*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2017
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172*

*http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru*

УДК 517.9

Дифференциальные «пазлы» на решениях нелинейных уравнений. Новые решения нелинейных уравнений, представимые в классе полиномов

В. Ф. Зайцев[1,2], М. Д. Иофе[2]

Санкт-Петербургский государственный университет[1,2]

Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена[2]

e-mail: valentin_zaitsev@mail.ru e-mail: iofe@list.ru

Аннотация

Рассматриваются конечные системы функций, замкнутые на решениях некоторых подклассов обобщённо-однородных модельных дифференциальных уравнений. Получены новые решения для некоторых обобщённых уравнений Эмдена–Фаулера. Эти решения строятся из некоторого конечного набора полиномов, определяемого предложенным алгоритмом.

Ключевые слова: обобщённое уравнение Эмдена-Фаулера, общее решение, конечная система полиномов

Abstract

We consider the finite systems of functions. These functions are closed upon solutions of the subclasses of generalized homogeneous model differential equations. The new solutions of nonlinear equations, representable in the class of polynomials.

Keywords: generalized Emden-Fowler equation, general solution, finite system of polynomials

В последние десятилетия прошлого века возникли предпосылки качественного скачка в решении проблемы интегрирования ряда классов модельных обыкновенных дифференциальных уравнений (МОДУ) в замкнутом аналитическом виде (через квадратуры, специальные функции и "стандартные" решения нелинейных уравнений, не имеющих подвижных критических особых точек). Как следствие, появились справочники нового поколения, например, [1]. Одним из наиболее эффективных методов поиска новых разрешимых случаев выбранного класса уравнений является дискретно-групповой анализ [2–5].

Алгоритм поиска решений интегрируемых уравнений включает поиск дискретной группы преобразований (ДГП), допускаемой выбранным классом, определение исходных интегрируемых классическими методами элементов этого класса и "размножение" исходных элементов по найденной ДГП. Следует учесть два обстоятельства.

1. Доказательство максимальности ДГП на заданном классе представляет собой весьма сложную и неалгоритмичную задачу – даже для обобщённого уравнения Эмдена–Фаулера максимальность доказана лишь для некоторых конкретных классов преобразований.
2. Ниоткуда не следует, что для заданного класса найдены все исходные интегрируемые элементы, тем более что понятие "интегрируемое классическими методами" весьма размыто и не имеет чёткого определения.

ДГП, допускаемая некоторым выбранным классом, разбивает его на подклассы эквивалентности, состоящие из уравнений, связанных между собой известными преобразованиями. В процессе вычисления решений было замечено, что решения уравнений одного и того же подкласса выражаются через конечный набор элементов некоторого «пазла», при этом сами элементы связаны дополнительными соотношениями [6].

Рассмотрим обобщённое уравнение Эмдена–Фаулера

$$y'' = Ax^n y^m (y')^l, \quad \text{обозначаемое обычно тройкой параметров } (n, m, l). \qquad (1)$$

Очевидно, уравнение (1) – обобщённо–однородное, поэтому его общее решение в параметрической форме можно записать в виде

$$\begin{cases} x(\tau) = aC_1^{\alpha} f(\tau, C_2), \\ y(\tau) = bC_1^{\beta} g(\tau, C_2). \end{cases} \tag{2}$$

Очевидно, что для нахождения общего решения уравнения (1) достаточно доказать пропорциональность

$$y'' \sim x^n y^m (y')^l, \tag{3}$$

т. е.

$$\dot{f}\ddot{g} - \ddot{f}\dot{g} \sim f^n g^m (\dot{f})^{3-l} (\dot{g})^l, \tag{4}$$

где $(\dot{})$ – дифференцирование по τ.

Подставляя в (4) $h = \dot{g}/\dot{f}$, получаем

$$\dot{h} \sim f^n g^m (\dot{f})^{1-l} (\dot{g})^l. \tag{5}$$

Для некоторого (достаточно широкого) дискретного подкласса уравнений (1) функции f и g представимы степенями стандартных полиномов или произведением степеней стандартных полиномов (см. [1]). К настоящему времени известны следующие элементы «пазла» полиномов:

$$\begin{aligned} &P_1 = \tau, \\ &P_2 = \tau^2 - 1, \\ &P_3 = \tau^3 - 3\tau + C_2, \\ &P_4 = \tau^4 - 6\tau^2 + 4C_2\tau - 3, \\ &P_6 = \tau^6 - 15\tau^4 + 20C_2\tau^3 - 45\tau^2 + 12C_2\tau - 8C_2^2 + 27, \\ &P_9 = \tau^9 - \frac{108}{7}\tau^7 + 12C_2\tau^6 + 54\tau^5 - 108C_2\tau^4 + \\ &\qquad + 12(4C_2^2 + 9)\tau^3 - 108C_2\tau^2 + 81\tau + \frac{4}{7}(4C_2^2 - 27)C_2 \end{aligned} \tag{6}$$

(полином P_9 был найден в 2016 г. в решениях шести новых уравнений этого типа [7]). Знаки $\pm$, которые могут быть поставлены при полиномах чётной степени для обеспечения вещественности параметра A, мы без ограничения общности опускаем.

Все полиномы удовлетворяют закономерности

$$P_n' = nP_{n-1}, \tag{7}$$

(интересно, что полином P_8 является приводимым, так как $P_9' = 9P_4^2$); ей можно воспользоваться, чтобы однозначно достроить, например, полином P_5, который в решениях не встречается (он появляется только в промежуточных вычислениях).

Справедливы следующие тождества:

$$\begin{aligned} &2P_2'P_3 - P_2P_3' = P_4, && &&4P_1P_3 - 3P_2^2 = P_4,\\ &3P_3'P_4 - 2P_3P_4' = P_6, && &&9P_2P_4 - 8P_3^2 = P_6,\\ &5P_4'P_5 - 3P_4P_5' = 5P_2P_6, && \text{т. е.} &&4P_3P_5 - 3P_4^2 = P_2P_6,\\ &3P_4P_6' - P_4'P_6 = 2P_9, && &&9P_4P_5 - 2P_3P_6 = P_9,\\ &7P_4'P_9 - 3P_4P_9' = 7P_6^2, && &&4P_3P_9 - 27P_4^3 = P_6^2 \end{aligned} \tag{8}$$

(здесь снова возникает полином восьмого порядка P_2P_6, отличный от $P_4^2 \sim \sim P_9'$, и он тоже оказывается приводимым). Эти формулы отражают замкнутость производных некоторых произведений степеней стандартных полиномов на множестве этих полиномов. Приведём некоторые решения уравнений из этого подкласса.

Уравнение	$f(\tau)$	$g(\tau)$	$\dot{g}(\tau)/\dot{f}(\tau)$
$(-5/2, -1/2, 0)$	P_3^{-1}	$P_2^2P_3^{-1}$	P_4
$(1, -5/3, 0)$	P_4	$P_3^{3/2}$	$P_2P_3^{-1/2}$
$(1, -1/2, 7/5)$	$P_2P_3^{-1/2}$	P_4^2	$P_3^{5/2}$
$(-7/3, -5/3, 0)$	P_4^{-1}	$P_3^{3/2}P_4^{-1}$	$P_3^{-1/2}P_6$
$(1, -7/4, 7/5)$	$P_3^{-1/2}P_6$	$P_4^{4/3}$	$P_3^{5/2}P_4^{-5/3}$
$(-5/2, -1/2, 10/7)$	$P_3^{-1}P_4^{2/3}$	$P_3^{-1}P_6^2$	$P_4^{7/3}$
$(-11/7, -10/7, 1/2)$	P_9^{-1}	$P_4^{7/3}P_9^{-1}$	$P_4^{-2/3}P_6^2$
$(2, -11/4, 13/10)$	$P_4^{-1/3}P_6$	$P_9^{4/7}$	$P_4^{10/3}P_9^{-10/7}$
$(-10/3, -2/3, 18/11)$	$P_4^{-1}P_9^{3/7}$	$P_4^{-1}P_6^3$	$P_9^{11/7}$

Всего полученная «орбита полиномов» объединяет 32 обобщённых уравнения Эмдена–Фаулера, включая исходную тривиально разрешимую точку $(1, 0, 0)$, т. е. $y'' = x$; решение этого уравнения сразу же порождает полином P_3. Естественно, все уравнения, приводящиеся к уравнению Эмдена–Фаулера, имеют решения, составленные из элементов тех же «пазлов», в случае уравнений более высокого порядка «пазл» становится интегро-дифференциальным, но остаётся простым по структуре. Например, уравнение

$$y''' = Ay^{-1/2}(y')^{-4}(y'')^{11/7}$$

имеет решение

$$x(\tau) = aC_1^{55}\int P_3^{-3/2}P_4^{5/3}P_6\,d\tau + C_3, \qquad y(\tau) = bC_1^{54}P_3^{-1}P_6^2.$$

Точно так же другие решения исходных разрешимых точек порождают «пазлы», состоящие из других функций, но обладающие схожими свойствами: «орбита Эйлера», «орбита тангенсов», «орбита Вейерштрасса» и «орбита Бесселя» [5] объединяют бо́льшую часть известного к настоящему времени множества разрешимых случаев (117) обобщённых уравнения Эмдена–Фаулера.

Как известно, множество всевозможных полиномов образует дифференциальную алгебру [8], так что множество элементов «пазла» является **сужением дифференциальной алгебры полиномов на решениях обобщённого уравнения Эмдена–Фаулера**. Строение этого сужения весьма специфично – достаточно указать, что априорно определённая операция сложения почти не используется (сумма полиномов P_1 и P_2 появляется лишь в небольшом "отростке" «орбиты полиномов»), а дополнительные соотношения (3)–(8) в совокупности задают жёсткие ограничения на структуру. Аналогичные сужения возникают и на основе других «пазлов».

Специфичность и недостаточная изученность «пазлов» вряд ли позволит разработать в обозримом будущем сколько-нибудь универсальный метод решения МОДУ в заданном классе функций на основе полученных закономерностей. Однако некоторые перспективы применения подобного подхода можно отметить уже сейчас.

1. Общее решение уравнения находится без каких-либо преобразований самого уравнения и без операций интегрирования.

2. Это обстоятельство, в свою очередь, существенно облегчает построение алгоритмов для современных систем аналитических вычислений на ЭВМ (например, MAPLE), позволяя радикально уменьшить количество вариантов, которые придётся проверять.

3. Найденные новые расширения известных орбит позволят найти новые образующие ДГП класса (1) с возможным распространением их на другие орбиты, в первую очередь – «орбиту тангенсов» и «орбиту Вейерштрасса»,

так как для этих орбит найдено аналогичное «орбите полиномов» расширение [7].

Не следует также исключать возможность применения данного подхода к другим классам обобщённо-однородных МОДУ с бóльшим числом слагаемых в правой части, например,

$$y'' = Ax^n y^m (y')^l + Bx^{n-l+k} y^{m+l-k} (y')^k,$$

или

$$y'' = \sum_{i=1}^{N} A_i x^{n+l_i} y^{m-l_i} (y')^{l_i}.$$

Решения этих классов уравнений, очевидно, тоже представимы в виде (2).

Отметим, что конструирование решений дифференциальных уравнений в виде «пазла» вполне укладывается в концепцию симметрийной теории ОДУ: если в классической теории Ли и её обобщениях на нелокальные симметрии (теоремы о факторизации) **уравнения** строятся из инвариантов допускаемой группы или допускаемого оператора (это справедливо и для дискретно-инвариантных уравнений), то здесь **решения уравнений** строятся из элементов «пазла», и эти элементы оказываются инвариантными относительно (дискретных) групп эквивалентности на этом классе уравнений.

Пусть P_α, P_β, P_γ – полиномы по переменной τ степени α, β и γ соответственно (хотя в общем случае они могут быть любыми функциями). Очевидно, если

$$\begin{aligned} &f \sim P_\alpha^{a_1} P_\beta^{b_1} P_\gamma^{c_1}, \;\; g \sim P_\alpha^{a_2} P_\beta^{b_2} P_\gamma^{c_2}, \;\; h \sim P_\alpha^{a_3} P_\beta^{b_3} P_\gamma^{c_3}, \\ &\dot f \sim P_\alpha^{a_4} P_\beta^{b_4} P_\gamma^{c_4}, \;\; \dot g \sim P_\alpha^{a_5} P_\beta^{b_5} P_\gamma^{c_5}, \;\; \dot h \sim P_\alpha^{a_6} P_\beta^{b_6} P_\gamma^{c_6}, \end{aligned} \tag{9}$$

то можно подобрать такие n, m, l, чтобы соотношение (5) выполнялось.

Исходя из принятого предположения (9) для f легко вычислить

$$\dot f \sim P_\alpha^{a_1-1} P_\beta^{b_1-1} P_\gamma^{c_1-1} (a_1 \dot P_\alpha P_\beta P_\gamma + b_1 P_\alpha \dot P_\beta P_\gamma + c_1 P_\alpha P_\beta \dot P_\gamma).$$

С другой стороны из того же предположения $\dot f \sim P_\alpha^{a_4} P_\beta^{b_4} P_\gamma^{c_4}$, а значит

$$a_1 \dot P_\alpha P_\beta P_\gamma + b_1 P_\alpha \dot P_\beta P_\gamma + c_1 P_\alpha P_\beta \dot P_\gamma = P_\alpha^q P_\beta^r P_\gamma^s. \tag{10}$$

В левой части равенства (10) стоит полином степени $\alpha + \beta + \gamma - 1$, а значит и в правой должен стоять полином той же степени. Поэтому $\alpha + \beta + \gamma - 1 =$

$= q\alpha + r\beta + s\gamma$. Назовём это соотношение **разложением** $\alpha+\beta+\gamma-1$ по α, β и γ с коэффициентами q, r, s. Проделав все то же самое для g и h, получим ещё 2 разложения $\alpha+\beta+\gamma-1$ по α, β и γ с другими коэффициентами. Рассмотрим случай, когда все эти коэффициенты натуральные. Для этой цели была написана программа, с помощью которой для первой сотни были высчитаны все числа, у которых существует хотя бы 3 разложения. Их можно поделить на 3 группы. Первая состоит из чисел, у которых во всех соотношениях хотя бы один коэффициент (например, перед α) равен 0, вторая – содержащая хотя бы один полином 2-ой степени, третья – все оставшиеся. Рассмотрим вторую группу, в общем виде соотношения этой группы выглядят следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&0 * k + 0 * (k-1) + k * 2 = 2k,\\
&0 * k + 2 * (k-1) + 1 * 2 = 2k,\\
&2 * k + 0 * (k-1) + 0 * 2 = 2k,\\
&1 * k + 0 * (k-1) + \frac{k}{2} * 2 = 2k, \quad \text{если } k \text{ – чётное},\\
&0 * k + 1 * (k-1) + \frac{k+1}{2} * 2 = 2k, \quad \text{если } k \text{ – нечётное},
\end{aligned}
$$

где k – натуральное число, бóльшее чем 3. Тогда, возвращаясь к полиномам, получаем:

$$
\begin{aligned}
&a_1\dot{P}_kP_{k-1}P_2 + b_1P_k\dot{P}_{k-1}P_2 + c_1P_kP_{k-1}\dot{P}_2 = P_2^k,\\
&a_2\dot{P}_kP_{k-1}P_2 + b_2P_k\dot{P}_{k-1}P_2 + c_2P_kP_{k-1}\dot{P}_2 = P_2P_{k-1}^2,\\
&a_3\dot{P}_kP_{k-1}P_2 + b_3P_k\dot{P}_{k-1}P_2 + c_3P_kP_{k-1}\dot{P}_2 = P_k^2,\\
&a_4\dot{P}_kP_{k-1}P_2 + b_4P_k\dot{P}_{k-1}P_2 + c_4P_kP_{k-1}\dot{P}_2 = P_kP_2^{\frac{k}{2}}, \quad \text{если } k \text{ – чётное},\\
&a_4\dot{P}_kP_{k-1}P_2 + b_4P_k\dot{P}_{k-1}P_2 + c_4P_kP_{k-1}\dot{P}_2 = P_{k-1}P_2^{\frac{k+1}{2}}, \quad \text{если } k \text{ – нёчетное}.
\end{aligned}
$$

Для упрощения соотношений примем коэффициенты перед производными полиномов, которые есть в правой части, равными нулю (в известных ранее решениях в дифференциальных соотношениях [1] это было выполнено).

$$a_1\dot{P}_kP_{k-1} + b_1P_k\dot{P}_{k-1} = P_2^{k-1}, \tag{11}$$

$$a_2\dot{P}_k = P_{k-1}, \tag{12}$$

$$b_3\dot{P}_{k-1}P_2 + c_3P_{k-1}\dot{P}_2 = P_k, \tag{13}$$

$$b_4\dot{P}_{k-1} = P_2^{\frac{k-2}{2}}, \quad \text{если } k \text{ – чётное}, \tag{14}$$

$$a_4\dot{P}_k = P_2^{\frac{k-1}{2}}, \quad \text{если } k \text{ – нёчетное}. \tag{15}$$

Таким образом, если нам удастся найти такие полиномы, для которых выполены любые 3 соотношения из (11)–(15), то мы сможем построить решение. Для нахождения полиномов использовался следующий алгоритм. Полиномы в общем виде со старшими коэфициентами, равными единице, подставлялись в выбранные 3 дифференциальных соотношения. Получающаяся система уравнений на коэффициенты полиномов и коэффициенты дифференциальных соотношений решалась с помощью программы Maple, и решения проверялись на корректность. Естественно, отбрасывалсь те решения, в которых получившиеся полиномы оказывались функционально зависимы ($P_\alpha \sim P_\beta^b P_\gamma^c$). Приведём пример работы алгоритма для $k = 4$. В этом случае дифференциальные соотношения выглядят следующим образом:

$$a_1\dot{P}_4P_3 + b_1P_4\dot{P}_3 = P_2^3, \tag{16}$$

$$a_2\dot{P}_4 = P_3, \tag{17}$$

$$b_3\dot{P}_3P_2 + c_3P_3\dot{P}_2 = P_4, \tag{18}$$

$$b_4\dot{P}_3 = P_2. \tag{19}$$

Запишем полиномы P_4, P_3 и P_2 в общем виде со старшими коэффициентами, равными единице (здесь и далее полиномы P_k могут не совпадать с приведенными выше элементами «пазла», найденными для уже известных случаев интегрируемости обобщённого уравнения Эмдена–Фаулера).

$$\begin{aligned}
&P_4 = \tau^4 + q_1\tau^3 + q_2\tau^2 + q_3\tau + q_4,\\
&P_3 = \tau^3 + r_1\tau^2 + r_2\tau + r_3,\\
&P_2 = \tau^2 + s_1\tau + s_2.
\end{aligned}$$

Выберем 3 дифференциальных соотношения, например, (16)–(18) и подставим в них P_4, P_3 и P_2, тогда, приводя подобные слагаемые, имеем:

$$\begin{gathered}
(3b_1 + 4a_1 - 1)\tau^6 + (3a_1q_1 + 3b_1q_1 - 3s_1 + 4a_1r_1 + 2b_1r_1)\tau^5 +\\
+ (b_1r_2 + 3a_1q_1r_1 + 2b_1q_1r_1 - 3s_1^2 + 3b_1q_2 - 3s_2 + 4a_1r_2 + 2a_1q_2)\tau^4 +\\
+ (2b_1q_2r_1 + 3a_1q_1r_2 + 4a_1r_3 - 6s_1s_2 + b_1q_1r_2 + 3b_1q_3 + 2a_1q_2r_1 - s_1^3 + a_1q_3)\tau^3 +\\
+ (2a_1q_2r_2 + 3a_1r_3q_1 + a_1q_3r_1 + 3b_1q_4 + 2b_1q_3r_1 - 3s_1^2s_2 - 3s_2^2 + b_1q_2r_2)\tau^2 +\\
+ (2a_1r_3q_2 + a_1q_3r_2 - 3s_1s_2^2 + b_1q_3r_2 + 2b_1q_4r_1)\tau - s_2^3 + a_1r_3q_3 + b_1q_4r_2 = 0,
\end{gathered}$$

$$(4a_2 - 1)\tau^3 + (3a_2q_1 - r_1)\tau^2 + (2a_2q_2 - r_2)\tau + a_2q_3 - r_3 = 0,$$

$$(2c_3 + 3b - 1)\tau^4 + (c_3 s_1 + 2br_1 - q_1 + 2c_3 r_1 + 3bs_1)\tau^3 + \\ + (3bs_2 + 2c_3 r_2 + br_2 + 2bs_1 r_1 - q_2 + c_3 s_1 r_1)\tau^2 + \\ + (2c_3 r_3 - q_3 + c_3 s_1 r_2 + 2bs_2 r_1 + bs_1 r_2)\tau + bs_2 r_2 - q_4 + c_3 r_3 s_1 = 0.$$

Приравнивая коэффициенты перед всеми степенями τ к нулю, получаем систему уравнений, из которой находятся коэффициенты полиномов P_4, P_3 и P_2, а также коэффициенты дифференциальных соотношений a_1, b_1, a_2, b_3 и c_3. В данном случае эта система имеет несколько решений, из которых корректным является одно.

$$P_4 = \tau^4 + 4C_1\tau^3 + 10C_2\tau^2 + (20C_1C_2 - 8C_1^3)\tau + 4C_1^2C_2 + 5C_2^2 - \frac{16C_1^4}{5}, \quad (20)$$

$$P_3 = \tau^3 + 3C_1\tau^2 + 5C_2\tau + 5C_1C_2 - 2C_1^3, \quad (21)$$

$$P_2 = \tau^2 + 2C_1\tau - 5C_2 + 4C_1^2, \quad (22)$$

где C_1, C_2 – произвольные константы. Для этих полиномов выполнены следующие дифференциальные соотношения:

$$4\dot{P}_4P_3 - 5P_4\dot{P}_3 = P_2^3,$$
$$\dot{P}_4 = 4P_3,$$
$$4P_3\dot{P}_2 - \dot{P}_3P_2 = 5P_4,$$

а значит

$$\frac{dP_4^{4a}P_3^{-5a}}{d\tau} = aP_2^3P_4^{4a-1}P_3^{-5a-1}, \quad (23)$$

$$\frac{dP_4^c}{d\tau} = 4cP_3P_4^{c-1}, \quad (24)$$

$$\frac{dP_3^{-b}P_2^{4b}}{d\tau} = 5bP_4P_3^{-b-1}P_2^{4b-1}. \quad (25)$$

Выбрать f, g и h из выражений под производной в левой части (23)–(25) можно шестью способами, соответственно получим 6 различных решений. Величины a, b и c находятся из условия $h = \dot{g}/\dot{f}$, а подставляя f, g, h, $\dot{f}$, $\dot{g}$ и $\dot{h}$ в (5) находим n, m и l. Нетрудно проверить, что, например, для $f = P_3^{-b}P_2^{4b}$, $g = P_4^{4a}P_3^{-5a}$, $h = P_4^c$ получается, что $a = 1/5$, $b = 1$, $c = -6/5$, а $n = -3/4$, $m = -9/4$, $l = 7/6$. В конечном итоге для уравнения

$$y'' = Ax^{-3/4}y^{-9/4}(y')^{7/6}$$

находим общее решение

$$x(\tau) = aC_1^{25}P_2^4P_3^{-1}, \quad y(\tau) = bC_1P_3^{-1}P_4^{4/5}, \qquad A = -\frac{24\cdot 5^{1/3}}{25}a^{-1/12}b^{25/12};$$

здесь

$$P_2 = \tau^2 + 2C_2\tau + 4C_2^2, \tag{26}$$
$$P_3 = \tau^3 + 3C_2\tau^2 - 2C_2^3,$$
$$P_4 = \tau^4 + 4C_2\tau^3 - 8C_2^3\tau - \frac{16C_2^4}{5}.$$

Заметим, что полином P_3 в данном случае является приводимым:

$$P_3 = (\tau + C_2)(\tau^2 + 2C_2\tau - 2C_2^2) = (\tau + C_2)(P_2 - 6C_2^2),$$

и множество элементов «пазла» отличается от приведенного выше (6).

Аналогичным образом можно взять любую другую тройку из соотношений (16)–(19), но решение удаётся построить только для соотношений (17)–(19). Это будет одно из уже известных решений, хотя полиномы, получаемые таким способом, – более общего вида.

Рассмотрим другие значения k. Оказывается, что из соотношений (11)–(13) аналогичным образом всегда удаётся построить решение. Если принять $C_2 = 0$, то во всех этих случаях полином P_2 имеет вид (26), а параметры (показатели) полученного элемента исходного класса уравнений для одного из решений имеют вид $n = -\dfrac{k-1}{k}$, $m = -\dfrac{2k+1}{k}$, $l = \dfrac{k+3}{k+2}$; остальные элементы можно легко построить из соображений симметрии. Впрочем, все они располагаются на кривой

$$\left(n, -n-3, \frac{3n+4}{2n+3}\right). \tag{27}$$

Согласно [1], все уравнения, векторы параметров которых принадлежат этой кривой, интегрируются в замкнутом виде через присоединённые функции Лежандра, однако решения в справочнике не приводятся из-за их громоздкости и неудобства (вместо решений дана ссылка [4]). Поэтому решения, полученные для счётного множества элементов кривой (27), являются новыми, они соответствуют тем случаям, когда решение уравнения Лежандра представляет собой полином.

Полиномы, доставляющие решения счётного множества точек кривой

(27), имеют вид:

$$P_k(\tau) = \begin{cases} \operatorname{Re}\left\{-\dfrac{\left[\sqrt{3}C_1 + i(\tau + C_1)\right]^{k+1}}{\sqrt{3}(k+1)C_1}\right\}, & k = 2s, \\ \operatorname{Im}\left\{-\dfrac{\left[\sqrt{3}C_1 + i(\tau + C_1)\right]^{k+1}}{\sqrt{3}(k+1)C_1}\right\}, & k = 2s+1, \end{cases}$$

s – натуральное.

Рассмотрим третью группу соотношений. В ней есть 4 соотношения для полиномов P_3, P_4, P_6 и по 3 соотношения для полиномов P_4, P_6, P_9 и P_6, P_{10}, P_{15}. В общем виде эти соотношения для полиномов имеют вид

$$\begin{cases} a_1\dot{P}_3P_4P_6 + b_1P_3\dot{P}_4P_6 + c_1P_3P_4\dot{P}_6 = P_4^3, \\ a_2\dot{P}_3P_4P_6 + b_2P_3\dot{P}_4P_6 + c_2P_3P_4\dot{P}_6 = P_3^4, \\ a_3\dot{P}_3P_4P_6 + b_3P_3\dot{P}_4P_6 + c_3P_3P_4\dot{P}_6 = P_6^2, \\ a_4\dot{P}_3P_4P_6 + b_4P_3\dot{P}_4P_6 + c_4P_3P_4\dot{P}_6 = P_3^2P_6, \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} a_1\dot{P}_4P_6P_9 + b_1P_4\dot{P}_6P_9 + c_1P_4P_6\dot{P}_9 = P_6^3, \\ a_2\dot{P}_4P_6P_9 + b_2P_4\dot{P}_6P_9 + c_2P_4P_6\dot{P}_9 = P_4^3P_6, \\ a_3\dot{P}_4P_6P_9 + b_3P_4\dot{P}_6P_9 + c_3P_4P_6\dot{P}_9 = P_9^2, \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} a_1\dot{P}_6P_{10}P_{15} + b_1P_6\dot{P}_{10}P_{15} + c_1P_6P_{10}\dot{P}_{15} = P_{10}^3, \\ a_2\dot{P}_6P_{10}P_{15} + b_2P_6\dot{P}_{10}P_{15} + c_2P_6P_{10}\dot{P}_{15} = P_6^5, \\ a_3\dot{P}_6P_{10}P_{15} + b_3P_6\dot{P}_{10}P_{15} + c_3P_6P_{10}\dot{P}_{15} = P_{15}^2. \end{cases} \tag{26}$$

Известны решения из первого, третьего и четвёртого соотношений (24), а также из соотношений (25) [1, 3, 4]. Соотношения (26), по-видимому, позволяют найти новую дискретную образующую на классе обобщённых уравнений Эмдена–Фаулера, заданную касательным преобразованием. Однако способ, использованный для группы с полиномом P_2, для этих соотношений оказывается неэффективным, так как трудоёмкость решения получившейся системы уравнений превосходит возможности программы Maple.

Список литературы

[1] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

[2] Зайцев В. Ф. О дискретно-групповом анализе обыкновенных дифференциальных уравнений, ДАН СССР, **299**, No 3, 1988. – С. 542–545.

[3] Зайцев В. Ф., Флегонтов А. В. Дискретно-групповые методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Л.: ЛИИАН, 1991. – 240 с.

[4] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения. – М.: Наука, 1993.

[5] Зайцев В. Ф., Линчук Л. В., Флегонтов А. В. Дифференциальные уравнения (структурная теория), часть IV. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. – 120 с.

[6] Зайцев В. Ф., Флегонтов А. В. Конечные системы полиномиальных функций, замкнутые на некотором классе преобразований обобщённого уравнения Эмдена–Фаулера // Методы и средства информационных технологий в науке и производстве. – Л.: Наука, 1992. – С. 67–73.

[7] Зайцев В. Ф., Зайцев О. В. Об одном применении метода вложения // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы LXVIII международной конференции «Герценовские чтения – 2015» (Санкт-Петербург, 13–17 апреля 2015 г.). – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. – С. 30–33.

[8] Каплански И. Введение в дифференциальную алгебру. – М.: ИЛ, 1959.