ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2014
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Моделирование динамических систем

Абсолютная устойчивость систем автоматического управления с гистерезисной нелинейностью [1]

Звягинцева Т.Е.

Математико-механический факультет Санкт-Петербургского государственного университета. 198504, Россия, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский проспект, дом 28.
$e - mail : zv\_tatiana@mail.ru$

Аннотация

В работе рассмотрен класс двумерных систем автоматического управления с гистерезисной нелинейностью, которая аппроксимируется гистерезисными кусочно-линейными характеристиками. Фазовое пространство таких систем представляет собой многообразие с краем, состоящее из двух листов, склеенных друг с другом по лучам перехода. Для систем такого класса вводится понятие глобальной устойчивости, определяется глобально притягивающее множество, состоящее из двух компонент связности. Далее в работе дается определение абсолютной устойчивости систем из заданного класса и через коэффициенты системы формулируются условия абсолютной устойчивости. Эти условия получены с помощью метода систем сравнения.

Abstract

The class of two-dimensional control systems with hysteresis nonlinearity is considered. We assume that the nonlinearity is approximated by piecewise linear characteristics. The phase space of such systems is a two-sheeted manifold

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 13-01-00624.

with boundary. The sheets are glued together along the transitional rays. The definitions of global stability, global attracting set and absolute stability for systems of this class are given. The conditions of absolute stability are obtained by the comparison systems method and formulated in terms of system coefficients.

Введение

Вопрос о глобальной устойчивости систем автоматического управления с различными нелинейностями является очень важным при решении прикладных задач. Однако наибольший интерес представляет решение задачи о глобальной устойчивости некоторого класса таких систем, или задачи об абсолютной устойчивости системы с нелинейностью из некоторого класса.

Впервые определение абсолютной устойчивости систем управления с нелинейностью, удовлетворяющей секторному условию $0 \leq \varphi(t,\sigma)\,\sigma \leq k\sigma^2$ для $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall \sigma \in \mathbb{R}$, было дано в работе [1]. Этой теме посвящено большое количество статей и монографий, где различные условия абсолютной устойчивости найдены с помощью частотных методов и второго метода Ляпунова. Необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости двумерных систем с такой нелинейностью получены в работе [2] с помощью метода систем сравнения.

Очевидно, что гистерезисная нелинейность секторному условию не удовлетворяет. Однако понятие абсолютной устойчивости систем с такой нелинейностью используется в литературе прикладного характера (например, [3-5]) без строгого определения.

В данной работе мы сформулируем определение абсолютной устойчивости для двумерных систем с гистерезисной нелинейностью и приведем условия устойчивости таких систем.

Основной результат

Будем рассматривать систему автоматического управления, содержащую один нелинейный гистерезисный элемент с характеристикой $\varphi\,[t,\sigma,\varphi_0]$, представленной на рис. 1.

Система такого класса приводится к простейшей блок-схеме, состоящей из нелинейного элемента и линейной части, и аналитически записывается в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x - \varphi\,[t,\sigma,\varphi_0]\,, \end{cases} \tag{1}$$

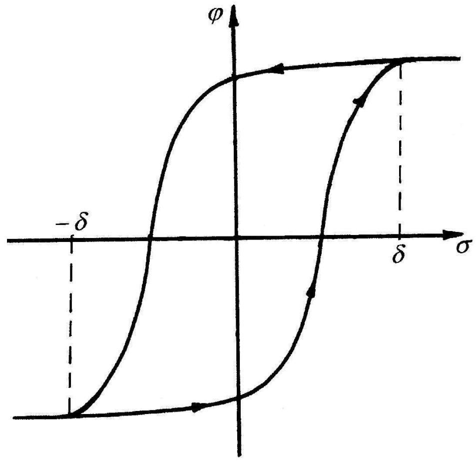

Рис. 1. Нелинейная характеристика системы (1).

где

$$\varphi\ [t, \sigma, \varphi_0] = \begin{cases} \varphi_1 (\sigma (t))\ , & \text{если } \sigma \geq -\delta, \\ \varphi_2 (\sigma (t))\ , & \text{если } \sigma \leq \delta, \end{cases} \tag{2}$$

$\delta > 0$, $\sigma = ay + bx$; $\varphi_1 (\sigma)$ и $\varphi_2 (\sigma)$ непрерывны, $\varphi_1 (\delta) = \varphi_2 (\delta)$, $\varphi_1 (-\delta) = \varphi_2 (-\delta)$; направление обхода петли гистерезиса на рис. 1 указано стрелками: $\varphi_1 (\sigma (t))$ убывает с ростом t при $\sigma (t) \in [-\delta,\ \delta]$, $\varphi_2 (\sigma (t))$ возрастает с ростом t при $\sigma (t) \in [-\delta,\ \delta]$.

Считаем, что $\alpha > 0$, $\quad\beta > 0$ и $b^2 - \alpha ab + a^2\beta \neq 0$, т.е. при $\varphi\ [t, \sigma, \varphi_0] \equiv 0$ система (1) асимптотически устойчива, и передаточная функция системы (1) является невырожденной. Не умаляя общности рассуждений, считаем, что $a > 0$. Будем считать также, что $b > 0$ (случай $b < 0$ рассматривается аналогично).

Фазовая поверхность P системы (1) представляет собой многообразие с краем, состоящее из двух листов: $P = P_1 \cup P_2$.

На листе $P_1 = \left\{(x, y) : \sigma \geq -\delta,\ \dot\sigma \left|_{\sigma\in[-\delta,\delta]} \right. \leq 0\right\}$ система имеет вид

$$\begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = -\alpha y - \beta x - \varphi_1 (\sigma (t))\ , \end{cases} \tag{3}$$

здесь $\dot\sigma = \dot\sigma_1 = a\left(-\alpha y - \beta x - \varphi_1 (\sigma (t))\right) + by$ - производная $\sigma = ay + bx$ в силу системы (3),

на листе $P_2 = \left\{(x, y) : \sigma \leq \delta,\ \dot\sigma \left|_{\sigma\in[-\delta,\delta]} \right. \geq 0\right\}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x - \varphi_2 (\sigma (t)), \end{cases} \tag{4}$$

где $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_2 = a(-\alpha y - \beta x - \varphi_2(\sigma(t))) + by$ - производная σ в силу системы (4).

Переход фазовой точки с листа P_1 на P_2 - по лучу $L_1 = \{(x, y) : \sigma = -\delta,\ \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_1 \leq 0\}$,

с листа P_2 на P_1 - по лучу $L_2 = \{(x, y) : \sigma = \delta,\ \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_2 \geq 0\}$. $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ - край многообразия P.

$\Gamma_1 = \{(x, y) :\ \sigma \in [-\delta, \delta],\ \dot{\sigma}_1 = 0\} \subset P_1$,

$\Gamma_2 = \{(x, y) :\ \sigma \in [-\delta, \delta],\ \dot{\sigma}_2 = 0\} \subset P_2$.

O_1 и O_2 - положения равновесия систем (3) и (4) соответственно. O_j имеет координаты $(\xi_j, 0)$, где ξ_j - решение уравнения $\varphi_j(b\xi_j) = -\beta\xi_j$, $j = 1, 2$.

Определение решения системы (1) дано в работе [6]. Считаем, что решения (1) с начальными данными $t = \tau_0$, $(x_0, y_0) \in P$, достигающие края многообразия Γ при некотором конечном $t = \tilde{\tau} \geq \tau_0$ в точке $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in (\Gamma_1 \backslash L_1) \cup (\Gamma_2 \backslash L_2)$, продолжаются на бесконечный промежуток времени: $x(t) \equiv \tilde{x},\ \ y(t) \equiv \tilde{y}$ для всех $t \in [\tilde{\tau}, +\infty)$. Множество таких точек $(\tilde{x}, \tilde{y})$, объединенное с множеством $O_1 \cup O_2$, обозначим через Γ^+.

Множество Γ^+ называется глобально притягивающим множеством для системы (1) [1, 2], если для любого решения системы (1) $x = x(t)$, $y = y(t)$ с начальными данными $t = \tau_0$, $(x_0, y_0) \in P$

$$\lim_{t \to +\infty} \rho\left((x(t), y(t)),\ \Gamma^+\right) = 0,$$

$\rho((x(t), y(t)),\ \Gamma^+)$ - расстояние от точки $(x(t), y(t))$ до множества Γ^+.

Будем говорить, что система (1) является глобально устойчивой, если множество Γ^+ является глобально притягивающим множеством.

Пусть функции $\varphi_1(\sigma)$ и $\varphi_2(\sigma)$ мажорируются кусочно-линейными функциями: на листе P_1

$$\psi_{1-}(\sigma) \leq \varphi_1(\sigma) \leq \psi_{1+}(\sigma), \tag{5}$$

где

$$\psi_{1-}(\sigma) = \begin{cases} M_1, & \textit{если } \sigma \geq -k\delta, \\ \frac{1}{(1-k)\delta}\left((M_1 + M_2)\,\sigma + \delta\,(M_1 + kM_2)\right), & \textit{если } -\delta \leq \sigma \leq -k\delta, \end{cases}$$

$$\psi_{1+}(\sigma) = \begin{cases} M_2, & \textit{если } \sigma \geq -k\delta, \\ \frac{1}{(1-k)\delta}\left((M_1 + M_2)\,\sigma + \delta\,(kM_1 + M_2)\right), & \textit{если } -\delta \leq \sigma \leq -k\delta, \end{cases}$$

и на листе P_2

$$\psi_{2-}(\sigma) \leq \varphi_2(\sigma) \leq \psi_{2+}(\sigma)\,, \tag{6}$$

где

$$\psi_{2-}(\sigma) = \begin{cases} -M_2, & \textit{если } \sigma \leq k\delta, \\ \frac{1}{(1-k)\delta}\left((M_1 + M_2)\,\sigma - \delta\,(kM_1 + M_2)\right), & \textit{если } k\delta \leq \sigma \leq \delta, \end{cases}$$

$$\psi_{2+}(\sigma) = \begin{cases} -M_1, & \textit{если } \sigma \leq k\delta, \\ \frac{1}{(1-k)\delta}\left((M_1 + M_2)\,\sigma - \delta\,(M_1 + kM_2)\right), & \textit{если } k\delta \leq \sigma \leq \delta, \end{cases}$$

$M_2 > M_1 > 0$, $0 < k < 1$ (рис. 2).

Будем говорить, что нелинейность (2) принадлежит классу $H\,[M_1,\, M_2]$, если функции $\varphi_1(\sigma)$, $\varphi_2(\sigma)$ удовлетворяют условиям (5), (6).

Систему (1) с нелинейностью (2) назовем абсолютно устойчивой в классе нелинейностей $H\,[M_1,\, M_2]$, если система (1) глобально устойчива для любой нелинейности (2) из этого класса.

Введем в рассмотрение две системы сравнения вида (1) с гистерезисными нелинейностями, имеющими кусочно-линейные характеристики. Для первой системы нелинейность имеет вид

$$\varphi\,[t, \sigma, \varphi_0] = \psi_+\,[t, \sigma, \varphi_0] = \begin{cases} \psi_{1+}(\sigma(t))\,, & \textit{если } \sigma \geq -\delta, \\ \psi_{2+}(\sigma(t))\,, & \textit{если } \sigma \leq \delta, \end{cases} \tag{7}$$

для второй системы:

$$\varphi\,[t, \sigma, \varphi_0] = \psi_-\,[t, \sigma, \varphi_0] = \begin{cases} \psi_{1-}(\sigma(t))\,, & \textit{если } \sigma \geq -\delta, \\ \psi_{2-}(\sigma(t))\,, & \textit{если } \sigma \leq \delta. \end{cases} \tag{8}$$

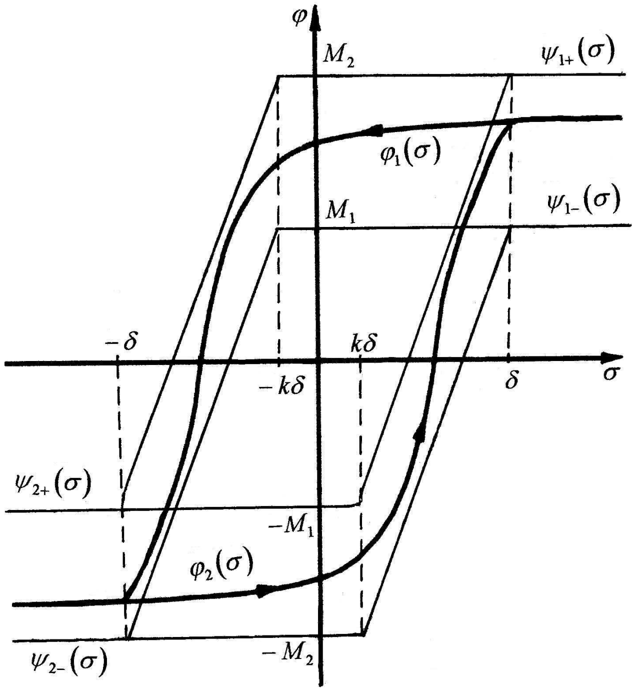

Рис. 2. Аппроксимация нелинейной характеристики кусочно-линейными функциями.

Фазовая поверхность системы (1) с нелинейностью (7) - $P_+ = P_{1+} \cup P_{2+}$.

Разобьем каждый из листов фазовой поверхности на две части: $P_{1+} = P_{11+} \cup P_{12+}$, $P_{2+} = P_{21+} \cup P_{22+}$: $\psi_{1+}(\sigma(t)) = M_2$ на P_{11+}; $\psi_{1+}(\sigma(t)) = \frac{1}{(1-k)\delta}((M_1 + M_2)\sigma + \delta(kM_1 + M_2))$ на P_{12+}; $\psi_{2+}(\sigma(t)) = -M_1$ на P_{21+}; и $\psi_{2+}(\sigma(t)) = \frac{1}{(1-k)\delta}((M_1 + M_2)\sigma - \delta(M_1 + kM_2))$ на P_{22+}.

Переход фазовой точки с листа P_{11+} на лист P_{12+} происходит по лучу L_{11+}; с листа P_{12+} на лист P_{21+} - по лучу L_{12+}. Точка переходит с листа P_{21+} на лист P_{22+} по лучу L_{21+}, а с P_{22+} на P_{11+}- по лучу L_{22+}.

Аналогично, фазовая поверхность системы (1) с нелинейностью (8) - $P_- = P_{1-} \cup P_{2-}$. Разобьем P_{i-} на две части P_{ij-} и введем лучи перехода L_{ij-}, $i, j = 1, 2$. Обозначим через $K_{ij\pm}$ начало луча $L_{ij\pm}$, $i, j = 1, 2$.

Легко показать, что $P_{1-} \subset P_1 \subset P_{1+}$, $P_{2+} \subset P_2 \subset P_{2-}$, $\Gamma \subset (P_{1+} \backslash P_{1-}) \cup (P_{2-} \backslash P_{2+})$.

Система (1) с нелинейностью (7) имеет положения равновесия $O_{11+}(-u_1, 0) \in P_{11+}$ и $O_{21+}(v_1, 0) \in P_{21+}$, если $M_2 b \leq k\delta\beta$, и положения равновесия $O_{12+}(-u_2, 0) \in P_{12+}$ и $O_{22+}(v_2, 0) \in P_{22+}$, если $M_2 b > k\delta\beta$, где $u_1 = \frac{M_2}{\beta}$, $u_2 = \frac{(kM_1+M_2)\delta}{\beta\delta(1-k)+(M_1+M_2)b}$, $v_1 = \frac{M_1}{\beta}$, $v_2 = \frac{(M_1+kM_2)\delta}{\beta\delta(1-k)+(M_1+M_2)b}$.

Положения равновесия системы с нелинейностью (8): $O_{11-}(-v_1, 0) \in P_{11-}$ и $O_{21-}(u_1, 0) \in P_{21-}$, если $M_1 b \leq k\delta\beta$, и $O_{12-}(-v_2, 0) \in P_{12-}$,

$O_{22-}\left(u_2,0\right)\in P_{22-}$, если $M_1 b>k\delta\beta$.

Характеристическое уравнение положений равновесия $O_{11\pm}$ и $O_{21\pm}$:

$$\lambda^2+\alpha\lambda+\beta=0, \tag{9}$$

характеристическое уравнение $O_{12\pm}$ и $O_{22\pm}$:

$$\lambda^2+\left(\alpha+\frac{\left(M_1+M_2\right)a}{\left(1-k\right)\delta}\right)\lambda+\left(\beta+\frac{\left(M_1+M_2\right)b}{\left(1-k\right)\delta}\right)=0. \tag{10}$$

Пусть λ_1 и λ_2 - корни уравнения (9), а λ_3 и λ_4 - корни (10).

Сформулируем условия абсолютной устойчивости системы (1) с нелинейностью класса $H\left[M_1,\ M_2\right]$.

Теорема.*Пусть $M_2 b>k\delta\beta$ и выполнено одно из условий 1-14.*

1. λ_i $(i=1-4)$ вещественные, $\lambda_1<\lambda_3<\lambda_4<\lambda_2$, $a\lambda_i+b>0$;

2. λ_i $(i=1-4)$ вещественные, $\lambda_3<\lambda_4<\lambda_1<\lambda_2$, $a\lambda_{1,2}+b>0$, $a\lambda_{3,4}+b<0$. Верно неравенство

$$\left(\frac{(\lambda_2-\lambda_4)(a\lambda_3+b)}{(\lambda_2-\lambda_3)(a\lambda_4+b)}\right)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_4-\lambda_3}}\cdot\frac{(\lambda_2-\lambda_4)(a\lambda_3+b)}{\lambda_1(a\lambda_2+b)}\leq\frac{(M_1 b+\delta\beta)}{(M_2 b-k\delta\beta)}, \tag{11}$$

или неравенство (11) не выполнено, но

$$\begin{gathered}\left(\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(a\lambda_2+b)e^{\lambda_2\tilde{t}}-(\lambda_2-\lambda_3)(a\lambda_1+b)e^{\lambda_1\tilde{t}}}{(\lambda_1-\lambda_4)(a\lambda_2+b)e^{\lambda_2\tilde{t}}-(\lambda_2-\lambda_4)(a\lambda_1+b)e^{\lambda_1\tilde{t}}}\right)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_4-\lambda_3}}\cdot\\ \cdot\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(a\lambda_2+b)e^{\lambda_2\tilde{t}}-(\lambda_2-\lambda_3)(a\lambda_1+b)e^{\lambda_1\tilde{t}}}{\lambda_2(a\lambda_1+b)e^{\lambda_1\tilde{t}}-\lambda_1(a\lambda_2+b)e^{\lambda_2\tilde{t}}}\leq\frac{M_1 b+\delta\beta}{M_2 b-k\delta\beta},\end{gathered} \tag{12}$$

где $\tilde{t}$ определено равенствами

$$\begin{gathered}\lambda_2\left(a\lambda_1+b\right)e^{\lambda_1\tilde{t}}-\lambda_1\left(a\lambda_2+b\right)e^{\lambda_2\tilde{t}}=\\ =\frac{(M_2 b-k\delta\beta)(a\lambda_1+b)(\lambda_2-\lambda_1)}{h^*(M_1 b+\delta\beta-a\lambda_1(M_2-M_1))+(a\lambda_1+b)(M_2-M_1)},\end{gathered} \tag{13}$$

$$h^*=\left(\frac{\left(a\lambda_2+b\right)\left(M_1 b+\delta\beta-a\lambda_1\left(M_2-M_1\right)\right)}{\left(a\lambda_1+b\right)\left(M_1 b+\delta\beta-a\lambda_2\left(M_2-M_1\right)\right)}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}}, \tag{14}$$

и $\left(M_2-M_1\right)$ достаточно мало, т.е. верно неравенство

$$h^*\left(h^*+\frac{(a\lambda_1+b)\,(M_2-M_1)}{M_1b+\delta\beta-a\lambda_1\,(M_2-M_1)}\right)\leq 1; \tag{15}$$

3. λ_i $(i=1-4)$ вещественные, $\lambda_3<\lambda_1<\lambda_4<\lambda_2$, $a\lambda_{1,3}+b<0$, $a\lambda_{2,4}+b>0$;

4. λ_i $(i=1-4)$ вещественные, $\lambda_3<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_4$, $a\lambda_i+b<0$;

5. λ_i $(i=1-4)$ вещественные, $\lambda_1<\lambda_3=\lambda_4<\lambda_2$, $a\lambda_i+b>0$;

6. λ_i $(i=1-4)$ вещественные, $\lambda_3=\lambda_4<\lambda_1<\lambda_2$, $a\lambda_{1,2}+b>0$, $a\lambda_3+b<0$. Верно неравенство

$$\exp\left(-\frac{\lambda_3(a\lambda_2+b)}{(\lambda_2-\lambda_3)(a\lambda_3+b)}\right)\cdot\frac{(\lambda_2-\lambda_3)(a\lambda_3+b)}{\lambda_1(a\lambda_2+b)}\leq\frac{(M_1b+\delta\beta)}{(M_2b-k\delta\beta)}, \tag{16}$$

или неравенство (16) не выполнено, но

$$\begin{gathered}\exp\left(\frac{\lambda_3\left((a\lambda_2+b)e^{\lambda_2\tilde t}-(a\lambda_1+b)e^{\lambda_1\tilde t}\right)}{(\lambda_1-\lambda_3)(a\lambda_2+b)e^{\lambda_2\tilde t}-(\lambda_2-\lambda_3)(a\lambda_1+b)e^{\lambda_1\tilde t}}\right)\cdot\\ \cdot\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(a\lambda_2+b)e^{\lambda_2\tilde t}-(\lambda_2-\lambda_3)(a\lambda_1+b)e^{\lambda_1\tilde t}}{\lambda_2(a\lambda_1+b)e^{\lambda_1\tilde t}-\lambda_1(a\lambda_2+b)e^{\lambda_2\tilde t}}\leq\frac{M_1b+\delta\beta}{M_2b-k\delta\beta},\end{gathered} \tag{17}$$

где $\tilde t$ определено равенством (13), h^* - равенством (14), и (M_2-M_1) достаточно мало, т.е. верно неравенство (15);

7. λ_i $(i=1-\ 4)$ вещественные, $\lambda_3<\lambda_1=\lambda_2<\lambda_4$, $a\lambda_i+b<0$;

8. λ_i $(i=1-\ 4)$ вещественные, $\lambda_3<\lambda_4<\lambda_1=\lambda_2$, $a\lambda_1+b>0$, $a\lambda_{3,4}+b<0$. Верно неравенство (11), или неравенство (11) не выполнено, но

$$\begin{gathered}\left(\frac{(a\lambda_1+b)(\lambda_1-\lambda_3)\tilde t-(a\lambda_3+b)}{(a\lambda_1+b)(\lambda_1-\lambda_4)\tilde t-(a\lambda_4+b)}\right)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_4-\lambda_3}}\cdot\\ \cdot\frac{(a\lambda_1+b)(\lambda_1-\lambda_3)\tilde t-(a\lambda_3+b)}{b-\lambda_1(a\lambda_1+b)\tilde t}\leq\frac{M_1b+\delta\beta}{M_2b-k\delta\beta},\end{gathered} \tag{18}$$

где $\tilde t$ находится из равенств

$$\begin{gathered}e^{\lambda_1\tilde t}\left(b-\lambda_1\,(a\lambda_1+b)\,\tilde t\right)=\\ =\frac{(M_2b-k\delta\beta)(a\lambda_1+b)}{h^*(M_1b+\delta\beta-a\lambda_1(M_2-M_1))+(a\lambda_1+b)(M_2-M_1)},\end{gathered} \tag{19}$$

$$h^*=\exp\left(\frac{a\lambda_1\,(M_2b+\delta\beta)}{(a\lambda_1+b)\,(M_1b+\delta\beta-a\lambda_1\,(M_2-M_1))}\right), \tag{20}$$

и $(M_2 - M_1)$ *достаточно мало, т.е. верно неравенство (15), где* h^* *определено равенством (20);*

9. λ_i *(*$i = 1- 4$*) вещественные,* $\lambda_3 = \lambda_4 < \lambda_1 = \lambda_2$, $a\lambda_1 + b > 0$, $a\lambda_3 + b < 0$. *Верно неравенство*

$$\exp\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}\right) \cdot \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_1} \leq \frac{(M_1 b + \delta\beta)}{(M_2 b - k\delta\beta)}, \tag{21}$$

или неравенство (21) не выполнено, но

$$\exp\left(\frac{\lambda_3\left(a + (a\lambda_1 + b)\,\tilde{t}\right)}{(a\lambda_1 + b)\left((\lambda_1 - \lambda_3)\,\tilde{t} + 1\right)}\right) \cdot \frac{(a\lambda_3 + b)\left((\lambda_3 - \lambda_1)\,\tilde{t} - 1\right)}{b - \lambda_1\,(a\lambda_1 + b)\,\tilde{t}} \leq \frac{M_1 b + \delta\beta}{M_2 b - k\delta\beta}, \tag{22}$$

где $\tilde{t}$ *находится из равенства (19),* h^* *определено равенством (20), и верно неравенство (15) при таком* h^**;*

10. $\lambda_{1,2} = \eta \pm i\mu$, $\mu > 0$, $\lambda_{3,4} = v \pm iw$, $w > 0$, *и верно неравенство*

$$\begin{gathered}\exp\left(\tfrac{v}{w}\left(arctg\left(-\tfrac{w\left(a\mu+(a\eta+b)tg\mu\tilde{t}\right)}{(a\nu+b)\mu+((v-\eta)(a\eta+b)-a\mu^2)tg\mu\tilde{t}}\right)+\pi r\right)\right)\cdot \\ \cdot\tfrac{\sqrt{(av+b)^2+a^2w^2}\sqrt{\mu^2-2\mu(v-\eta)tg\mu\tilde{t}+\left((v-\eta)^2+w^2\right)tg^2\mu\tilde{t}}}{\left|b\mu-(\eta(a\mu+b)+a\mu^2)tg\mu\tilde{t}\right|} \leq \tfrac{M_1b+\delta\beta}{M_2b-k\delta\beta},\end{gathered} \tag{23}$$

где

$$r = \begin{cases} 0, & \text{*если под знаком arctg в (23) стоит неотрицательная величина,*} \\ 1 & \text{*в противном случае,*} \end{cases}$$

$\tilde{t}$ *определено равенствами*

$$\begin{gathered}\exp\left(\eta\tilde{t}\right)\tfrac{\cos\mu\tilde{t}}{\mu}\left(b\mu - \left(\eta\,(a\mu + b) + a\mu^2\right)tg\mu\tilde{t}\right) = \\ = \tfrac{(M_2b-k\delta\beta)\sqrt{(a\eta+b)^2+a^2\mu^2}}{h^*\sqrt{k^*}+(M_2-M_1)\sqrt{(a\eta+b)^2+a^2\mu^2}},\end{gathered} \tag{24}$$

$$k^* = a^2\beta\,(M_2 - M_1)^2 - 2a\eta\,(M_1 b + \delta\beta)\,(M_2 - M_1) + (M_1 b + \delta\beta)^2\,, \tag{25}$$

$$\begin{gathered}h^* = \\ = \exp\left(\tfrac{\eta}{\mu}arctg\tfrac{a\mu(M_2b+\delta\beta)}{(a\eta+b)(M_1b+\delta\beta)-(M_2-M_1)(a\eta(a\eta+b)+a^2\mu^2)} + \tfrac{\eta}{\mu}\pi r_1\right),\end{gathered} \tag{26}$$

$$r_1 = \begin{cases} 0, & \textit{если под знаком arctg в (26) стоит неотрицательная величина,} \\ 1 & \textit{в противном случае,} \end{cases}$$

и $(M_2 - M_1)$ *достаточно мало, т.е. верно неравенство*

$$h^* \left(h^* + \frac{(M_2 - M_1)\sqrt{(a\eta + b)^2 + a^2\mu^2}}{\sqrt{k^*}} \right) \leq 1, \tag{27}$$

где h^*, k^* *определены равенствами (25), (26);*

11. $\lambda_{1,2}$ *вещественные,* $\lambda_1 < \lambda_2$, $a\lambda_{1,2} + b > 0$, $\lambda_{3,4} = v \pm iw$, $w > 0$. *Верно неравенство*

$$\begin{gathered} \exp\left(\tfrac{v}{w}\left(arctg\left(\tfrac{w}{\lambda_1 - v}\right) + \pi r_0\right)\right) \frac{(a\lambda_1+b)(M_1+M_2)}{(1-k)(-\lambda_1)\delta\sqrt{(\lambda_1-v)^2+w^2}} \leq \\ \leq \frac{M_1 b + \delta\beta}{M_2 b - k\delta\beta}, \end{gathered} \tag{28}$$

где

$$r_0 = \begin{cases} 0, & \textit{если } \lambda_1 - v \geq 0, \\ 1, & \textit{если } \lambda_1 - v < 0, \end{cases}$$

или неравенство (28) не выполнено, но

$$\begin{gathered} \exp\left(\tfrac{v}{w}\left(arctg\left(\frac{w\left((a\lambda_1+b)e^{\lambda_1\tilde{t}} - (a\lambda_2+b)e^{\lambda_2\tilde{t}}\right)}{\left((a\lambda_1+b)(\lambda_2-v)e^{\lambda_1\tilde{t}} - (a\lambda_2+b)(\lambda_1-v)e^{\lambda_2\tilde{t}}\right)}\right) + \pi r\right)\right) \cdot \\ \cdot \frac{\sqrt{(av+b)^2 + a^2w^2}\sqrt{\left((\lambda_1-v)e^{\lambda_1\tilde{t}} - (\lambda_2-v)e^{\lambda_2\tilde{t}}\right)^2 + w^2\left(e^{\lambda_1\tilde{t}} - e^{\lambda_2\tilde{t}}\right)^2}}{\left|\lambda_2(a\lambda_1+b)e^{\lambda_1\tilde{t}} - \lambda_1(a\lambda_2+b)e^{\lambda_2\tilde{t}}\right|} \leq \frac{M_1 b + \delta\beta}{M_2 b - k\delta\beta}, \end{gathered} \tag{29}$$

где

$$r = \begin{cases} 0, & \textit{если под знаком arctg в (29) стоит неотрицательная величина,} \\ 1 & \textit{в противном случае,} \end{cases}$$

$\tilde{t}$, h^* *определены равенствами (13), (14), и верно неравенство (15);*

12. $\lambda_{1,2} = \eta \pm i\mu$, $\mu > 0$, $\lambda_{3,4}$ *вещественные,* $\lambda_3 < \lambda_4$, $a\lambda_{3,4} + b < 0$, *и выполнено неравенство*

$$\left(\frac{(a\lambda_3+b)\mu-\big((a\eta+b)(\eta-\lambda_3)+a\mu^2\big)tg\mu\tilde{t}}{(a\lambda_4+b)\mu-((a\eta+b)(\eta-\lambda_4)+a\mu^2)tg\mu\tilde{t}}\right)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_4-\lambda_3}}\cdot \\ \cdot\frac{\big((a\eta+b)(\eta-\lambda_3)+a\mu^2\big)tg\mu\tilde{t}-(a\lambda_3+b)\mu}{b\mu-(\eta(a\eta+b)+a\mu^2)tg\mu\tilde{t}}\leq\frac{M_1b+\delta\beta}{M_2b-k\delta\beta}, \tag{30}$$

где $\tilde{t}$, h^*,k^* определены равенствами (24)-(26), и верно неравенство (27) при таких h^*, k^*;

13. $\lambda_{1,2}$ вещественные, $\lambda_1=\lambda_2$, $a\lambda_1+b>0$, $\lambda_{3,4}=v\pm iw$, $w>0$. Верно неравенство (28), или неравенство (28) не выполнено, но

$$\exp\left(\frac{v}{w}\left(arctg\left(\frac{w\big(a+(a\lambda_1+b)\tilde{t}\big)}{(a\lambda_1+b)(\lambda_1-v)\tilde{t}-(av+b)}\right)+\pi r\right)\right)\cdot \\ \cdot\frac{(a\lambda_1+b)\sqrt{\big(1+(\lambda_1-v)\tilde{t}\big)^2+w^2\tilde{t}^2}}{b-\lambda_1(a\lambda_1+b)\tilde{t}}\leq\frac{M_1b+\delta\beta}{M_2b-k\delta\beta}, \tag{31}$$

где

$$r=\begin{cases}0, & \text{если под знаком arctg в (31) стоит неотрицательная величина,}\\ 1 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$\tilde{t}$, h^* определены равенствами (19), (20), и верно неравенство (15) при таком h^*;

14. $\lambda_{1,2}=\eta\pm i\mu$, $\mu>0$, $\lambda_{3,4}$ вещественные, $\lambda_3=\lambda_4$, $a\lambda_3+b<0$, и выполнено неравенство

$$\exp\left(\frac{\lambda_3\big(a\mu+(a\eta+b)tg\mu\tilde{t}\big)}{(a\lambda_3+b)\big((\lambda_3-\eta)tg\mu\tilde{t}-\mu\big)}\right)\cdot\frac{(a\lambda_3+b)\big((\lambda_3-\eta)tg\mu\tilde{t}-\mu\big)}{b\mu-(\eta(a\eta+b)+a\mu^2)tg\mu\tilde{t}}\leq \\ \leq\frac{M_1b+\delta\beta}{M_2b-k\delta\beta}, \tag{32}$$

где $\tilde{t}$, h^*, k^* определены равенствами (24)-(26), и верно неравенство (27) при таких h^*, k^*.

Тогда система (1) абсолютно устойчива в классе нелинейностей $H\,[M_1,\,M_2]$. Глобально притягивающее множество Γ^+ содержится в множестве Ω, которое представляет собой объединение двух прямоугольников:

$\Omega=K_{12+}K_{12-}O_{12-}O_{12+}\cup K_{22+}K_{22-}O_{22-}O_{22+}$.

Доказательство теоремы проводится с помощью метода систем сравнения. В качестве систем сравнения используются системы с нелинейностями вида (7) и (8).

Требование малости величины $(M_2 - M_1)$ в теореме существенно. При невыполнении условий (15) и (27) в соответствующих случаях, в системе из класса $H\,[M_1,\, M_2]$ могут появиться два предельных цикла при некоторых значениях параметров. Такие примеры построены для случая $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$.

Литература

1. Лурье А.И., Постников В.Н. К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. 1944. Т. 8, №3. С. 246-248.

2. Леонов Г.А. Необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости двумерных нестационарных систем // Автоматика и телемеханика. 2005.№7. С. 43-53.

3. Афонин С.М. Абсолютная устойчивость системы управления деформацией пьезопреобразователя // Известия РАН. Сер. Теория и системы управления. 2005. №2. С. 112-119.

4. Афонин С.М. Условия абсолютной устойчивости системы управления деформацией электромагнитоупругого преобразователя // Доклады Академии Наук. 2006. Т. 411, №5. С. 603-608.

5. Барабанов Н.Е., Якубович В.А. Абсолютная устойчивость систем регулирования с одной гистерезисной нелинейностью // Автоматика и телемеханика. 1979. №12. С. 5-11.

6. Звягинцева Т.Е. Глобальная устойчивость систем автоматического управления с гистерезисной нелинейностью // Электронный журнал "Дифференциальные уравнения и процессы управления". 2013.№4. С. 84-92.