $\chi(k) = 6(2 - k^2) < 0$.

Функция T на интервале $(0, a)$ имеет один критический аргумент $\mu = \mu_1^a$, и функция φ_{11} при $\mu = 0$ имеет критический нуль (см. рис. 3.24). Взяв запаздывание $\tau = 2.15$, получаем два значения параметра μ_1 и μ_2, которым отвечают τ-периодические решения уравнения (1.1). Устойчивым является решение, отвечающее параметру $\mu = \mu_1$, так как выполняются требования теоремы 3.8, условие $\chi(k) \neq 0$ и условия устойчивости (3.18): $\varphi_{11}(\mu_1) < 0$, $F_2(0)T'(\mu_1) > 0$. Согласно той же теореме τ-периодическое решение, отвечающее параметру $\mu = \mu_2$, неустойчиво, так как $F_2(0)T'(\mu_2) < 0$. На рисунке 3.25 изображена траектория решения уравнения (1.1). Локализован предельный цикл, соответствующий значению $\mu = \mu_1$.

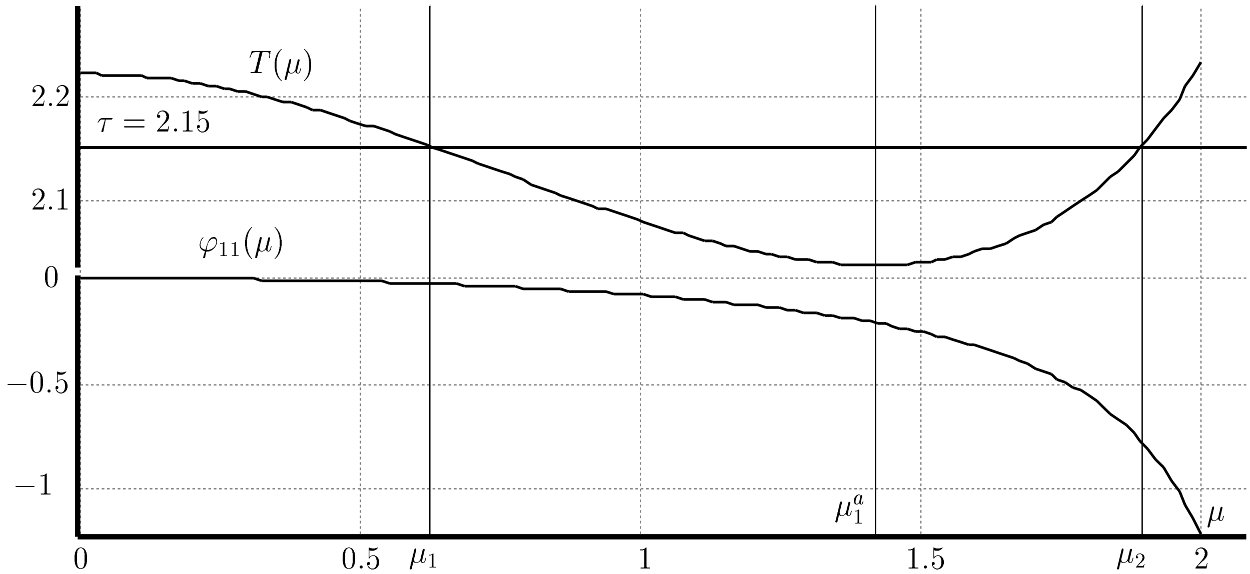

Рис. 3.24. Функции T и φ_{11} ($\mu_1 = 0.631$, $\mu_2 = 1.892$; $\mu_1^a = 1.415$).(4)

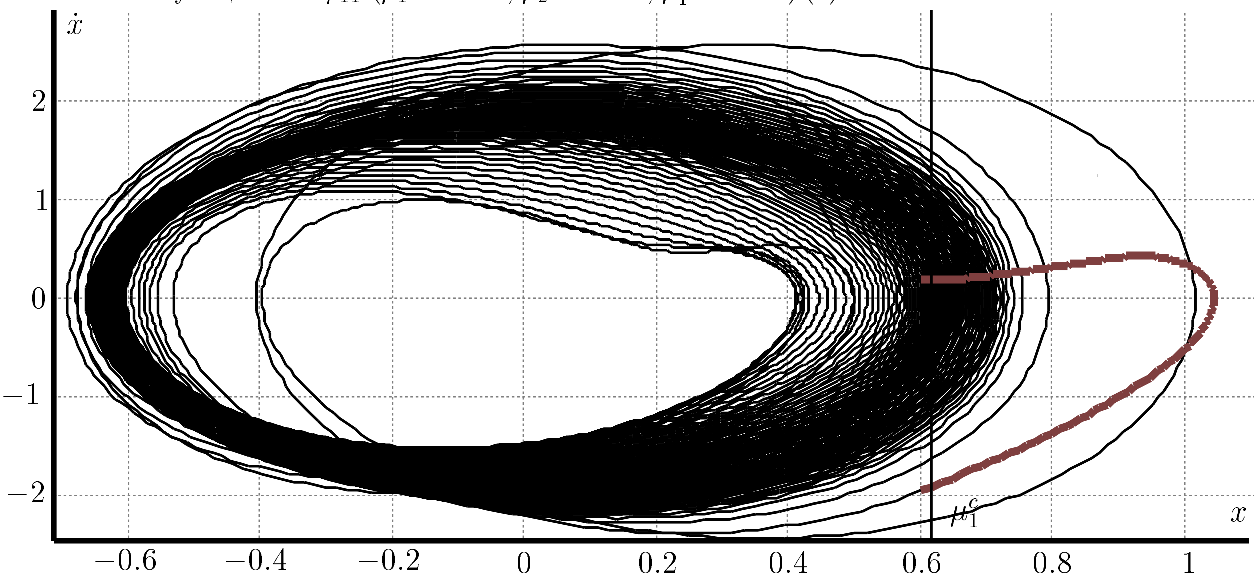

Рис. 3.25. Траектория решения ур. (1.1) ($\mu_1^c = 0.6336$, $T_1^c = 2.15$, $p_1 = 301$, $t_1^p = 647.15$).(4) Начальный сплайн: $(\{(t_i, x_i)\}|_1^3 = \{-2.15, 0.6; -0.992084, 0.902154; 0, 0.6\}$, $\ddot{x}_1 = 0$, $\ddot{x}_3 = -5.18534$).

П р и м е р 3.13. Рассмотрим уравнение (1.1), где $F(x,y) = 5x + 3y - 2y^3 + 3x^5 + y^5$. Имеем $f(x) = 8x - 2x^3 + 4x^5$, $F_2(x) = 3 - 6x^2 + 5x^4$, $x \in [0, a)$, $a = 1$, $\mathrm{M} = (5, 3) \in \partial E_0$, $k = 1/2$, $a_2^{(1)} = 0$, $a_2^{(2)} = -6$, $\chi(k) = 6(2 + k^2) > 0$.

Функция T на интервале $(0, a)$ имеет один критический аргумент $\mu = \mu_1^a$, и функция φ_{11} при $\mu = 0$ имеет критический нуль (см. рис. 3.26). Взяв запаздывание $\tau = 2.24$, получаем два значения параметра μ_1 и μ_2, которым отвечают τ-периодические решения уравнения (1.1). Устойчивым является решение, отвечающее параметру $\mu = \mu_1$, так как выполняются требования теоремы 3.8, условие $\chi(k) \neq 0$ и условия устойчивости (3.18): $\varphi_{11}(\mu_1) < 0$, $F_2(0)T'(\mu_1) > 0$. Согласно той же теореме τ-периодическое решение, отвечающее параметру $\mu = \mu_2$, неустойчиво, так как $F_2(0)T'(\mu_2) < 0$. На рисунке 3.27 изображена траектория решения уравнения (1.1). Локализован предельный цикл, соответствующий значению $\mu = \mu_1$.

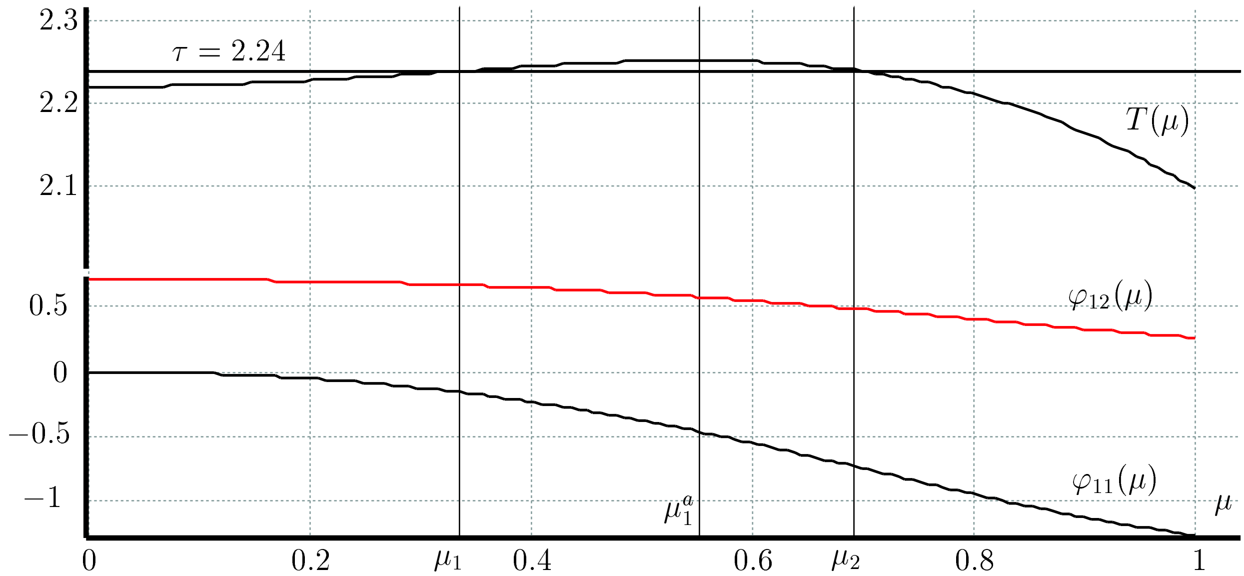

Рис. 3.26. Функции T, φ_{11} и φ_{12} ($\mu_1 = 0.332$, $\mu_2 = 0.7$; $\mu_1^a = 0.547$).(11)

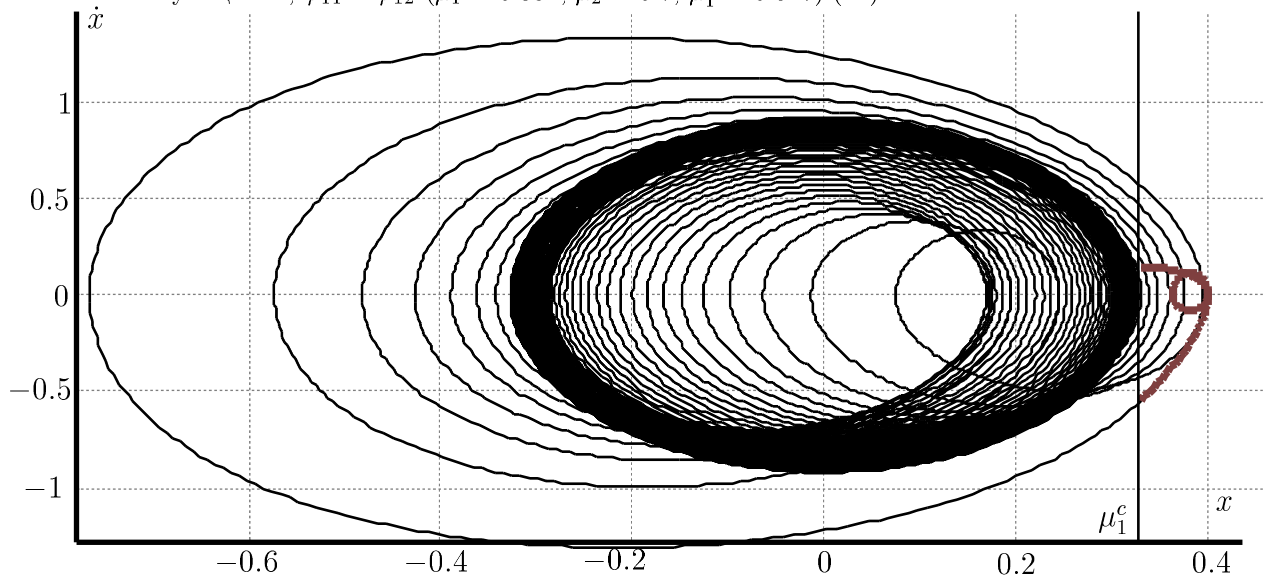

Рис. 3.27. Траектория решения ур. (1.1) ($\mu_1^c = 0.327$, $T_1^c = 2.24$, $p_1 = 201$, $t_1^p = 450.24$).(11)
Начальный сплайн: $(\{(t_i, x_i)\}|_1^4 = \{-2.24,\ 0.33;\ -1.5095,\ 0.400592;\ -0.642598,\ 0.369528;\ 0,\ 0.33\}$, $\ddot{x}_1 = 0$, $\ddot{x}_4 = -2.58378$).

Список литературы

[1] **Dolgii Yu.F., Zakharov A.V.** A delay effect upon periodic oscillations in a conservative system // Proceedings of the Steklov Inctitute of Mathematics, Suppl. 2, 2003, pp. 24–44.

[2] **Dormayer P.** The stability of special symmetric solutions of $\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1))$ with small amplitudes // Nonlinear Analysis, Methods and Applications, 1990, vol 14, N 8, pp. 701–715.

[3] **Долгий Ю.Ф., Николаев С.Г.** Устойчивость периодического решения нелинейного дифференциального уравнения с запаздыванием // Дифференц. уравнения, 2001. Т. 37, № 5. С. 592–600.

[4] **Эльсгольц Л.Э, Норкин С.Б.** Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. –М.: Наука, 1971. 296 с.

[5] **Шиманов С.Н.** К теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием времени // Прикл. матем. и механ., 1963. Т. 27, вып. 3. С. 450-458.

[6] **Малкин И.Г.** Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. –М.: ГИТТЛ, 1956. 492 с.

[7] **Долгий Ю.Ф., Шиманов С.Н.** Существование зоны устойчивости для одного уравнения с запаздыванием // Устойчивость и нелинейные колебания. –Свердловск: УрГУ, 1988. С. 11–18.

[8] **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. –М.: Мир, 1984. 421 с.