

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 4, 2019

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>

e-mail: jodiff@mail.ru

Прикладные задачи

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПИЛОТИРУЕМЫХ СИСТЕМАХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Ю. С. Зайцева

Университет ИТМО, С.-Петербург

e-mail: juliazaytsev@gmail.com

Л. С. Чечурин

Технологический университет Лаппенранты, Финляндия

e-mail: leonid.chechurin@lut.fi

Посвящается светлой памяти С. Л. Чечурина

Аннотация

В статье рассматриваются колебательные режимы неавтономной системы управления полетом. Исследуется явление раскачки самолета летчиком при наличии в системе нелинейностей типа "насыщение" и люфт, в условиях активного управления и существенной величины временного запаздывания. Устанавливаются условия возникновения автоколебаний, с помощью метода гармонической стационаризации исследуется робастность вынужденных колебаний в первом гармоническом приближении на классе амплитуд и частот задающего воздействия.

Ключевые слова: нелинейная система, устойчивость, пилотирование, самолет, беспилотный, частотный анализ

Abstract

In the paper the oscillatory modes of a non-autonomous flight control system are considered. The phenomenon of pilot induced oscillations in the presence of non-linearities such as "saturation" and backlash in the system is

studied under conditions of active control and a significant value of the time delay. The conditions for the occurrence of self-oscillations are established, using the harmonic stationary method, the robustness of forced oscillations in the first harmonic approximation in the class of amplitudes and frequencies of the reference signal is studied.

Key words: nonlinear system, stability, pilot control, aircraft, unmanned, frequency analysis

1 Введение

Явление раскачки самолета летчиком (РСЛ) характеризуется внезапными непреднамеренными колебаниями ЛА по продольной и/или поперечной оси быстро нарастающей амплитуды. Возникновение РСЛ связывают с наличием существенно нелинейной динамики летательного аппарата (ЛА) и внедрением в конструкцию самолета электродистанционной системы управления полетом (ЭДСУ) [1–15]. По прошествии уже более 50 лет с начала применения ЭДСУ, в авиации до сих пор происходят инциденты, относящиеся к категории РСЛ. По данным аналитического ресурса *Skybrary* [16] за последние 10 лет произошло несколько инцидентов: в 2010 году *Bombardier Challenger 300* ночью над Москвой при наборе высоты резко отклонился по тангажу по причине непонимания пилотом сигналов о неисправности триммера стабилизатора автопилота, которые, как выяснилось, были без причины или временными. В 2014 году в Канаде при посадке на ВПП пилот *Airbus A330* неправильно определил осевую линию из-за внезапного изменения скорости ветра и ухудшения визуального ориентира.

В последнее время стали широко применяться в различных областях человеческой деятельности беспилотные летательные аппараты (БПЛА). БПЛА может работать как в автономном режиме, так и в дистанционном с участием человека-оператора. Иногда управление смешанное. В таком случае, можно предположить, а в некоторых работах уже есть исследования о том, что все вышеперечисленные проблемы управления в большой авиации в той или иной степени присутствуют в БПЛА [17, 18]. Таким образом, проблема безопасности полетов становится актуальной и для этой области авиации.

Запускающие РСЛ события как правило возникают при необычных условиях полета, например, во время требовательной задачи пилотирова-

ния, при внезапных изменениях погодных условий или переходных режимах управления [9, 11, 14, 15, 19]. Система управления полетом (СУП) часто имеет самостоятельные функции смягчения последствий порывов ветра, управления нагрузками во время маневров ЛА, управление рабочей точкой самолета и повышение устойчивости. СУП использует те же органы управления, что и пилот, и поэтому конкурирует с действиями пилота. Таким образом, СУП может лишить или прервать соединение пилота с органами управления, что ведет к ограничениям условий управления, которые проявляются в виде ограничения скорости привода и угла рулей управления. Наличие этих ограничений не только снижает качество управления, но и может привести к возникновению нелинейных колебаний ЛА.

Как известно, реальные системы с электро- или гидроприводом содержат нелинейности типа «насыщение», люфт, сухое трение и зону нечувствительности и оказывают влияние на поведение системы в статике и динамике. Для исследования нелинейных систем применяются методы фазового пространства [20, 21], гармонической линеаризации [22–24], абсолютной устойчивости [25, 26] и компьютерное моделирование. Исследование открытых Пуанкаре предельных циклов было продолжено А. А. Андроновым применительно к технике [27], А.В. Якубовичем [28]. Теория колебаний продолжила свое развитие в направлении определения границ устойчивости и методов анализа скрытых колебаний в прикладных задачах [29, 30]. Эффекты от влияния нелинейности типа насыщения исследованы в различных системах [31, 32], в том числе как ограничение скорости привода в СУП [33–36], где часто указывается на снижение запаса устойчивости по фазе и ограничение форсирующих сигналов в корректирующих фильтрах. Задачи ориентации космических ЛА с ограничением в тяговых усилиях двигательной установки и оптимизации процесса управления рассматриваются в [37–39]. В работе [31] показано, что нелинейность типа «насыщение» становится причиной автоколебаний, если в системе присутствует значительное запаздывание по времени, и амплитудно-фазовая частотная характеристика пересекает отрицательную вещественную ось левее критической точки несколько раз. В работе [40] подробно исследованы ограничение угла и скорости привода органа управления ЛА методом гармонического баланса на примере модели самолета X-15, а в [41] авторы дополнили условие устойчивости квадратичной функцией Ляпунова для гарантии асимптотической устойчивости. Сухое трение в статике создает зону нечувствительности, а в динамике действует как демпфер [42, 43]. Люфт в механических частях конструкции способствует возникновению

автоколебаний [44, 45], а сухое трение оказывает стабилизирующее действие [43, 46]. В работе [47] авторы строят область глобальной асимптотической устойчивости для системы неустойчивого ЛА с люфтом на входе. В работе [48] изучалась система с люфтом и сухим трением одновременно.

Помимо негативного влияния нелинейностей в системе самолет-летчик может присутствовать запаздывание по времени между управляющим сигналом пилота и отклонением органа управления, а также чрезмерная вовлеченность пилота в управление, выражающаяся высоким коэффициентом усиления пилота [6, 49].

В данной статье определяются условия возникновения колебательных режимов и приближенно оценивается робастность нелинейных процессов на классах амплитуд и частот внешних сигналов СУП в условиях высокого коэффициента усиления пилота и временного запаздывания, отдельно для нелинейностей типа «насыщение» и люфт. С этой целью в статье используется методика получения границы области устойчивости путем построения огибающих семейства окружностей параметрического резонанса при различных амплитудах.

2 Метод гармонической линеаризации в нестационарной системе

Для анализа нелинейных динамических систем широко используется метод гармонической линеаризации [22, 23]. Основанием для применения гармонического приближения служит введение гипотезы фильтра о том, что линейная динамическая часть системы обладает свойством фильтра низких частот и соблюдение баланса фаз.

2.1 Метод гармонической линеаризации

Следуя [22, 23, 50, 51], будем считать, что на вход нелинейного элемента $F(x)$ поступает гармонический сигнал:

$$x(t) = x_0 + A \sin \omega t, \quad (1)$$

где фаза $\psi = \omega t$, ω – частота, t – время. Тогда выходной периодический сигнал нелинейного элемента принимает вид $y(t) = F(A \sin \omega t)$ и может быть разложен в ряд Фурье, где коэффициенты гармонической линеаризации

для нечетно-симметричной нелинейной функции от амплитуды A первой гармоники к амплитуде m -ой гармоники в комплексной форме имеют вид:

$$W_m(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) e^{-jm\psi} d\psi, \quad (2)$$

где m – номер гармоники.

Для автономной динамической системы, содержащей линейную часть $W(j\omega)$ и нелинейную в виде гармонически линеаризованного элемента по первой гармонике $W_1(A)$ уравнение гармонического баланса имеет вид:

$$W(j\omega) + W_1^{-1}(A) = -1 \quad (3)$$

Для вынужденных колебаний условие гармонического баланса записывается в виде:

$$\frac{A_{\text{вх}}}{A} e^{-j\varphi} = W^{-1}(j\omega) + W_1(A), \quad (4)$$

где φ – сдвиг фаз между входным и вынужденным сигналом. Существование решения уравнений (3), (4) не гарантирует наличие в системе автоколебаний. Для решения общей задачи устойчивости требуется рассмотреть уравнение линейной нестационарной системы в приращениях, и если оно имеет устойчивое единственное состояние равновесия, невозмущенное движение исходного уравнения также устойчиво. Заметим, что известны примеры, когда условия фильтра и резонанса выполняются, но результаты расчетов имеют низкую точность и не соответствуют реальности, см. напр. [29, 30, 52–57]. Имеются также примеры, когда метод гармонического баланса приводит к точным результатам, в то время как ни условие фильтра, ни условие резонанса не выполняются.

2.2 Устойчивость вынужденного периодического движения

Рассматривая общую задачу устойчивости движения нелинейной нестационарной системы вида

$$g(t) = f(F(x), x(t), t), \quad (5)$$

допустим, что существует решение этой системы $x^*(t)$ и возмущенное движение вида

$$x(t) = x^*(t) + \Delta x(t). \quad (6)$$

Подставляя уравнение (6) в (5), получим уравнение в приращениях, в котором

$$\left. \frac{\Delta F[x^*(t) + \Delta x(t)]}{\Delta x(t)} \Delta x(t) \right|_{\text{при } \Delta x(t) \rightarrow 0} = \frac{dF(x)}{dx} \quad (7)$$

Если уравнение в приращениях имеет устойчивое единственное состояние равновесия, то невозмущенное движение исходного уравнения тоже устойчиво. Производная нелинейного элемента dF/dx , вычисленная вдоль периодического решения уравнения (5), есть периодически меняющийся параметр, а связанные с ним колебания системы называют параметрическими колебаниями, которые могут привести к явлению параметрического резонанса и, в свою очередь, потере устойчивости системы [58].

Условие возбуждения параметрического резонанса для нелинейной системы записывается в виде [58]:

$$W^{-1}(j\omega) = -a_0 + \rho_1 e^{-j\phi} \quad (8)$$

где $a_0 = W_1(A) + \frac{A}{2} \frac{dW_1(A)}{dA}$, $\rho_1 = -\frac{A}{2} \frac{dW_1(A)}{dA}$ – центр и радиус окружности параметрического возбуждения соответственно, ϕ – сдвиг фазы между колебаниями периодического параметра и входным сигналом.

Для выяснения условий устойчивости вынужденных колебаний рассматриваются совместно условие возникновения вынужденных колебаний (4) и условие возбуждения параметрического резонанса (8). Эти уравнения не имеют общего решения, если диаметр окружности возбуждения параметрического резонанса меньше радиуса окружности возникновения вынужденных колебаний. Тогда условие устойчивости вынужденных колебаний, не зависящее от вида частотной характеристики и ПФ линейной части системы $W(j\omega)$ запишется в виде:

$$A_{\text{вх}} > A^2 \left| \frac{dW_1(A)}{dA} \right| \quad (9)$$

3 Модель системы управления полетом

Рассмотрим модель системы управления полетом по продольному каналу. Нелинейный привод органа управления ЛА имеет нелинейность типа «насыщение» в канале угловой скорости и люфт в канале угла тангажа. Примем в модели задающее воздействие в виде генератора синусоидального сигнала $\vartheta(t) = A \sin \psi$.

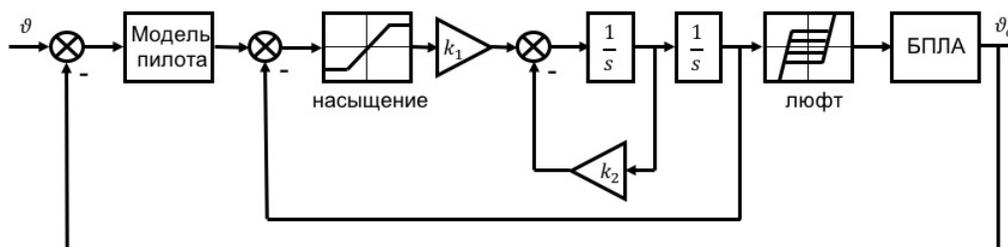


Рис. 1 — Структурная схема нелинейной системы управления.

3.1 Модель пилота

Следуя [3, 5, 13, 49, 59], модель пилота с учетом нервно-мышечного запаздывания представим передаточной функцией

$$W_1(s) = K_p \frac{T_L s + 1}{T_I s + 1} e^{-\tau s}, \quad (10)$$

где K_p – коэффициент усиления пилота, τ – время запаздывания, T_I , T_L – постоянные времени запаздывания и опережения, вводимые пилотом. Пилот подстраивает свое поведение для состояния хорошей динамики замкнутой системы.

3.2 Модель привода

Нелинейный привод представлен, см. [35], коэффициентом линеаризации и передаточной функцией

$$W_2(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}, \quad (11)$$

где T – постоянная времени, ξ – коэффициент демпфирования. Коэффициент линеаризации представлен в разделе 4. Положим, что рабочий диапазон отклонения руля высоты равен ± 25 градусов.

3.3 Модель объекта управления

В данной статье в качестве примера взята модель БПЛА *Phastball*, разработанного в качестве прототипа для дистанционного наблюдения за автомобильными шоссе, см. [17, 18]. Этот БПЛА используется также как испытательный стенд для разработки СУП, проверок на надежность и отказоустойчивость рулевого привода. Он имеет дистанционное радиоуправление парой электрических бесщеточных вентиляторов, установленных в

воздушном канале. Использование такой двигательной установки упрощает работу в полете и уменьшает вибрации бортовых датчиков.

ПФ от отклонения руля высоты δ_e к углу тангажа ϑ БПЛА имеет вид [18]:

$$W_3(s) = \frac{30s^2 + 115s - 49.3}{s^4 + 7s^3 + 23s^2 - 10.6s + 0.3} \quad (12)$$

Заметим, продольное движение БПЛА неустойчиво и стабилизируется путем введения обратной связи по угловой скорости тангажа.

4 Исследование устойчивости вынужденных колебаний в контуре управления ЛА

Рассмотрим отдельно влияние нелинейностей типа «насыщение» и люфт при входном гармоническом сигнале $\vartheta(t)$. Предполагаем, что характеристика нелинейных элементов симметрична.

4.1 Исследование влияния нелинейности типа «насыщение» в канале управления угловой скоростью

Уравнение нелинейного элемента типа «насыщение» имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} x, & |x| < b \\ K \operatorname{sign}(x), & |x| > b \end{cases} \quad (13)$$

Коэффициент гармонической линейризации нелинейного элемента типа «насыщение» q_1' в соответствии с (2):

$$q_1' = \frac{2K}{\pi} \left[\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} \right] \quad (14)$$

Найдем центр и радиус окружности параметрического возбуждения в соответствии с (8):

$$a_0 = \frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{b}{A}, \quad (15)$$

$$|\rho_1| = \frac{2K}{\pi} \left[\frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b}{A}} \right] \quad (16)$$

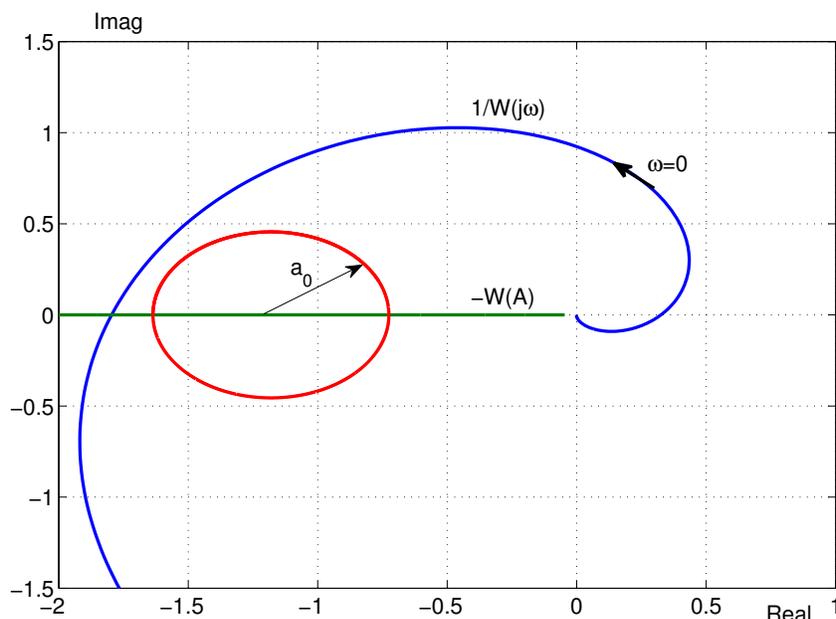


Рис. 2 — Гармонический баланс для вынужденных колебаний

Параметры нелинейности приняты $K = 2$, $b = 1$, $A \geq b$. Решение уравнения (3) существует при $K_p \geq 6$, $\tau \geq 1.5$ с. Годографы линейной части $W^{-1}(A)$ и нелинейного элемента $W_1(A)$ пересекаются на частоте $\omega = 3.56$ рад/с и амплитуде $A = 1.25$ град как показано на рис. 1. Для этих амплитуды и частоты вычисленная максимальная амплитуда входного сигнала, которая обеспечит устойчивость вынужденных колебаний, составляет 0.005 град.

Согласно (8) на рис. 2 видно, что обратный годограф линейной части не пересекает окружность параметрического резонанса, следовательно вынужденные колебания устойчивы для любых амплитуд входного сигнала. Результаты моделирования показывают, что вынужденные колебания неустойчивы при любых амплитудах входного сигнала.

Произведем оценку амплитуды высших гармоник. Рассмотрим вынужденное периодическое движение системы, содержащее первую и третью гармоники:

$$x(t) = A \sin \omega t + A_3 \sin(3\omega t), \quad (17)$$

где A , A_3 – амплитуды 1-ой и 3-ей гармоник соответственно, ψ_3 – фазовый сдвиг между входным и вынужденным сигналом. В соответствии с [60] модуль третьей гармоники представляется в виде:

$$|x_3| = |AW(3j\omega)W_3(A)|, \quad (18)$$

где $W_3(A)$ – коэффициент гармонической линейризации компонента 3-ей гармоники. Вычисленное значение $|x_3| \approx 0.8$ достататочно большое, чтобы не учитывать его в уравнении гармонического баланса. Следовательно, первое гармоническое приближение нуждается в коррекции. Новая скорректированная амплитуда вынужденного сигнала увеличится на приращение $\Delta A \approx 10$, а радиус окружности параметрического резонанса уменьшится на эту величину. Таким образом, в данной системе для получения точных результатов необходимо учитывать влияние высших гармоник.

4.2 Исследование влияния нелинейности типа люфт в канале управления углом

Уравнение нелинейного элемента типа люфт имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} k(x - b), & x > b \\ k(x + b), & x < b \end{cases} \quad (19)$$

Коэффициенты гармонической линейризации нелинейного элемента типа люфт q'_1, q''_1 в соответствии с (2):

$$q'_1 = \frac{K}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1 - \frac{2b}{A}\right) + 2\left(1 - \frac{2b}{A}\right) \sqrt{\frac{b}{A}\left(1 - \frac{b}{A}\right)} \right] \quad (20)$$

$$q''_1 = -\frac{4Kb}{\pi A} \left(1 - \frac{b}{A}\right), \quad A \geq b, \quad (21)$$

$$(22)$$

Найдем центр и радиус окружности параметрического возбуждения в соответствии с (8):

$$a_0 = \frac{K}{\pi} \left| \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1 - \frac{2b}{A}\right) + 2\sqrt{\frac{b}{A}\left(1 - \frac{b}{A}\right)} - j\frac{2b}{A} \right|, \quad (23)$$

$$|\rho_1| = \frac{2Kb}{\pi A} \quad (24)$$

Решения уравнения (3) существуют при $K_p \geq 6$, $\tau \geq 1.8$ сек. Годографы линейной части $W^{-1}(j\omega)$ и нелинейного элемента $W_1(A)$ пересекаются на частоте $\omega = 2.2$ рад/с и амплитуде $A = 2.5$ град. Для этих амплитуды и частоты вычисленная максимальная амплитуда входного сигнала, которая обеспечит устойчивость вынужденных колебаний, составляет 0.03 град.

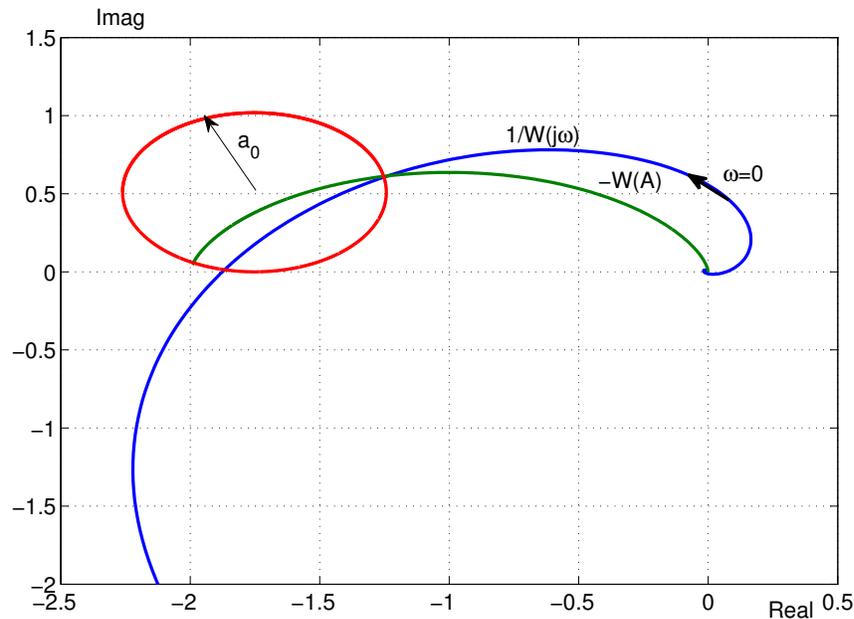


Рис. 3 — Гармонический баланс для вынужденных колебаний.

Согласно (8) на рис. 3 видно, что обратный годограф линейной части пересекает окружность параметрического резонанса, следовательно вынужденные колебания неустойчивы для амплитуд входного сигнала $A_{\text{вх}} > 0.03$. На рис. 4 представлены временные процессы входного $\vartheta(t)$, выходного $\vartheta_c(t)$, на входе $u_c(t)$ и выходе $\delta_c(t)$ нелинейного привода сигналов по углу тангажа.

5 Заключение

В работе определены условия возникновения колебательных режимов в задаче управления БПЛА, получена численная оценка устойчивости вынужденных колебаний системы управления БПЛА по отношению к величине задающего воздействия и параметрам системы.

В качестве нелинейностей рассматривались ограничение скорости привода и люфт в конструкции руля высоты. Точность результатов соответствует точности замены реальных процессов, происходящих в системе на одну гармонику, что обычно допустимо при инженерной оценке. Дальнейшим исследованием может быть анализ робастности явления синхронизации колебаний нелинейной системы с внешним гармоническим сигналом для определенной нелинейности на диапазоне амплитуд и частот этого

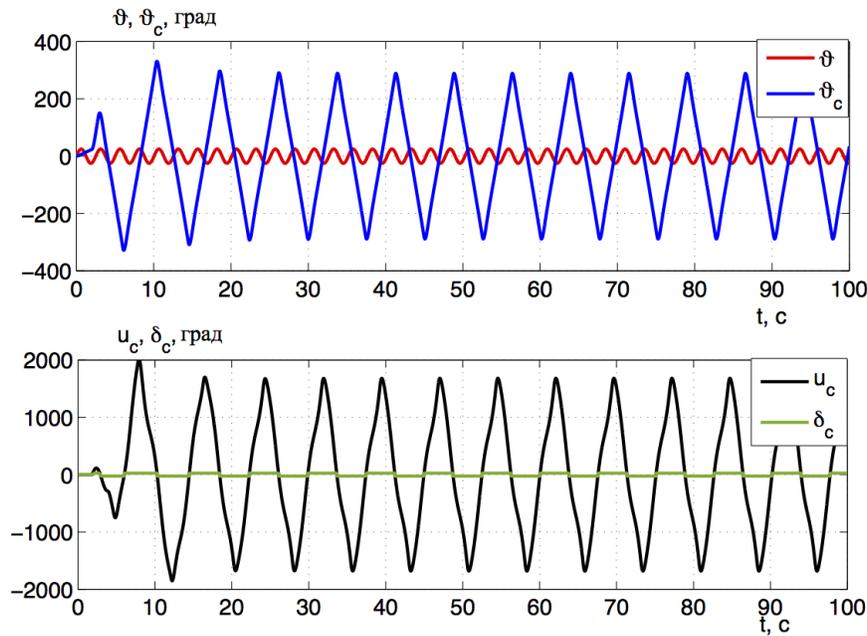


Рис. 4 — Переходные процессы по углу тангажа

сигнала, а также синтез робастного регулятора.

Список литературы

- [1] Anderson M. R., Schmidt D. K. Closed-Loop Pilot Vehicle Analysis of the Approach and Landing Task // J. Guidance, Control, and Dynamics. 1987. Vol. 10, no. 2. P. 187–194.
- [2] Hess R. A. Analysis of aircraft attitude control systems prone to pilot-induced oscillations // J. of Guidance, Control, and Dynamics. 1984. Vol. 7, no. 1. P. 106 – 112.
- [3] Ефремов А. В., Оглоблин А. В., Предтеченский А. Н., Родченко В. В. Летчик как динамическая система. М.: Машиностроение, 1992. С. 330.
- [4] Efremov A. Analysis of Reasons for Pilot Induced Oscillation Tendency and Development of Criteria for Its Prediction: Tech. Rep. Contract SPC-94-4028. Moscow, Russia: Pilot-Vehicle Laboratory, Moscow Aviation institute, 1995.
- [5] Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов / Под ред. Г.С. Бюшгенса. М.: Наука. Физматлит, 1998. С. 816.

- [6] Aviation Safety and Pilot Control: Understanding and Preventing Unfavorable Pilot-Vehicle Interactions / Ed. by D. T. McRuer, J. D. Warner. Washington, DC: Committee on the Effects of Aircraft-Pilot Coupling on Flight Safety Aeronautics and Space Engineering Board Commission on Engineering and Technical Systems National Research Council. National Academy Press, 1997. URL: <http://www.nap.edu/catalog/5469.html>.
- [7] Duda H. Effects of Rate Limiting Elements in Flight Control Systems – A New PIO Criterion // Effects of Rate Limiting Elements in Flight Control Systems – A New PIO Criterion / in Proc. of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conf. Baltimore, Maryland: 1995. — August. P. 288 – 298.
- [8] Lindsey S. W. Prediction of longitudinal pilot induced oscillations using the optimal control model. Master's thesis, School of Engineering Air Force Institute of Technology Air University, Ohio, 1989.
- [9] Klyde D., McRuer D., Myers T. Unified Pilot-Induced Oscillation Theory. Vol. I: PIO Analysis with Linear and Nonlinear Effective Vehicle Characteristics, Including Rate Limiting: Tech. Rep. WL-TR 96-3028: Wright-Patterson Air Force Base, Ohio: Wright Laboratory, 1995.
- [10] Katayanagi R. Pilot-Induced Oscillation Analysis with Actuator Rate Limiting and Feedback Control Loop // Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci. 2001. Vol. 44, no. 143. P. 48 – 53.
- [11] McRuer D. T., Klyde D. H., Myers T. T. Development of a Comprehensive PIO Theory // AIAA paper 96-3433. 1996. P. 581 – 597.
- [12] McRuer D., Krendel E. Mathematical Models of Human Pilot Behavior. AGARD AG-188, 1974.
- [13] Ефремов А.В., Кошеленко А.В., Тяглик М.С., Тюменцев Ю.В., Тянь В.Ц. Математическое моделирование характеристик управляющих действий летчика при исследовании задач ручного управления // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2015. Т. 2. С. 34–40.
- [14] Andrievsky B., Kuznetsov N., Kuznetsova O. et al. Localization of hidden oscillations in flight control systems // SPIIRAS Proceedings. 2016. Vol. 6, no. 49. P. 5–31.

- [15] Andrievsky B., Arseniev D. G., Kuznetsov N. V., Zaitceva I. S. Pilot-Induced Oscillations and Their Prevention // *Cyber-Physical Systems and Control. CPS&C 2019* / Ed. by D. Arseniev, L. Overmeyer, H. Kälviäinen, B. Katalinić. Springer, Cham, 2013. Vol. 95 of *Lecture Notes in Networks and Systems*. P. 108–123. URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007\%2F978-3-030-34983-7_11.
- [16] Federal Aviation Administration. Pilot Induced Oscillations. URL: https://www.skybrary.aero/index.php/Pilot_Induced_Oscillation (дата обращения: 2017-10-24).
- [17] Mandal T., Gu Y., Chao H., Rhudy M. B. Flight Data Analysis of Pilot-Induced-Oscillations of a Remotely Controlled Aircraft // *Proc. AIAA Guidance Navigation and Control Conf. (GNC 2013)*, Boston, MA. AIAA, 2013. — Aug. P. 1–15.
- [18] Mandal T., Gu Y. Analysis of Pilot-Induced-Oscillation and Pilot Vehicle System Stability Using UAS Flight Experiments // *Aerospace*. 2016. Vol. 3, no. 42. P. 1–23. URL: <https://www.mdpi.com/2226-4310/3/4/42>.
- [19] MeRuer D., Graham D., Krendel E., Reisener, Jr. W. Human pilot dynamics in compensatory systems-theory, models, and experiments with controlled element and forcing function variations: Tech. Rep. AFFDL-TR-65-15: Franklin Inst., 1965. — January.
- [20] Деруссо П., Рой Р.Ю Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления (для инженеров). М.: Гл. ред. физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1970. С. 620. Перев. с англ.
- [21] Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. Пупкова К. А., Егупова Н. Д. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. С. 584.
- [22] Попов Е.П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1988. С. 256.
- [23] Попов Е.П. Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. М.: Наука, 1973. С. 584.
- [24] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1957. С. 407.

- [25] Айзерман М. А., Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М.: АН СССР, 1963. С. 139.
- [26] Баркин А.И., Зеленцовский А.Л. Критерий абсолютной устойчивости нелинейных систем управления // Автомат. и телемех. 1981. С. 5–10.
- [27] Андронов А. А. Предельные циклы Пуанкаре и теория автоколебаний. Собрание трудов Андронова А. А. // Изд. АН СССР. 1956. С. 41.
- [28] Якубович В. А. Частотные условия автоколебаний в нелинейных системах с одной стационарной нелинейностью // Сибирский матем. журнал. 1973. Т. 14, № 5. С. 1100–1129.
- [29] Кузнецов Н. В. Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Башкирский государственный университет, 2019. С. 46–48.
- [30] Bragin V., Vagaitsev V., Kuznetsov N., Leonov G. Algorithms for Finding Hidden Oscillations in Nonlinear Systems. The Aizerman and Kalman Conjectures and Chua's Circuits // J. Computer and Systems Sciences Intern. 2011. Vol. 50, no. 4. P. 511–543.
- [31] Цыпкин Я. З. Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974. С. 576.
- [32] Хлыпало Е. И. Нелинейные корректирующие устройства в автоматических системах. Л.: Энергия, 1973. С. 344.
- [33] Duda H. Prediction of Pilot-in-the-Loop Oscillations due to Rate Saturation // J. of Guidance, Navigation, and Control. 1997. — May–June. Vol. 20, no. 3.
- [34] Glattfelder A., W.Scaufelberger. Stability analysis of single loop control systems with saturation and antireset-windup circuits // IEEE Trans. Automat. Contr. 1983. — Dec. Vol. 28, no. 12. P. 1074–1081.
- [35] Andrievsky B., Kuznetsov N., Leonov G., Pogromsky A. Hidden Oscillations in Aircraft Flight Control System with Input Saturation // Proc. 5th IFAC Intern. Workshop on Periodic Control Systems (PSYCO 2013), IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). Vol. 5(1). Caen, France: 2013. P. 75–79.

- [36] Zames G., Falb P. Stability conditions for systems with monotone and slope-restricted nonlinearities // *SIAM J.* 1968. Vol. 6, no. 1. P. 89–108.
- [37] Evdokimov S., Klimanov S., Korchagin A. et al. Terminal control algorithm for the downrange motion of a descent module with load factor constraints // *J. Computer and Systems Sciences Intern.* 2012. Vol. 51, no. 5. P. 715–731.
- [38] Евдокимов С.Н., Климанов С.И., Корчагин А.Н., Микрин Е.А., Сихарулидзе Ю.Г. Управление продольным и боковым движением спускаемого аппарата в коридоре углов входа с ограничением перегрузки // *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления.* 2012. № 6. С. 63–79.
- [39] Микрин Е.А., Зубов Н.Е., Негодяев С.С., Богачев А.В. Оптимальное управление орбитальной ориентацией космического аппарата на основе алгоритма с прогнозирующей моделью // *Труды Московского физико-технического института.* 2010. Т. 2, № 3 (7). С. 189–195.
- [40] Amato F., Iervolino S., Pandit M. et al. Analysis of Pilot-in-the-Loop Oscillations Due to Position and Rate Saturations // *Proc. 39th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC 2000), Sydney, Australia.* IEEE, 2000. P. 6.
- [41] Amato F., Iervolino R., Scala S., Verde L. Category II pilot-in-the-loop oscillations analysis from robust stability methods // *J. of Guidance, Control and Dynamics.* 2001. — May–June. Vol. 24, no. 3.
- [42] Теория автоматического управления: Нелинейные системы управления при случайных воздействиях / Под ред. Под ред. А. В. Нетушила. М.: ВШ, 1983. С. 432.
- [43] Нгуен Ч. К. Влияние люфта и сухого трения на устойчивость мехатронного привода (аналитическое исследование) // *Научно-технический вестник Университета ИТМО.* 2006. № 28. С. 157–162.
- [44] Белова Л. А., Нетушил А. В. Об абсолютной устойчивости систем регулирования с неоднозначными нелинейностями типа люфт и упор // *Автомат. и телемех.* 1967. Т. 12. С. 58–63.
- [45] Брусин В. А. Об абсолютной устойчивости следящей системы с люфтом // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1964. № 3. С. 7–16.

- [46] Петров П. В., Коева А. А. Исследование автоколебаний в гидромеханических приводах, работающих в условиях трения // Вестник УГАТУ. 2014. Т. 18, № 4 (65). С. 183–190.
- [47] Tarbourieh S., Queinnec I., Prieur C. Nonstandard use of anti-windup loop for systems with input backlash // IFAC J. of Systems and Control. 2018. Vol. 6. P. 33–42.
- [48] Наджаров Э. М. Приближенное определение периодических режимов в системах автоматического регулирования, содержащих несколько нелинейностей // В кн.: Труды 2-го Всесоюзного совещания по ТАУ. 1955. Т. 1.
- [49] McRuer D. T. Pilot-Induced Oscillations and Human Dynamic Behavior: Tech. rep. Hawthorne, CA, USA: NASA, 1995. — July.
- [50] Гольдфарб Л. С., Балтрушевич А. В., Нетушил А. В. Теория автоматического управления. М.: Высшая школа, 1976. С. 430.
- [51] Берко В.С., Живов Ю.Г., Поединок А.М. Приближенный критерий устойчивости вынужденных колебаний регулируемых объектов с нелинейным приводом // Ученые записки ЦАГИ. 1984. Т. XV, № 4. С. 72–80.
- [52] Леонов Г.А. Эффективные методы поиска периодических колебаний в динамических системах // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74, № 1. С. 37–73.
- [53] Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Vagaitsev V. I. Localization of hidden Chua's attractors // Physics Letters A. 2011. Vol. 375, no. 23. P. 2230–2233.
- [54] Leonov G. A., Kuznetsov N. V. Analytical-numerical methods for investigation of hidden oscillations in nonlinear control systems // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2011. Vol. 18, no. 1. P. 2494–2505.
- [55] Leonov G. A., Kuznetsov G. V. Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractors in Chua circuits // Int J. Bifurcation and Chaos. 2013. Vol. 23, no. 1. P. 1–69.

- [56] Kuznetsov N., Leonov G. Hidden attractors in dynamical systems: systems with no equilibria, multistability and coexisting attractors // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2014. Vol. 47, no. 3. P. 5445–5454. Proc. 19th IFAC World Congress. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667016424614>.
- [57] Dudkowski D., Jafari S., Kapitaniak T. et al. Hidden attractors in dynamical systems // Physics Reports. 2016. Vol. 637. P. 1 – 50. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157316300928>.
- [58] Чечурин С. Л. Параметрические колебания и устойчивость периодического движения. СПб.: ЛГУ, 1983. С. 220.
- [59] Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Аэродинамика самолета: Динамика продольного и бокового движения. М.: Машиностроение, 1979. С. 352.
- [60] Chechurin L., Chechurin S. Physical Fundamentals of Oscillations. Frequency Analysis of Periodic Motion Stability. Springer, 2017. P. 220.