ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2014
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Моделирование динамических систем

Условия существования предельного цикла в одном классе систем с гистерезисной нелинейностью [1]

Звягинцева Т.Е.

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
198504, Россия, Санкт-Петербург, Старый Петергоф,
Университетский проспект, дом 28.
e − mail : zv_tatiana@mail.ru

Аннотация

В работе рассмотрен класс двумерных систем автоматического управления с гистерезисной нелинейностью, которая не удовлетворяет секторному условию и аппроксимируется гистерезисными кусочно-линейными характеристиками. Для таких систем приводятся условия существования предельного цикла, сформулированные через коэффициенты системы. Эти условия получены с помощью метода систем сравнения.

Abstract

The class of two-dimensional control systems with hysteresis nonlinearity is considered. We assume that the nonlinearity does not satisfy the sectoral condition and is piecewise linear approximated. The coefficient conditions for the existence of limit cycles are stated by the comparison systems method.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант є 13-01-00624.

1. Введение

Вопросы исследования поведения решений систем с гистерезисными нелинейностями возникают в различных прикладных задачах из многих областей науки и техники, например, в задачах физики, механики, биологии, медицины и экономики. Поэтому в последние десятилетия этим вопросам посвящено большое число работ, обширную библиографию и новые результаты по этой теме можно найти, например, в книге [1].

Во многих статьях и монографиях изучаются системы с различными нелинейностями, удовлетворяющими секторному условию. В этой работе, как и в статьях [2, 3], мы рассматриваем двумерную систему с гистерезисной нелинейностью, которая секторному условию не удовлетворяет и аппроксимируется кусочно-линейными характеристиками.

К системам прикладного характера, как правило, предъявляются жесткие требования устойчивости, без этих требований рабочий режим системы может оказаться вообще нереализуемым. В одних задачах должна быть обеспечена абсолютная устойчивость системы. Коэффициентные условия такой устойчивости даны в работе [3]. В других задачах рабочими режимами являются незатухающие колебательные процессы, и для функционирования системы нужно обеспечить наличие устойчивого предельного цикла. В этой статье получены условия на коэффициенты системы, при выполнении которых в системе существует такой цикл.

Рассмотрим двумерную систему автоматического управления, содержащую один нелинейный гистерезисный элемент с характеристикой $\varphi\ [t, \sigma, \varphi_0]$, представленной на рис. 1.

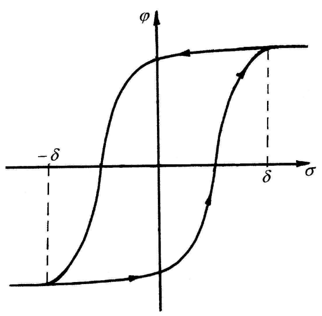

Рис. 1. Нелинейная характеристика системы (1).

Аналитически такая система записывается в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x - \varphi\left[t, \sigma, \varphi_0\right], \end{cases} \tag{1}$$

где

$$\varphi\left[t, \sigma, \varphi_0\right] = \begin{cases} \varphi_1\left(\sigma\left(t\right)\right), & \textit{если}\ \ \sigma \geq -\delta, \\ \varphi_2\left(\sigma\left(t\right)\right), & \textit{если}\ \ \sigma \leq \delta, \end{cases} \tag{2}$$

$\delta > 0$, $\sigma = ay + bx$; $\varphi_1(\sigma)$ и $\varphi_2(\sigma)$ непрерывны, $\varphi_1(\delta) = \varphi_2(\delta)$, $\varphi_1(-\delta) = \varphi_2(-\delta)$; направление обхода петли гистерезиса на рис. 1 указано стрелками: $\varphi_1(\sigma(t))$ убывает с ростом t при $\sigma(t) \in [-\delta, \delta]$, $\varphi_2(\sigma(t))$ возрастает с ростом t при $\sigma(t) \in [-\delta, \delta]$.

Считаем, что $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $b^2 - \alpha ab + a^2\beta \neq 0$, т.е. при $\varphi\left[t, \sigma, \varphi_0\right] \equiv 0$ система (1) асимптотически устойчива, и передаточная функция системы (1) является невырожденной. Не умаляя общности рассуждений, считаем, что $a > 0$. Будем считать также, что $b > 0$ (случай $b < 0$ рассматривается аналогично).

Определение решения системы (1) дано в работе [2]. В работе [3] определен класс нелинейностей $H\left[M_1, M_2\right]$ и приведены условия абсолютной устойчивости системы (1) с нелинейностью из этого класса. В этой статье определим условия, при выполнении которых в системе с такой нелинейностью существует предельный цикл.

Фазовая поверхность P системы (1) представляет собой многообразие с краем, состоящее из двух листов: $P = P_1 \cup P_2$.

На листе $P_1 = \left\{(x, y) : \sigma \geq -\delta,\ \dot{\sigma}\,\Big|_{\sigma \in [-\delta, \delta]} \leq 0\right\}$ система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x - \varphi_1\left(\sigma\left(t\right)\right), \end{cases} \tag{3}$$

здесь $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_1 = a\left(-\alpha y - \beta x - \varphi_1\left(\sigma\left(t\right)\right)\right) + by$ - производная $\sigma = ay + bx$ в силу системы (3),

на листе $P_2 = \left\{(x, y) : \sigma \leq \delta,\ \dot{\sigma}\,\Big|_{\sigma \in [-\delta, \delta]} \geq 0\right\}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x - \varphi_2\left(\sigma\left(t\right)\right), \end{cases} \tag{4}$$

где $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_2 = a\left(-\alpha y - \beta x - \varphi_2\left(\sigma\left(t\right)\right)\right) + by$ - производная σ в силу системы (4).

Фазовая точка переходит с P_1 на P_2 по лучу $L_1 = \{(x, y) : \sigma = -\delta,\ \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_1 \leq 0\}$, с листа P_2 на P_1 - по лучу $L_2 = \{(x, y) : \sigma = \delta,\ \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_2 \geq 0\}$. $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ - край многообразия P.

$\Gamma_1 = \{(x, y) :\ \sigma \in [-\delta, \delta],\ \dot{\sigma}_1 = 0\} \subset P_1$, $\Gamma_2 = \{(x, y) :\ \sigma \in [-\delta, \delta],\ \dot{\sigma}_2 = 0\} \subset P_2$.

O_1 и O_2 - положения равновесия систем (3) и (4) соответственно. O_j имеет координаты $(\xi_j, 0)$, где ξ_j - решение уравнения $\varphi_j\left(b\xi_j\right) = -\beta\xi_j$, $j = 1, 2$.

Пусть функции $\varphi_1\left(\sigma\right)$ и $\varphi_2\left(\sigma\right)$ мажорируются кусочно-линейными функциями: на листе P_1

$$\psi_{1-}\left(\sigma\right) \leq \varphi_1\left(\sigma\right) \leq \psi_{1+}\left(\sigma\right), \tag{5}$$

где

$$\psi_{1-}\left(\sigma\right) = \begin{cases} M_1, & \textit{если}\ \ \sigma \geq -k\delta, \\ \frac{1}{(1-k)\delta}\left(\left(M_1 + M_2\right)\sigma + \delta\left(M_1 + kM_2\right)\right), & \textit{если}\ \ -\delta \leq \sigma \leq -k\delta, \end{cases}$$

$$\psi_{1+}\left(\sigma\right) = \begin{cases} M_2, & \textit{если}\ \ \sigma \geq -k\delta, \\ \frac{1}{(1-k)\delta}\left(\left(M_1 + M_2\right)\sigma + \delta\left(kM_1 + M_2\right)\right), & \textit{если}\ \ -\delta \leq \sigma \leq -k\delta, \end{cases}$$

и на листе P_2

$$\psi_{2-}\left(\sigma\right) \leq \varphi_2\left(\sigma\right) \leq \psi_{2+}\left(\sigma\right), \tag{6}$$

где

$$\psi_{2-}\left(\sigma\right) = \begin{cases} -M_2, & \textit{если}\ \ \sigma \leq k\delta, \\ \frac{1}{(1-k)\delta}\left(\left(M_1 + M_2\right)\sigma - \delta\left(kM_1 + M_2\right)\right), & \textit{если}\ \ k\delta \leq \sigma \leq \delta, \end{cases}$$

$$\psi_{2+}\left(\sigma\right) = \begin{cases} -M_1, & \textit{если}\ \ \sigma \leq k\delta, \\ \frac{1}{(1-k)\delta}\left(\left(M_1 + M_2\right)\sigma - \delta\left(M_1 + kM_2\right)\right), & \textit{если}\ \ k\delta \leq \sigma \leq \delta, \end{cases}$$

$M_2 > M_1 > 0$, $0 < k < 1$ (рис. 2).

Нелинейность (2) принадлежит классу $H\,[M_1,\, M_2]$, если функции $\varphi_1\,(\sigma)$, $\varphi_2\,(\sigma)$ удовлетворяют условиям (5), (6).

Так же, как и в работе [3], ведем в рассмотрение две системы сравнения вида (1) с гистерезисными нелинейностями, имеющими кусочно-линейные характеристики. Для первой системы нелинейность имеет вид

$$\varphi\;[t,\sigma,\varphi_0] = \psi_+\;[t,\sigma,\varphi_0] = \begin{cases} \psi_{1+}\,(\sigma\,(t))\;, & \textit{если}\;\; \sigma \geq -\delta, \\ \psi_{2+}\,(\sigma\,(t))\,, & \textit{если}\;\; \sigma \leq \delta, \end{cases} \tag{7}$$

для второй системы:

$$\varphi\;[t,\sigma,\varphi_0] = \psi_-\;[t,\sigma,\varphi_0] = \begin{cases} \psi_{1-}\,(\sigma\,(t))\;, & \textit{если}\;\; \sigma \geq -\delta, \\ \psi_{2-}\,(\sigma\,(t))\,, & \textit{если}\;\; \sigma \leq \delta. \end{cases} \tag{8}$$

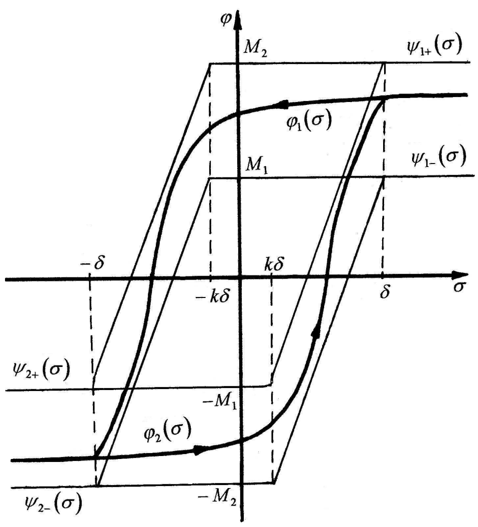

Рис. 2. Аппроксимация нелинейной характеристики кусочно-линейными функциями.

Фазовая поверхность системы (1) с нелинейностью (7): $P_+ = P_{1+} \cup P_{2+}$.

Разобьем каждый из листов фазовой поверхности на две части: $P_{1+} = P_{11+} \cup P_{12+}$, $P_{2+} = P_{21+} \cup P_{22+}$:

$\psi_{1+}\,(\sigma\,(t)) = M_2$ на P_{11+}; $\psi_{1+}\,(\sigma\,(t)) = \frac{1}{(1-k)\delta}\,((M_1+M_2)\,\sigma + \delta\,(kM_1+M_2))$ на P_{12+}; $\psi_{2+}\,(\sigma\,(t)) = -M_1$ на P_{21+}; и $\psi_{2+}\,(\sigma\,(t)) = \frac{1}{(1-k)\delta}\,((M_1+M_2)\,\sigma - \delta\,(M_1+kM_2))$ на P_{22+}.

Переход фазовой точки с листа P_{11+} на лист P_{12+} происходит по лучу L_{11+}; с листа P_{12+} на лист P_{21+} - по лучу L_{12+}. Точка переходит с листа P_{21+} на лист P_{22+} по лучу L_{21+}, а с листа P_{22+} на лист P_{11+}- по лучу L_{22+}.

Аналогично, фазовая поверхность системы (1) с нелинейностью (8) - $P_- = P_{1-} \cup P_{2-}$. Разобьем P_{i-} на две части P_{ij-} и введем лучи перехода L_{ij-}, $i, j = 1, 2$.

Обозначим через $K_{ij\pm}$ начало луча $L_{ij\pm}$, $i, j = 1, 2$.

$P_{1-} \subset P_1 \subset P_{1+}$, $P_{2+} \subset P_2 \subset P_{2-}$, $\Gamma \subset (P_{1+} \backslash P_{1-}) \cup (P_{2-} \backslash P_{2+})$.

Система (1) с нелинейностью (7) имеет положения равновесия $O_{11+}\left(-u_1, 0\right) \in P_{11+}$ и $O_{21+}\left(v_1, 0\right) \in P_{21+}$, если $M_2 b \leq k\delta\beta$, и положения равновесия $O_{12+}\left(-u_2, 0\right) \in P_{12+}$ и $O_{22+}\left(v_2, 0\right) \in P_{22+}$, если $M_2 b > k\delta\beta$, где $u_1 = \frac{M_2}{\beta}$, $u_2 = \frac{(kM_1+M_2)\delta}{\beta\delta(1-k)+(M_1+M_2)b}$, $v_1 = \frac{M_1}{\beta}$, $v_2 = \frac{(M_1+kM_2)\delta}{\beta\delta(1-k)+(M_1+M_2)b}$.

Положения равновесия системы (1) с нелинейностью (8): $O_{11-}\left(-v_1, 0\right) \in P_{11-}$ и

$O_{21-}\left(u_1, 0\right) \in P_{21-}$, если $M_1 b \leq k\delta\beta$, и $O_{12-}\left(-v_2, 0\right) \in P_{12-}$, $O_{22-}\left(u_2, 0\right) \in P_{22-}$, если $M_1 b > k\delta\beta$.

Характеристическое уравнение положений равновесия $O_{11\pm}$ и $O_{21\pm}$:

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0, \tag{9}$$

характеристическое уравнение $O_{12\pm}$ и $O_{22\pm}$:

$$\lambda^2 + \left(\alpha + \frac{\left(M_1 + M_2\right) a}{\left(1-k\right)\delta}\right)\lambda + \left(\beta + \frac{\left(M_1 + M_2\right) b}{\left(1-k\right)\delta}\right) = 0. \tag{10}$$

Обозначим через λ_1, λ_2 корни уравнения (9), а через λ_3, λ_4 - корни (10).

2. Основной результат.

Теорема. *Пусть $M_1 b > k\delta\beta$ и выполнено одно из условий 1-9.*

1. λ_i $(i = 1-4)$ вещественные, $\lambda_3 < \lambda_4 < \lambda_1 < \lambda_2$, $a\lambda_{1,2} + b > 0$, $a\lambda_{3,4} + b < 0$, и выполнены неравенства

$$\left(\frac{(\lambda_2 - \lambda_4)(a\lambda_3 + b)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(a\lambda_4 + b)}\right)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_3}} > \frac{\lambda_1(a\lambda_2 + b)}{(\lambda_2 - \lambda_4)(a\lambda_3 + b)} \frac{(M_1 b + \delta\beta)}{(M_2 b - k\delta\beta)}, \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(a\lambda_2+b)e^{\lambda_2 \hat{t}} - (\lambda_2-\lambda_3)(a\lambda_1+b)e^{\lambda_1 \hat{t}}}{(\lambda_1-\lambda_4)(a\lambda_2+b)e^{\lambda_2 \hat{t}} - (\lambda_2-\lambda_4)(a\lambda_1+b)e^{\lambda_1 \hat{t}}}\right)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_4-\lambda_3}} \cdot \\ \cdot \frac{(\lambda_1-\lambda_3)(a\lambda_2+b)e^{\lambda_2 \hat{t}} - (\lambda_2-\lambda_3)(a\lambda_1+b)e^{\lambda_1 \hat{t}}}{\lambda_2(a\lambda_1+b)e^{\lambda_1 \hat{t}} - \lambda_1(a\lambda_2+b)e^{\lambda_2 \hat{t}}} \geq \frac{M_2 b+\delta\beta}{M_1 b-k\delta\beta},\end{gathered} \tag{12}$$

где $\tilde{t}$ определено равенством

$$\lambda_2\left(a\lambda_1+b\right)e^{\lambda_1\hat{t}}-\lambda_1\left(a\lambda_2+b\right)e^{\lambda_2\hat{t}}= \\ =\frac{(M_1b-k\delta\beta)(a\lambda_1+b)(\lambda_2-\lambda_1)}{h^{**}(M_2b+\delta\beta+a\lambda_1(M_2-M_1))-(a\lambda_1+b)(M_2-M_1)}, \tag{13}$$

$$h^{**}=\left(\frac{\left(a\lambda_2+b\right)\left(M_2b+\delta\beta+a\lambda_1\left(M_2-M_1\right)\right)}{\left(a\lambda_1+b\right)\left(M_2b+\delta\beta+a\lambda_2\left(M_2-M_1\right)\right)}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}} \tag{14}$$

2. λ_i $(i=1-4)$ вещественные, $\lambda_3=\lambda_4<\lambda_1<\lambda_2$, $a\lambda_{1,2}+b>0$, $a\lambda_3+b<0$, и верны неравенства

$$\exp\left(-\frac{\lambda_3(a\lambda_2+b)}{(\lambda_2-\lambda_3)(a\lambda_3+b)}\right)\cdot\frac{(\lambda_2-\lambda_3)(a\lambda_3+b)}{\lambda_1(a\lambda_2+b)}>\frac{(M_1b+\delta\beta)}{(M_2b-k\delta\beta)}, \tag{15}$$

$$\exp\left(\frac{\lambda_3\big((a\lambda_2+b)e^{\lambda_2\hat{t}}-(a\lambda_1+b)e^{\lambda_1\hat{t}}\big)}{(\lambda_1-\lambda_3)(a\lambda_2+b)e^{\lambda_2\hat{t}}-(\lambda_2-\lambda_3)(a\lambda_1+b)e^{\lambda_1\hat{t}}}\right)\cdot \\ \cdot\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(a\lambda_2+b)e^{\lambda_2\hat{t}}-(\lambda_2-\lambda_3)(a\lambda_1+b)e^{\lambda_1\hat{t}}}{\lambda_2(a\lambda_1+b)e^{\lambda_1\hat{t}}-\lambda_1(a\lambda_2+b)e^{\lambda_2\hat{t}}}\geq\frac{M_2b+\delta\beta}{M_1b-k\delta\beta}, \tag{16}$$

где $\hat{t}$ определено равенством (13), h^{**} - равенством (14);

3. λ_i $(i=1-4)$ вещественные, $\lambda_3<\lambda_4<\lambda_1=\lambda_2$, $a\lambda_1+b>0$, $a\lambda_{3,4}+b<0$, выполнены неравенства (11) и

$$\left(\frac{(a\lambda_1+b)(\lambda_1-\lambda_3)\hat{t}-(a\lambda_3+b)}{(a\lambda_1+b)(\lambda_1-\lambda_4)\hat{t}-(a\lambda_4+b)}\right)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_4-\lambda_3}}\cdot \\ \cdot\frac{(a\lambda_1+b)(\lambda_1-\lambda_3)\hat{t}-(a\lambda_3+b)}{b-\lambda_1(a\lambda_1+b)\hat{t}}\geq\frac{M_2b+\delta\beta}{M_1b-k\delta\beta}, \tag{17}$$

где $\hat{t}$ находится из равенств

$$e^{\lambda_1\hat{t}}\left(b-\lambda_1\left(a\lambda_1+b\right)\hat{t}\right)= \\ =\frac{(M_1b-k\delta\beta)(a\lambda_1+b)}{h^{**}(M_2b+\delta\beta+a\lambda_1(M_2-M_1))-(a\lambda_1+b)(M_2-M_1)}, \tag{18}$$

$$h^{**}=\exp\left(\frac{a\lambda_1\left(M_1b+\delta\beta\right)}{\left(a\lambda_1+b\right)\left(M_2b+\delta\beta+a\lambda_1\left(M_2-M_1\right)\right)}\right); \tag{19}$$

4. λ_i $(i=1-4)$ вещественные, $\lambda_3=\lambda_4<\lambda_1=\lambda_2$, $a\lambda_1+b>0$, $a\lambda_3+b<0$, и верны неравенства

$$\exp\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_3}\right)\cdot\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_1}>\frac{(M_1b+\delta\beta)}{(M_2b-k\delta\beta)}, \tag{20}$$

$$\exp\left(\frac{\lambda_3\left(a+(a\lambda_1+b)\,\hat{t}\right)}{(a\lambda_1+b)\left((\lambda_1-\lambda_3)\,\hat{t}+1\right)}\right)\cdot\frac{(a\lambda_3+b)\left((\lambda_3-\lambda_1)\,\hat{t}-1\right)}{b-\lambda_1\,(a\lambda_1+b)\,\hat{t}}\geq\frac{M_2b+\delta\beta}{M_1b-k\delta\beta}, \tag{21}$$

где $\hat{t}$ *определено равенством (18),* h^{**} *- равенством (19);*

5. $\lambda_{1,\,2}=\eta\pm i\mu$, $\mu>0$, $\lambda_{3,\,4}=v\pm iw$, $w>0$, *и верно неравенство*

$$\begin{gathered}\exp\left(\tfrac{v}{w}\left(arctg\left(-\tfrac{w\left(a\mu+(a\eta+b)tg\mu\hat{t}\right)}{(a\nu+b)\mu+((v-\eta)(a\eta+b)-a\mu^2)tg\mu\hat{t}}\right)+\pi r\right)\right)\cdot\\ \cdot\tfrac{\sqrt{(av+b)^2+a^2w^2}\sqrt{\mu^2-2\mu(v-\eta)tg\mu\hat{t}+\left((v-\eta)^2+w^2\right)tg^2\mu\hat{t}}}{\left|b\mu-(\eta(a\mu+b)+a\mu^2)tg\mu\hat{t}\right|}\geq\tfrac{M_2b+\delta\beta}{M_1b-k\delta\beta},\end{gathered} \tag{22}$$

где

$$r=\begin{cases}0, & \text{если под знаком arctg в (22) стоит неотрицательная величина,}\\ 1 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$\hat{t}$ *определено равенствами*

$$\begin{gathered}\exp\left(\eta\hat{t}\right)\tfrac{\cos\mu\hat{t}}{\mu}\left(b\mu-\left(\eta\,(a\mu+b)+a\mu^2\right)tg\mu\hat{t}\right)=\\ =\tfrac{(M_1b-k\delta\beta)\sqrt{(a\eta+b)^2+a^2\mu^2}}{h^{**}\sqrt{k^{**}}-(M_2-M_1)\sqrt{(a\eta+b)^2+a^2\mu^2}},\end{gathered} \tag{23}$$

$$k^{**}=a^2\beta\,(M_2-M_1)^2+2a\eta\,(M_2b+\delta\beta)\,(M_2-M_1)+(M_2b+\delta\beta)^2\,, \tag{24}$$

$$h^{**}=\exp\left(\frac{\eta}{\mu}arctg\frac{a\mu\,(M_1b+\delta\beta)}{(a\eta+b)\,(M_2b+\delta\beta)+(M_2-M_1)\,(a\eta\,(a\eta+b)+a^2\mu^2)}+\frac{\eta}{\mu}\pi r_1\right), \tag{25}$$

$$r_1=\begin{cases}0, & \text{если под знаком arctg в (25) стоит неотрицательная величина,}\\ 1 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

6. $\lambda_{1,\,2}$ *вещественные,* $\lambda_1<\lambda_2$, $a\lambda_{1,2}+b>0$, $\lambda_{3,\,4}=v\pm iw$, $w>0$, *и верны неравенства*

$$\exp\left(\frac{v}{w}\left(arctg\left(\frac{w}{\lambda_1-v}\right)+\pi r_0\right)\right)\frac{(a\lambda_1+b)\left(M_1+M_2\right)}{(1-k)\left(-\lambda_1\right)\delta\sqrt{\left(\lambda_1-v\right)^2+w^2}}>\frac{M_1b+\delta\beta}{M_2b-k\delta\beta}, \tag{26}$$

где

$$r_0=\begin{cases}0, & \textit{если}\ \ \lambda_1-v\geq 0,\\ 1, & \textit{если}\ \ \lambda_1-v<0,\end{cases}$$

$$\begin{gathered}\exp\left(\frac{v}{w}\left(arctg\left(\frac{w\left((a\lambda_1+b)e^{\lambda_1\hat{t}}-(a\lambda_2+b)e^{\lambda_2\hat{t}}\right)}{\left((a\lambda_1+b)(\lambda_2-v)e^{\lambda_1\hat{t}}-(a\lambda_2+b)(\lambda_1-v)e^{\lambda_2\hat{t}}\right)}\right)+\pi r\right)\right)\cdot\\ \cdot\frac{\sqrt{(av+b)^2+a^2w^2}\sqrt{\left((\lambda_1-v)e^{\lambda_1\hat{t}}-(\lambda_2-v)e^{\lambda_2\hat{t}}\right)^2+w^2\left(e^{\lambda_1\hat{t}}-e^{\lambda_2\hat{t}}\right)^2}}{\left|\lambda_2(a\lambda_1+b)e^{\lambda_1\hat{t}}-\lambda_1(a\lambda_2+b)e^{\lambda_2\hat{t}}\right|}\geq\frac{M_2b+\delta\beta}{M_1b-k\delta\beta},\end{gathered} \tag{27}$$

где

$$r=\begin{cases}0, & \textit{если под знаком arctg в (27) стоит неотрицательная величина},\\ 1 & \textit{в противном случае},\end{cases}$$

$\hat{t}$, h^{**} *определены равенствами (13), (14);*

7. $\lambda_{1,2}=\eta\pm i\mu$, $\mu>0$, $\lambda_{3,4}$ *вещественные,* $\lambda_3<\lambda_4$, $a\lambda_{3,4}+b<0$, *и выполнено неравенство*

$$\begin{gathered}\left(\frac{(a\lambda_3+b)\mu-\left((a\eta+b)(\eta-\lambda_3)+a\mu^2\right)tg\mu\hat{t}}{(a\lambda_4+b)\mu-((a\eta+b)(\eta-\lambda_4)+a\mu^2)tg\mu\hat{t}}\right)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_4-\lambda_3}}\cdot\\ \cdot\frac{\left((a\eta+b)(\eta-\lambda_3)+a\mu^2\right)tg\mu\hat{t}-(a\lambda_3+b)\mu}{b\mu-(\eta(a\eta+b)+a\mu^2)tg\mu\hat{t}}\geq\frac{M_2b+\delta\beta}{M_1b-k\delta\beta},\end{gathered} \tag{28}$$

где $\hat{t}$, h^{**}, k^{**} *определены равенствами (23)-(25);*

8. $\lambda_{1,2}$ *вещественные,* $\lambda_1=\lambda_2$, $a\lambda_1+b>0$, $\lambda_{3,4}=v\pm iw$, $w>0$, *и выполнены неравенства (26) и*

$$\begin{gathered}\exp\left(\frac{v}{w}\left(arctg\left(\frac{w\left((a\lambda_1+b)\hat{t}+a\right)}{(a\lambda_1+b)(\lambda_1-v)\hat{t}-(av+b)}\right)+\pi r\right)\right)\cdot\\ \cdot\frac{(a\lambda_1+b)\sqrt{\left(1+(\lambda_1-v)\hat{t}\right)^2+w^2\hat{t}^2}}{b-\lambda_1(a\lambda_1+b)\hat{t}}\geq\frac{M_2b+\delta\beta}{M_1b-k\delta\beta},\end{gathered} \tag{29}$$

где

$$r = \begin{cases} 0, & \textit{если под знаком arctg в (29) стоит неотрицательная величина,} \\ 1 & \textit{в противном случае,} \end{cases}$$

$\hat{t}$, h^{**} *определены равенствами (18), (19);*

9. $\lambda_{1,2} = \eta \pm i\mu$, $\mu > 0$, $\lambda_{3,4}$ *вещественные,* $\lambda_3 = \lambda_4$, $a\lambda_3 + b < 0$, *и выполнено неравенство*

$$\exp\left(\frac{\lambda_3\big(a\mu+(a\eta+b)tg\mu\hat{t}\big)}{(a\lambda_3+b)\big((\lambda_3-\eta)tg\mu\hat{t}-\mu\big)}\right)\cdot \\ \cdot\frac{(a\lambda_3+b)\big((\lambda_3-\eta)tg\mu\hat{t}-\mu\big)}{b\mu-(\eta(a\eta+b)+a\mu^2)tg\mu\hat{t}} \geq \frac{M_2b+\delta\beta}{M_1b-k\delta\beta}, \tag{30}$$

где $\hat{t}$, h^{**}, k^{**} *определены равенствами (23)- (25);*

Тогда система (1) с нелинейностью из класса $H\,[M_1,\,M_2]$ *имеет устойчивый предельный цикл.*

Доказательство теоремы проводится с помощью метода систем сравнения. В качестве систем сравнения используются системы с нелинейностями вида (7) и (8).

Литература:

1. Леонов Г.А., Шумафов М.М., Тешев В.А. Устойчивость систем с гистерезисом. С.-Петербург, Майкоп: Изд-во Адыгейского университета. 2012. 182 с.

2. Звягинцева Т.Е. Глобальная устойчивость систем автоматического управления с гистерезисной нелинейностью // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2013. №4. С.84-92.

3. Звягинцева Т.Е. Абсолютная устойчивость систем автоматического управления с гистерезисной нелинейностью // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2014. №2. С.1-12.