ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N.4, 2019
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

стохастическое управление

Метод малого параметра для решения задачи об оптимальной стабилизации систем со случайной структурой и случайными скачками фазового вектора

Т.В. Завьялова

Email: tzava@yandex.ru

Аннотация

В работе рассматривается линейно-квадратическая задача оптимального управления для системы со случайной структурой. Параметры системы подвержены воздействию чисто разрывного марковского процесса с заданными переходными вероятностями. Предполагается, что в случайный момент времени изменяется структурное состояние системы и скачком изменяется его фазовый вектор. Ранее, В. Бухалевым были получены условия для нахождения оптимального управления в виде интегральных матричных уравнений. Эти уравнения являются громоздкими для практического применения. В данной работе рассматривается построение оптимального управления с помощью метода малого параметра, что позволяет получить управление в виде сходящегося ряда по степеням малого параметра.

Ключевые слова: системы со случайной структурой, оптимальное управление, марковский случайный процесс, скачки фазового вектора

Abstract

The paper considers a linear-quadratic optimal control problem for a system with a random structure. System parameters are exposed to a purely discontinuous Markov process with given transition probabilities. It is assumed that at a random time, structural state of the system changes and its phase vector changes abruptly. Earlier, the conditions for finding the optimal control in the form of integral matrix equations were obtained by V. Buhalev. But these equations are cumbersome for practical use. In this paper we consider the construction of optimal control using the small parameter method, which allows us to construct the control in the form of a convergent series in powers of a small parameter.

Keywords: random structure systems, optimal control, Markov random process, jumps of the phase vector

1 Введение

Изучение многих реальных процессов, происходящих в природе и технике, связано с рассмотрением дифференциальных уравнений, параметры которых случайные функции времени. Исследование вопросов устойчивости и управления такими системами заложено в работах Н.Н. Красовского [1], Р.З. Хасьминского [2], И.Я. Каца [3], В.М. Артемьева [4] и многих других исследователей. Особенностью стохастических систем является информация о структурном состоянии объекта в текущий момент времени. Например, информация о количестве массы в данный момент времени, о наличии или отсутствии тока в электрической цепи и так далее. В современной теории случайных процессов широкое распространение также получили модели, параметрами которых являются марковские процессы. Такая математическая модель управления наиболее точно отражает реальный процесс, поскольку марковский случайный процесс несёт информацию о режиме (или структуре) объекта в данный момент времени, а фазовый вектор описывает динамику движения объекта в данном режиме. Особенности, связанные с влиянием случайного марковского процесса на управляемую стохастическую систему изучены в работах [5], [6], [8], [14] и многих других исследователей. В отечественной литературе описанные системы называют системами со случайной структурой, а в западной литературе распространён термин «системы со скачками» (jump systems). В данной работе объектом исследования является линейная управляемая система со случайной структурой, в предположении, что в случайный момент времени скачкообразного изменения структуры системы фазовый вектор также будет изменяться скачком. Это предположение продиктовано практическими соображениями при описании математических моделей, подчиняющихся физическим или механическим законам. Скажем, если в механических системах изменение структуры связано со случайным скачкообразным изменением массы или геометрии системы, то корректная постановка задачи требует задания новых начальных условий, поскольку фазовый вектор оказался разрывным. Подобные проблемы возникают в виброударных, экономических и других сложных системах, связанных с частичным отказом элементов. Естественным кажется предположение о том, что координаты фазового вектора для продолжения траектории зависят от случайной величины. Изучение вопросов устойчивости таких систем со случайными скачками фазового вектора рассмотрены в работах [8], [9].

Развитие метода функций Ляпунова для стохастических систем позволило применить ряд методов, аналогичных для обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, с помощью производящего дифференциального оператора функции Ляпунова, вычисленного в силу системы со случайной структурой, можно исследовать вопросы устойчивости и оптимального управления, обеспечивающего вероятностную устойчивость. В работе [7] построено оптимальное управление для линейной системы со случайной структурой по принципу обратной связи. Соотношения для нахождения оптимального управления описываются системой интегро-дифференциальных уравнений и оказываются достаточно сложными для решения. Поэтому в данной работе предлагается применение метода малого параметра к построению оптимального управления. А именно, предполагается, что скачки фазового вектора зависят от малого параметра. Это конструктивное предположение позволяет решать задачу об оптимальной стабилизации, находить функцию Ляпунова и оптимальное управление в виде сходящихся рядов по степеням малого параметра. Результат этого исследования демонстрируется на простом физическом примере.

Полученные результаты являются продолжением работ автора [7], [8] и дополнением результатов исследования И.Я. Каца, опубликованных в работах [2], [10] для системы со случайной структурой, испытывающей воздействие простой марковской цепи и случайным условием скачка фазового вектора.

2 Постановка задачи

Рассмотрим динамический управляемый процесс, который описывается системой со случайной структурой:

$$dx = \left[A\big(y(t)\big)x + B\big(y(t)\big)u \right]dt + \sum_{\nu=1}^{l} \sigma_\nu\left(y(t)\right) x dw_\nu(t), \tag{1}$$

где $x \in R^{(n)} - n$-мерный вектор фазовых координат системы,
$u \in R^{(r)} - r$ - мерный вектор управления.
Матрицы-функции $A\big(y(t)\big)$, $B\big(y(t)\big)$, $\sigma_\nu\left(y(t)\right)$ определены и непрерывны на множестве возможных значений разрывного марковского процесса $y(t) \in [\eta_1, \eta_2]$.

Предполагается, что разрывный скалярный марковский процесс $y(t)$ описывает структурное состояние системы в каждый момент времени и известны его переходные вероятности:

$$P\left\{ y(t+\Delta t) \in (\beta, \beta+\Delta\beta) \middle| y(t) = \alpha \neq \beta \right\} = p\left(t, \alpha, \beta\right)\Delta\beta\Delta t + o(\Delta t),$$
$$P\left\{ y(\tau) \equiv \alpha, \quad t < \tau < t+\Delta t \middle| y(t) = \alpha \right\} = 1 - p\left(t, \alpha\right)\Delta t + o(\Delta t). \tag{2}$$

Здесь $P\{\bullet | \bullet\}$ - условная вероятность события, $o(\Delta t)$ – бесконечно малая величина более высокого порядка малости, чем Δt и $\alpha, \beta \in [\eta_1, \eta_2]$.
Функции $p\left(t, \alpha, \beta\right)$, $p\left(t, \alpha\right)$ считаются известными.
$w\left(t\right) = \left\{ w_1\left(t\right), \ldots, w_l(t) \right\}$ – стандартный l -мерный винеровский процесс с независимыми компонентами [13].

Пусть заданы детерминированные начальные условия

$$x(t_0) = x_0 \in R^{(n)}, \quad y(t_0) = y_0 \in Y, \quad t_0 \geq 0. \tag{3}$$

Тогда уравнения (1), марковский процесс (2) и начальные условия (3) определяют $(n+r)$-мерный марковский случайный процесс $\left\{ x\left(t\right), y(t) \right\}$ при любом выборе управления $u = u(t, x\left(t\right), y\left(t\right))$.

Будем предполагать, что в случайный момент времени $t = \tau$ происходит изменение структурного состояния $y\left(t\right)$ исходной системы (1).

Система (1) переходит из состояния $y(\tau-0)=\alpha\in Y$ в состояние $y(\tau)=\beta\neq\alpha\in Y$. В этом случае скачком изменяется фазовый вектор системы и координаты для продолжения этого процесса определяются условием:

$$x(\tau)=\left(K(\alpha,\beta)+\sum_{s=1}^{N}\xi_s Q_s\right)\cdot x(\tau-0). \qquad (4)$$

Здесь $x(\tau)=x(\tau+0)$ – вектор, непрерывный справа.

$K(\alpha,\beta)$ – матрицы размерности $n\times n$, зависящие от структурного состояния системы, Q_s - матрицы, размерности $n\times n$, ξ_s – независимые случайные величины, у которых $M\xi_s=0,\quad M\xi_s^2=1$.

Качество переходного процесса оцениваем с помощью квадратичного функционала:

$$J_u(x_0,y_0)=\int_0^\infty M[x'[t]C(y(t))x[t]+u'[t]D(y(t))u[t]\,|\,x_0,y_0]dt\,, \qquad (5)$$

где $C(y(t))\geq 0,\quad D(y(t))>0$ – симметричные, положительно определенные матрицы размерности $n\times n$ и $r\times r$ соответственно. Символом $x[t]$ обозначена траектория, соответствующая управлению $u[t]$. Вектор $x'[t]\in R^{(n)}$ – транспонированный.

Здесь и далее все реализации случайного марковского процесса $\{x(t),y(t)\}$ рассматриваем в области:

$$I=\left\{t\geq 0,\, x\in R^{(n)},\, y\in Y\right\}.$$

В классической постановке задачи об оптимальном управлении системы (1)-(5) требуется найти такое управляющее воздействие $u=u(t,x(t),y(t))$, удовлетворяющее условию $u(t,0,y(t))=0$, чтобы невозмущенное движение $x=0$ системы (1)-(4) было асимптотически устойчиво по вероятности при любых начальных условиях из области *I*. В дальнейших рассуждениях, говоря об устойчивости невозмущенного движения $x=0$, будем иметь в виду устойчивость множества $U=\{0,Y\}$, инвариантного для процесса $\{x(t),y(t)\}$ в том смысле, что

$$P\left\{\left\{x(t), y(t)\right\} \in U \left| x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0 \right.\right\} = 1 \quad \text{при} \quad \left\{x_0, y_0\right\} \in U .$$

Введем предварительные понятия и утверждения, справедливые для системы со случайной структурой (1)-(4).

Определение 1 *Невозмущенное движение* $x = 0$ *системы (1)-(4) будем называть экспоненциально устойчивым в среднем квадратичном, если при любых начальных условиях, взятых из области I, существуют такие постоянные* $B > 0, \lambda > 0$*, что при всех* $t \ge t_0$ *выполняется неравенство*

$$M[\|x(t)\|^2 \big| x_0, y_0] \le B\|x_0\|^2 e^{-\lambda(t-t_0)} .$$

Определение 2 *Невозмущенное движение* $x = 0$ *системы (1)-(4) будем называть асимптотически устойчивым по вероятности в целом, если для любого начального условия из ограниченной области* $\|x_0\| \le H_0$ *и чисел* $\gamma > 0, p > 0, q > 0$ *существует такая ограниченная область* $\|x\| \le H_1$ *и число* $T > 0$*, что*

$$P\left\{\left[\sup\|x(t)\| \,\big|\, t \ge t_0\right] < H_1 \big| x_0, y_0\right\} > 1 - p ,$$

$$P\left\{\left[\sup\|x(t)\| \,\big|\, t \ge t_0 + T\right] < \gamma \big| x_0, y_0\right\} > 1 - p - q .$$

Согласно известным понятиям второго метода функций Ляпунова, будем рассматривать скалярные функции $V(t, x, y)$, определенные и непрерывно дифференцируемые в области I по всем переменным. Стохастическим аналогом полной производной функции Ляпунова по времени в силу системы со случайной структурой является понятие усредненной производной, впервые введенное Н.Н. Красовским [1]. В последующих работах И.Я. Каца [2] и автора [8], [9] это понятие рассматривается для систем со случайной структурой и случайными скачками фазовых траекторий. Поскольку правая часть выражения усредненной производной определяется производящим дифференциальным оператором случайного марковского процесса $\left\{x(t), y(t)\right\}$, то общепринятым стало следующее определение [11], [12].

Определение 3 *Пусть* $V(t,x,y)$ *функция случайного марковского процесса* $\{x(t),y(t)\}$ *в* R^{n+r}. *Тогда производящим дифференциальным оператором L вдоль всех реализаций марковского процесса* $\{x(t),y(t)\}$ *называется выражение*

$$L\big(V(x,y,t)\big)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{M[V(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t),t+\Delta t]-V(x(t),y(t),t)\big|x(t),y(t)]}{\Delta t}$$

где $M[\cdot|\cdot]$ - *символ условного математического ожидания.*

Лемма *Для системы со случайной структурой (1), испытывающей воздействие чисто разрывного марковского процесса (2) и условием скачка фазового вектора (4), производящий дифференциальный оператор функции* $V(t,x,y)$ *в точке* $(s,x,y)\in I$ *имеет вид:*

$$L\big(V(x,y,s)\big)=\frac{\partial V}{\partial s}+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)' f(t,x,\alpha)+\frac{1}{2}tr\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\sigma\sigma'\right]+$$

$$+\int_{\eta_1}^{\eta_2}\big(V(s,K(\alpha,\beta)x,\beta\big)+V(s,\sum_{s=1}^{N}Q_s x,\beta)-V(s,x,\alpha))p(s,\alpha,\beta)d\beta.$$

Доказательство леммы, аналогичное как и в работе [7] для системы со случайной структурой и случайными скачками фазового вектора, зависящей от простой марковской цепи.

Развитие метода функций Ляпунова позволило перейти к задаче о построении оптимального управления системы со случайной структурой (1), (2) и случайным условием скачка фазового вектора (4), работающего по принципу обратной связи и обеспечивающего качество переходного процесса. Следующую теорему о построении оптимального управления для линейно-квадратичной задачи приводим без доказательства [5].

Теорема 1 *Пусть система матричных уравнений*

$$G(\alpha)A(\alpha)+A'(\alpha)G(\alpha)-G(\alpha)B(\alpha)D^{-1}(\alpha)G(\alpha)+\sum_{\nu=1}^{l}\sigma_\nu'(\alpha)G(\alpha)\sigma_\nu(\alpha)+$$

$$+C(\alpha)+\int_{\eta_1}^{\eta_2}[K'(\alpha,\beta)G(\beta)K(\alpha,\beta)+\sum_{s=1}^{n}Q_s'G(\beta)Q_s-G(\alpha)]p(\alpha,\beta)d\beta=0 \qquad (6)$$

имеет решение, состоящее из положительно определенных матриц $G(\alpha)$

квадратичной формы $V^0(x,\alpha) = x'G(\alpha)x$, *тогда управление*

$$u^0(x,\alpha) = -[D^{-1}(\alpha)B'(\alpha)G(\alpha)]x \tag{7}$$

доставляет решение задачи об оптимальной стабилизации системы (1), (2) с условием скачка (4) и критерием оптимальности (5), причем

$$\min_{u \in R^{(n)}} J_u(x_0,\alpha) = (x_0)'G(\alpha)x_0$$

Следствие *Если выполнены условия теоремы 1, то система (1-4), полученная при оптимальном управлении является экспоненциально устойчивой в среднем квадратичном.*

Будем использовать определения и некоторые подходы, опубликованные в работах [3]-[7].

Определение 4 *Управление* $u(t,x,y)$ *называется допустимым в системе (1), (2) с условием скачка фазовой траектории (4), если оно обеспечивает экспоненциальную устойчивость в среднем квадратичном при любых начальных условиях из области I.*

В общем случае решение интегральных уравнений (6) системы (1)-(5) является трудоемким процессом. Для нестационарных систем со случайной структурой необходимо решать матричные дифференциальные уравнения Риккати. Поэтому в линейно-квадратичных задачах оптимальной стабилизации ставится задача найти допустимое управление, то есть управление, которое обеспечивает экспоненциальную устойчивость системы со случайной структурой. Наличие скачков в данном случае не приводит к принципиально новым подходам, а лишь усложняет выкладки и анализ. Получение дальнейших результатов базируется в основном на исследованиях, полученных в работе [2] для систем с детерминированным условием скачка фазового вектора.

3 Решение задачи об оптимальной стабилизации методом малого параметра

Метод малого параметра заключается в решении задачи оптимального управления для системы со случайной структурой, у которой скачки фазового вектора зависят от малого параметра. Это способ построения оптимального управления продиктован желанием решить более простую задачу, чем уравнения (6).

В данном случае будем предполагать, что скачки фазового вектора $x(t)$ малы. То есть в области *I* параметры скачка фазового вектора (4) зависят от малого параметра μ:

$$K(\alpha,\beta)=E+\mu\tilde{K}(\alpha,\beta),\quad Q_s=\mu\tilde{Q}_s, \tag{8}$$

где μ – малый параметр, E – единичная матрица.

Квадратичную функцию Ляпунова, зависящую от параметров чисто разрывного марковского процесса (2), будем рассматривать в виде степенного ряда по степеням μ:

$$v^0(x,\alpha)=\sum_{r=0}^{\infty}\mu^r V_r(x,\alpha)=x'\left(\sum_{r=0}^{\infty}\mu^r G^{(r)}(\alpha)\right)x\,. \tag{9}$$

Следовательно, оптимальное управление из соотношений (7) будет иметь вид:

$$u^0(x,\alpha)=-[D^{-1}(\alpha)B'(\alpha)\left(\sum_{r=0}^{\infty}\mu^r G^{(r)}(\alpha)\right)]x\,. \tag{10}$$

Следуя классическому методу малого параметра для динамических систем, подставим ряды (9) и (10) в уравнения (6).

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим:

$$G^{(0)}(\alpha)A(\alpha)+A'(\alpha)G^{(0)}(\alpha)-G^{(0)}(\alpha)B(\alpha)D^{-1}(\alpha)G^{(0)}(\alpha)+\sum_{\nu=1}^{l}\sigma'_\nu(\alpha)G^{(0)}(\alpha)\sigma_\nu(\alpha)+$$

$$+C(\alpha)+\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left(G^{(0)}(\beta)-G^{(0)}(\alpha)\right)p(\alpha,\beta)d\beta=0 \tag{11}$$

....

$$G^{(r)}(\alpha)\tilde{A}(\alpha)+\tilde{A}'(\alpha)G^{(r)}(\alpha)+\sum_{\nu=1}^{l}\sigma'_\nu(\alpha)G^{(r)}(\alpha)\sigma_\nu(\alpha)+$$

$$+\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left(G^{(r)}(\beta)-G^{(r)}(\alpha)\right)p(\alpha,\beta)d\beta=\Pi^{(r)}(\alpha) \tag{12}$$

Здесь введены обозначения

$$\tilde{A}(\alpha) = A(\alpha) - B(\alpha)D^{-1}(\alpha)B'(\alpha)G^{(0)}(\alpha),$$

$$\Pi^{(r)}(\alpha) = \sum_{s=1}^{r-1} G^{(s)}(\alpha)B(\alpha)D^{-1}(\alpha)B'(\alpha)G^{(r-s)}(\alpha) -$$

$$-\int_{\eta_1}^{\eta_2} [K'(\alpha,\beta)G^{(r-1)}(\beta) + G^{(r-1)}(\beta)K(\alpha,\beta) + K'(\alpha,\beta)G^{(r-2)}(\beta)K(\alpha,\beta) +$$

$$+\sum_{s=1}^{n} Q_s' G^{(r-2)}(\beta)Q_s]p(\alpha,\beta)d\beta$$

Справедлива теорема.

Теорема 2 *Пусть система (11) имеет единственное положительно определенное решение* $G^0(\alpha)$*, а параметры скачков фазового вектора малы по условию (8). Тогда линейно-квадратичная задача оптимальной стабилизации (1)-(4) имеет единственное решение, представимое в виде сходящихся рядов (9), (10).*

Доказательство. Предположим, что система (11) имеет единственное положительное решение в виде матриц $G^0(\alpha)$.

Полученные соотношения (11), (12) соответствуют уравнениям (6), без скачков. То есть случаю непрерывных фазовых траекторий $K(\alpha,\beta) = E, \quad Q_s = 0$ в условии (4).

Согласно теореме 1 задача об оптимальной стабилизации для системы (1) с непрерывными фазовыми траекториями и чисто разрывным марковским процессом (2) разрешима. Причем, функция Ляпунова для такой задачи будет иметь вид:

$$V^0(x,\alpha) = x'G^{(0)}(\alpha)x$$

и управляющее воздействие

$$u^0(x,\alpha) = -[D^{-1}(\alpha)B'(\alpha)G^{(0)}(\alpha)]x\,.$$

Далее покажем, что решение задачи об оптимальной стабилизации системы (1)-(4) может быть получено в виде рядов (9), (10) для которых соотношения (11) являются первыми членами.

Рассмотрим соотношения (12). Заметим, что при каждом фиксированном натуральном $r \geq 1$ соотношение (12) преобразуется к виду:

$$L(v_r) = x'\Pi^{(r)}(\alpha)x \tag{13}$$

где в левой части этого равенства находится производящий дифференциальный оператор квадратичной формы

$$V^{(r)}(x,y) = x'G^{(r)}(y)x,$$

вычисленный в точке $M(t,x,\alpha)$ в силу системы со случайной структурой

$$dx = \tilde{A}(y(t))xdt + \sum_{\nu=1}^{l}\sigma_\nu(y(t))xdw_\nu(t) \tag{14}$$

с непрерывными фазовыми траекториями.

Поскольку линейная система (14) экспоненциально устойчива в среднем квадратичном, так как для нее существует оптимальное управление, то уравнения (12) будут иметь единственное решение. Итак, из уравнений (12) можно последовательно определить все положительные матрицы $G^{(r)}(\alpha)$.

Теперь докажем, что имеет место сходимость рядов (9), (10).
Для этого сначала получим оценки рядов, пользуясь методом мажорантных рядов. При $r \geq 1$ выполняется

$$N_r \leq c\left(N_{r-1} + N_{r-2} + \sum_{s=1}^{r-1}N_sN_{r-s}\right), \tag{15}$$

где $N_r = \max\limits_{\alpha\in Y}\left\|G^{(r)}(\alpha)\right\|$.

С помощью оценки (15) можно доказать сходимость рядов.
Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$k^2 + (a+\mu+\mu^2)k + b = 0 \tag{16}$$

Параметры a и b подберем так, чтобы разложение в ряд одного из корней было мажорантным рядом для наших решений (9), (10)

$$k_{1,2} = \frac{-(a+\mu+\mu^2) \pm \sqrt{(a+\mu+\mu^2)^2 - 4b}}{2} = \sum_{r=0}^{\infty}\mu^2 k_r\,.$$

Подставим разложения в квадратное уравнение (16) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях. Получим следующие выражения неопределенных параметров

$$k_0 = N_0 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

$$k_r = -\frac{1}{a + 2k_0}\left(\sum_{s=1}^{r-1} k_s k_{r-s} + k_{s-1} + k_{s-2}\right)$$

где k_0 находим из уравнения $k_0^2 + ak_0 + b = 0$.

Сравнивая оценку (15) и полученные выражения делаем вывод о том, что ряд

$$k_0 + \mu k_1 + \mu^2 k_2 + \dots$$

будет мажорантным для исследуемых рядов (9), (10), если обозначить

$$c = -\frac{1}{a + 2k_0} > 0, \quad k_0 = N_0 > 0.$$

Тогда значения параметров в уравнении (15) надо принять

$$a = -\left(\frac{1}{c} + 2N_0\right) < 0, \quad b = \frac{N_0}{c} + N_0^2 > 0 \ .$$

Зная значения a и b в уравнении (15) находим, так что мажорантным рядом для (9) является разложение того из корней, значение которого определяется нулевым коэффициентом:

$$k_0 = N_0 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} > 0.$$

Тогда сходимость ряда следует из неравенства

$$\left\| \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r G^{(r)}(\alpha) \right\| \le \sum_{r=0}^{\infty} N_r \mu^r \ .$$

Что и требовалось доказать.

В качестве иллюстрации применения метода малого параметра для систем со случайной структурой, рассмотрим следующий пример.

Пример. Рассмотрим задачу об оптимальной стабилизации скорости движения материальной точки в случайной среде. Смоделируем динамический процесс, предполагая, что в случайный момент времени происходит мгновенное присоединение или отбрасывание случайной массы.

Пусть x – это отклонение скорости материальной точки от номинального значения.

Тогда на интервалах постоянства массы $m(t)$ уравнение движения имеет вид:

$$m(t)\dot{x} = -k(t) \cdot x + bu, \tag{17}$$

с заданными детерминированными начальными условиями $x(0) = x_0, \quad m(0) = m_0$. Где $m(t)$ – масса точки, зависящая от случайного момента времени.

Будем предполагать, что $m(t)$ чисто разрывный марковский процесс с заданными вероятностями перехода:

$$P\left\{m(t+\Delta t) \in (\beta, \beta + \Delta\beta) \middle| m(t) = \alpha \neq \beta\right\} = p\left(t, \alpha, \beta\right)\Delta\beta\Delta t + o(\Delta t),$$
$$P\left\{m(\tau) \equiv \alpha, \quad t < \tau < t + \Delta t \middle| m(t) = \alpha\right\} = 1 - p\left(t, \alpha\right)\Delta t + o(\Delta t).$$

Функции $p(t,\alpha,\beta), \quad p(t,\alpha)$ - известны.

Случайную среду определим коэффициентом сопротивления:

$$k(t) = k_0 + \sigma\dot{w}(t), \tag{18}$$

где $k_0, \quad \sigma$ – заданные постоянные величины, $w(t)$ – стандартный винеровский процесс, не зависящий от реализаций разрывного марковского процесса.

Пусть в случайный момент времени $t = \tau$ происходит мгновенное случайное изменение массы, от значения $m(t) = \alpha$ к значению $m(t) = \beta$. Причем, если $\alpha < \beta$, то происходит присоединение кусочка массой $(\beta - \alpha)$. Если $\alpha > \beta$, то происходит отбрасывание величины $(\alpha - \beta)$. Отброшенная масса имеет нулевую скорость. При сделанных предположениях, скорость движения точки будет изменяться скачкообразно по закону:

$$\alpha x(\tau - 0) = \beta x(\tau + 0). \tag{19}$$

Соотношение (19) вытекает из теоремы об изменении количества движения и определяет разрывный характер скорости движения точки. Сохраняя обозначения, принятые в теоретической постановке задачи, в (19) $K(\alpha,\beta) = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

Предположим, что управление $u = u(x(t), m(t))$ должно обеспечивать экспоненциальную устойчивость в среднем квадратичном системы (17), (18) и минимизировать функционал:

$$J_u(x_0, m_0) = \int_0^\infty M[x^2(t) + u^2(t) | x_0, m_0] dt .$$

Подставим условие (18) в исходное уравнение (17), получим:

$$m(t)\,\dot{x}(t) = -(k_0 + \sigma \cdot \dot{w}(t))x(t) + b \cdot u . \tag{20}$$

Введем обозначения

$$-k_0 m^{-1}(t) = a(m(t)), \quad bm^{-1}(t) = b(m(t)), \quad -\sigma m^{-1}(t) = \sigma(m(t)) .$$

Тогда уравнение (20) будет иметь вид:

$$dx(t) = \left(a(m(t))x + b(m(t))u\right)dt + \sigma(m(t))xdw(t) , \tag{21}$$

Это уравнение необходимо рассматривать с условием скачка (19).

Согласно доказанной теореме, рассмотрим задачу стабилизации уравнения (21) при условии, что параметры скачка в условии (19) малы, то есть

$$K(\alpha, \beta) = 1 + \mu \tilde{K}(\alpha, \beta) = 1 + \mu \cdot \frac{\alpha}{\beta}$$

Представим решение $u^0(x, \alpha)$ в виде ряда (10), ограничившись первыми двумя его членами:

$$u(x, \alpha) = -b \cdot (g^0(\alpha) + g^1(\alpha) \cdot \mu)x .$$

Здесь $g^0(\alpha)$, $g^1(\alpha)$ - неизвестные величины. Подставляя в (11) все параметры нашей системы, получим уравнения для их определения:

$$2ag^0(\alpha) - (g^0(\alpha))^2 b^2 + g^0(\alpha)\sigma^2 + 1 + \int_{\pi_1}^{\pi_2} (g^0(\beta) - g^0(\alpha))\, p(\alpha, \beta) d\beta = 0 , \tag{22}$$

$$2ag^1(\alpha)-g^1(\alpha)(2b^2g^0(\alpha)-\sigma^2)+\int_{\pi_1}^{\pi_2}\left(g^1(\beta)-g^1(\alpha)+2\frac{\alpha}{\beta}\cdot g^0(\alpha)\right)p(\alpha,\beta)d\beta=0. \tag{23}$$

Для упрощения выкладок, принято, что случайный марковский процесс однородный, то есть $p(t,\alpha,\beta)=p(\alpha,\beta), \quad p(t,\alpha)=p(\alpha)$.

Согласно теореме 2, из полученных соотношений найдем условия, при которых существует единственное положительное решение $g^0(\alpha)>0$, а скачки малы. Запишем уравнение (22) для точки (x,β):

$$(g^0(\beta))^2b^2-(2a+\sigma^2)g^0(\beta)-1-\int_{\pi_1}^{\pi_2}(g^0(\beta)-g^0(\alpha))\,p(\alpha,\beta)d\beta=0.$$

Решая квадратное уравнение (22), найдем единственные значения для неизвестных

$$g^0(\alpha)=g^0(\beta)=\frac{2a+\sigma^2}{2b^2}, \tag{24}$$

справедливые при условии

$$\left|2a+\sigma^2\right|\ge 2\cdot|b|. \tag{25}$$

Перепишем уравнение (23) в виде:

$$2ag^1(\alpha)-g^1(\alpha)(2b^2\cdot\frac{2a+\sigma^2}{2b^2}-\sigma^2)+\int_{\pi_1}^{\pi_2}\left(g^1(\beta)-g^1(\alpha)+\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{2a+\sigma^2}{b^2}\right)p(\alpha,\beta)d\beta=0,$$

А также в точке (x,β):

$$2ag^1(\beta)-g^1(\beta)(2b^2\cdot\frac{2a+\sigma^2}{2b^2}-\sigma^2)+\int_{\pi_1}^{\pi_2}\left(g^1(\alpha)-g^1(\beta)-1+\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{2a+\sigma^2}{b^2}\right)p(\alpha,\beta)d\beta=0$$

После несложных преобразований найдем

$$g^1(\alpha)=\left(\int_{\pi_1}^{\pi_2}\left(g^1(\beta)+\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{2a+\sigma^2}{b^2}-1\right)p(\alpha,\beta)d\beta\right):\left(\int_{\pi_1}^{\pi_2}p(\alpha,\beta)d\beta\right) \tag{26}$$

$$g^1(\beta)=\left(\int_{\pi_1}^{\pi_2}\left(g^1(\alpha)+\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{2a+\sigma^2}{b^2}\right)p(\alpha,\beta)d\beta\right):\left(\int_{\pi_1}^{\pi_2}p(\alpha,\beta)d\beta\right)$$

Поскольку плотность скачков отлична от нуля $\int\limits_{\pi_1}^{\pi_2} p(\alpha,\beta)d\beta \neq 0$, то неизвестные параметры $g^1(\alpha)$ и $g^1(\beta)$ определяются единственным образом из соотношений (26). Другими словами, зная вероятностные характеристики разрывного марковского процесса и его скалярные значения, можно построить оптимальное управление методом малого параметра. Коэффициенты управления последовательно находятся из условий (24)-(26).

Для примера построения оптимального управления в случае присоединения случайного кусочка массы, примем следующие значения параметров:
$a = 0,5, \quad \sigma = b = 1, \quad \pi_1 = 0,1, \quad \pi_2 = 0,5, \alpha = 0,1, \beta = 0,2$.

Тогда, оптимальное управление с точностью до μ^2 имеет вид:

$$u(x,\alpha) = -1\cdot(g^0 + \mu g^1)x = -(1+\mu\cdot 1,24)x$$
$$u(x,\beta) = -1\cdot(g^0 + \mu g^1)x = -(1+\mu\cdot 0,74)x$$

На рисунке 1 смоделирован случайный процесс, соответствующий фиксированным параметрам на каждом интервале времени. В случайный момент времени присоединяется кусочек массы и, соответственно, меняется управляющее воздействие. Рассмотрено три случайных момента времени случайного изменения массы.

Для численного моделирования решения системы (21) с условием скачка (19) использован метод Г.Н. Мильштейна, описанный в работе [14]. На графике смоделированы три случайных скачка в моменты времени $t = \tau_1, \quad t = \tau_2, t = \tau_3$ на интервале [0; 1].

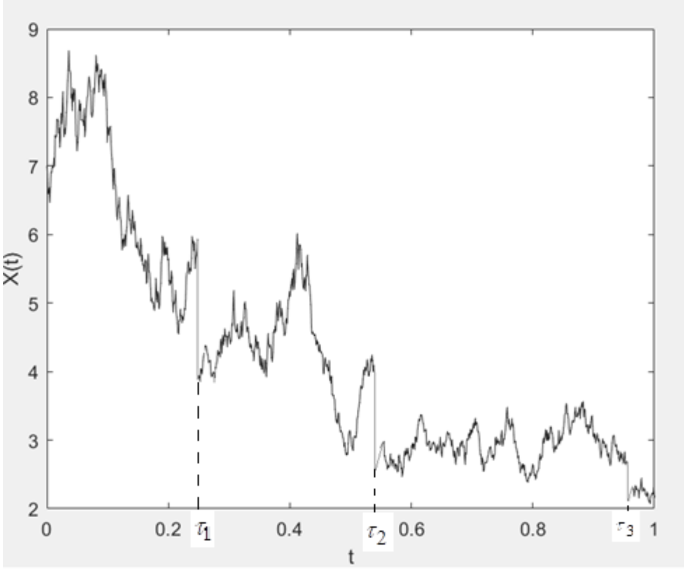

Рис. 1 Стохастическая траектория при начальном условии $x(0)=6,6$ и значениях параметров системы $a=0,5, \quad \sigma=1$.

Отметим, что исходная модель движения точки в случайной среде со случайными скачками массы, является неустойчивой при отсутствии управляющего воздействия. Пользуясь методом малого параметра, мы показали, что можно построить оптимальное управление для уравнения со случайно изменяющейся структурой, решая квадратные и линейные уравнения.

Список литературы

[1] Красовский, Н.Н. Об одном свойстве линейной устойчивой системы, вполне управляемой по случайному воздействию. Дифференциальные уравнения. 1965, Т.1. № 2

[2] Кац, И.Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. Екатеринбург, 1998. – 222 с.

[3] Хасьминский, Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. -370 с.

[4] Артемьев, В.М. Теория динамических систем со случайными изменениями структуры. – Минск: Вышэйшая школа. 1979. – 246 с.

[5] Borisov, A. V., Stefanovich, A.I. Optimal State Filtering of Controllable Systems with Random Structure.// Journal of Computer and Systems Sciences International, 2007, Vol. 46, No. 3, pp. 348–358.

[6] Бухалёв, В.А. Распознавание, оценивание и управление в системах со случайной скачкообразной структурой. М.: Наука, 1996. 287 с.

[7] Zavyalova, T.V. The optimal stabilization problem for rotation angle velocity of the robot-manipulator //Mathematical Modeling and Information Technologies. Proceedings of 3rd Russian Conference "Mathematical Modeling and Information Technologies", Vol. 1825, 2016. p. 123-128.

[8] Завьялова, Т.В. Условия стабилизации линейных стохастических систем со структурными изменениями и случайными разрывами фазовых траекторий. //Сборник трудов 3-ей Международной научно-технической конференции "Кибернетика и технологии 21 века". Воронеж. – 2002.– С.11–21.

[9] Завьялова, Т.В., Кац, И.Я., Тимофеева, Г.А. Об устойчивости движения стохастических систем со случайным условием скачка фазовой траектории. //Автоматика и телемеханика.– М. –2002.– №7 С.33-43

[10] Katz I.Ya. Optymal stability of the stochastic system with discontinuous trajectories // IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics. Volume 8. The Lyapunov functions method and applications. 1990. P. 219-223.

[11] Пугачев, В.С., Синицын, И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука, 2-е изд., 1990. -632 с.

[12] Оксендаль, Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введению в теорию и приложения. М.: Мир; АСТ, 2003. — 408 с.

[13] Миллер, Б.М., Панков, А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.

[14] Кузнецов, Д.Ф. Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов.-СПб: Наука, 1999.459 с.

[15] Пакшин, П. В. Стабилизация нелинейных диффузионных процессов Ито с марковскими переключениями. //Автоматика и телемеханика, 2011, № 2, с. 159–166.