ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2017
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Моделирование динамических систем

УСЛОВИЯ НАЛИЧИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА В ОДНОЙ СИСТЕМЕ С ГИСТЕРЕЗИСОМ [1]

Звягинцева Т.Е.

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
198504, Россия, Санкт-Петербург,
Старый Петергоф, Университетский проспект, дом 28.
e-mail: zv_tatiana@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается двумерная система автоматического управления, содержащая один нелинейный гистерезисный элемент достаточно общего вида. Описано фазовое пространство системы. При некоторых ограничениях на правую часть системы с помощью второго метода Ляпунова получены условия наличия и условия отсутствия в системе предельного цикла.

Ключевые слова: гистерезис, фазовое пространство, предельный цикл, второй метод Ляпунова, функция Ляпунова

Abstract

In this paper a two-dimensional automatic control system with a single non-linear hysteresis element of a rather general form is considered. The phase space

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00452).

of the system is described. Under certain limitations on the right part of a system the conditions for the existence and absence of a limit cycle are obtained via Lyapunov's second method.

Keywords: hysteresis, phase space, limit cycle, Lyapunov's second method, Lyapunov's function

1. Введение

Проблемы глобальной устойчивости систем автоматического управления с различными гистерезисными нелинейностями и вопросы о существовании предельных циклов в таких системах являются важными при решении многих прикладных задач. Такие проблемы возникают, например, при исследовании реальных систем в различных разделах физики, механики, химии, в инженерных задачах. Изучению этих вопросов и исследованию абсолютной устойчивости динамических систем с гистерезисными нелинейностями определенных типов в последние несколько десятилетий посвящено большое количество работ (например, [1-14]). Для исследования таких систем, как правило, применяются методы качественной теории дифференциальных уравнений, частотные методы и второй метод Ляпунова.

Новые результаты в теории устойчивости и стабилизации систем с гистерезисными нелинейностями, а также обширная библиография по данной тематике, содержатся, например, в монографии Г.А. Леонова, М.М. Шумафова, В.А. Тешева [14].

В работах автора [15-18] были получены необходимые и достаточные условия глобальной устойчивости двумерной системы с кусочно-линейной гистерезисной характеристикой и с помощью метода систем сравнения изучены системы с гистерезисными характеристиками, которые аппроксимируются кусочно-линейными.

В этой работе рассматривается двумерная система, содержащая один нелинейный гистерезисный элемент более общего вида, чем в ранее опубликованных статьях. В статье описано фазовое пространство системы, получены условия наличия и условия отсутствия в системе предельного цикла при некоторых ограничениях на правую часть системы. Доказательство проводится с помощью второго метода Ляпунова. Функции Ляпунова сшиваются из нескольких функций вида: квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности.

2. Постановка задачи.

Рассмотрим
двумерную систему, содержащую один нелинейный гистерезисный элемент общего вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x - \varphi\left(\sigma\left(t\right)\right), \end{cases} \tag{1}$$

где $\sigma = ay + bx$, $b^2 - \alpha ab + a^2\beta \neq 0$, $a \neq 0$, $b > 0$, $\varphi\left(\sigma\left(t\right)\right)$ - гистерезисная нелинейность с характеристикой, представленной на рис. 1.

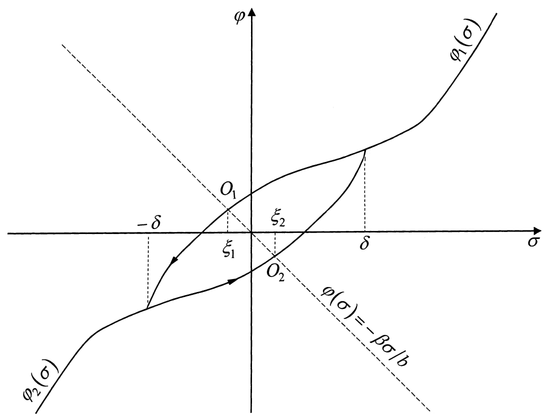

Рис. 1

Гистерезисная функция $\varphi\left(\sigma\left(t\right)\right)$ состоит из двух ветвей однозначных функций:

$$\varphi\left(\sigma\left(t\right)\right) = \begin{cases} \varphi_1\left(\sigma\left(t\right)\right), & \textit{если } \sigma \geq -\delta, \\ \varphi_2\left(\sigma\left(t\right)\right), & \textit{если } \sigma \leq \delta, \end{cases}$$

$\delta > 0$, $\varphi_1\left(\sigma\right)$ и $\varphi_2\left(\sigma\right)$ - дифференцируемые функции, $\varphi_1\left(\sigma\right) = -\varphi_2\left(-\sigma\right)$ для всех $\sigma \geq -\delta$, $\varphi_1\left(\pm\delta\right) = \varphi_2\left(\pm\delta\right)$. Направление обхода петли гистерезиса на рис. 1 указано стрелками: фазовая точка $\left(\sigma\left(t\right), \varphi\left(\sigma\left(t\right)\right)\right)$ при $\sigma\left(t\right) \in \left[-\delta, \delta\right]$ движется по кривой $\varphi = \varphi_1\left(\sigma\right)$, если $\sigma\left(t\right)$ убывает с ростом t, и по кривой $\varphi = \varphi_2\left(\sigma\right)$, если $\sigma\left(t\right)$ возрастает с ростом t. Переход точки с ветви $\varphi_1\left(\sigma\right)$ на ветвь $\varphi_2\left(\sigma\right)$ и наоборот, с ветви $\varphi_2\left(\sigma\right)$ на ветвь $\varphi_1\left(\sigma\right)$, возможен только при $\sigma\left(t\right) = \pm\delta$.

Известным преобразованием систему (1) можно привести к виду

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = u - f(\sigma), \\ \dot{u} = -g(\sigma), \end{cases} \tag{2}$$

где $f(\sigma)$, $g(\sigma)$ - гистерезисные функции:

$$f(\sigma) = \begin{cases} f_1(\sigma) & \textit{если } \sigma \geq -\delta, \\ f_2(\sigma), & \textit{если } \sigma \leq \delta, \end{cases} \quad g(\sigma) = \begin{cases} g_1(\sigma), & \textit{если } \sigma \geq -\delta, \\ g_2(\sigma), & \textit{если } \sigma \leq \delta, \end{cases}$$

$$f_j = a(\alpha\sigma + a\varphi_j(\sigma)), \quad g_j = a^2(\beta\sigma + b\varphi_j(\sigma)), \quad j = 1, 2.$$

Из сделанных выше предположений относительно функции $\varphi(\sigma)$ следует, что $f_1(\pm\delta) = f_2(\pm\delta)$, $g_1(\pm\delta) = g_2(\pm\delta)$ и $f_1(\sigma) = -f_2(-\sigma)$, $g_1(\sigma) = -g_2(-\sigma)$ для всех $\sigma \geq -\delta$.

В этой работе рассмотрим один из частных случаев возможного поведения функций $f(\sigma)$ и $g(\sigma)$. Будем предполагать, что

во-первых, существует единственное $\xi_1 \in (-\delta, \delta)$ такое, что

$$g_1(\xi_1) = 0; \quad g_1(\sigma) < 0 \;\; \textit{при} \;\; -\delta \leq \sigma < \xi_1; \;\; g_1(\sigma) > 0 \;\; \textit{при} \;\; \sigma > \xi_1; \tag{3}$$

и, во-вторых, существует значение $\sigma^* > \delta$ такое, что

$$f_1^{'}(\sigma^*) = 0; \quad f_1^{'}(\sigma) < 0 \;\; \textit{при} \;\; -\delta \leq \sigma < \sigma^*; \;\; f_1^{'}(\sigma) > 0 \;\; \textit{при} \;\; \sigma > \sigma^*, \tag{4}$$

В силу равенств $f_1(\sigma) = -f_2(-\sigma)$, $g_1(\sigma) = -g_2(-\sigma)$, аналогичные условиям (3), (4) требования выполнены и для функций $f_2(\sigma)$, $g_2(\sigma)$.

Согласно условию (3), существует по одной особой точке на каждом из листов фазового пространства систем (1) и (2) (рис. 1,2). Условие (4) накладывает ограничение на поведение функций $f_j(\sigma)$, то есть на скорость роста функций $\varphi_j(\sigma)$, $j = 1, 2$.

Фазовая поверхность P системы (2) - многообразие с краем, состоящее из двух листов: $P = P_1 \cup P_2$.

Лист P_1 задается неравенствами $\sigma \geq -\delta$ и $\dot{\sigma} = u - f_1(\sigma) \leq 0$ при $\sigma \in [-\delta, \delta]$. На этом листе система (2) имеет вид

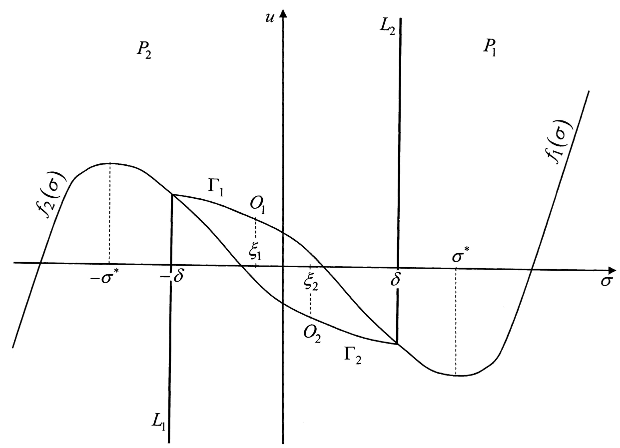

Рис. 2

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = u - f_1(\sigma), \\ \dot{u} = -g_1(\sigma), \end{cases} \tag{5}$$

на листе P_2, который задается неравенствами $\sigma \le \delta$ и $\dot{\sigma} = u - f_2(\sigma) \ge 0$ при $\sigma \in [-\delta, \delta]$, система (2) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = u - f_2(\sigma), \\ \dot{u} = -g_2(\sigma). \end{cases} \tag{6}$$

По лучу L_1, который определяется условиями $\sigma = -\delta$ и $\dot{\sigma} = u - f_1(\sigma) \le 0$, фазовая точка (σ, u) переходит с листа P_1 на лист P_2. Луч L_2 определяется условиями $\sigma = \delta$ и $\dot{\sigma} = u - f_2(\sigma) \ge 0$, по этому лучу фазовая точка переходит с листа P_2 на лист P_1.

Определим дугу Γ_j $(j = 1, 2)$ условиями: $\sigma \in (-\delta, \delta)$, $\dot{\sigma} = u - f_j(\sigma) = 0$, тогда $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ - край многообразия P. Наличие края многообразия обусловлено заданием направления движения фазовой точки по петле гистерезиса и невозможностью перехода траектории системы (2) с одного листа на другой при $\sigma \ne \pm\delta$.

Согласно условию (3), система (2) имеет ровно по одному положению равновесия на каждом из листов: положение равновесия O_j на листе P_j имеет координаты (ξ_j, η_j), где $g_j(\xi_j) = 0$, $\eta_j = f_j(\xi_j)$ $(j = 1, 2)$.

Решением системы (2) с начальными данными $t = \tau_0$, $(\sigma_0, u_0) \in P_1$ является решение системы (5) с этими же начальными данными. Траектория этого решения при $t > \tau_0$ либо стремится при $t \to +\infty$ к положению равновесия O_1 системы (5), либо достигает в конечный момент времени множества $\Gamma_1 \backslash O_1$, либо при некотором $t = \tau_1 > \tau_0$ выходит на луч L_1 в точке $(\sigma_1,\, u_1)$. В последнем случае решение (2) продолжается при $t > \tau_1$ на лист P_2 и является решением системы (6) с начальными данными $(\tau_1,\ \sigma_1,\, u_1)$.

Аналогично определяется решение системы (2) с начальными данными $t = \tau_0$, $(\sigma_0,\, u_0) \in P_2$.

Будем считать, что решения системы (2) с начальными данными $t = \tau_0$, $(\sigma_0,\, u_0) \in P$, достигающие края Γ многообразия P при некотором конечном $t = \tilde{\tau} \geq \tau_0$ в точке $(\tilde{\sigma},\, \tilde{u})$, продолжаются на бесконечный промежуток времени: $\sigma\,(t) \equiv \tilde{\sigma},\ \ u\,(t) \equiv \tilde{u}$ для всех $t \in [\tilde{\tau},\ +\infty)$.

Аналогично, решения (2) с начальными данными $t = \tau_0$, $(\sigma_0,\, u_0) \in P$, достигающие края Γ многообразия P при конечном $t = \bar{\tau} \leq \tau_0$ в точке $(\bar{\sigma},\, \bar{u})$, продолжаются на бесконечный промежуток времени: $\sigma\,(t) \equiv \bar{\sigma},\ \ u\,(t) \equiv \bar{u}$ для всех $t \in (-\infty,\ \bar{\tau}]$.

Таким образом все решения системы (2) становятся определенными при $t \in (-\infty,\, +\infty)$.

3. Теорема о существовании предельного цикла в системе (2).

Теорема 1. При сделанных выше предположениях

если существует значение $\tilde{\sigma} > \sigma^*$ такое, что

$$f_1\,(\tilde{\sigma}) > -f_1\,(\sigma^*)\,, \tag{7}$$

то в системе (2) существует по крайней мере один предельный цикл.

Доказательство теоремы 1.

Для доказательства теоремы построим на многообразии P два вложенных друг в друга замкнутых контура: внутренний контур, который траектории системы (2) пересекают изнутри наружу, и внешний контур, который траектории системы (2) пересекают снаружи внутрь. Существование таких контуров доказывает наличие по крайней мере одного предельного цикла в системе.

Сначала построим внутренний контур, который траектории системы пересекают изнутри наружу.

Рассмотрим на листе P_1 линии уровня функции Ляпунова

$$V_1(\sigma,u)=\frac{1}{2}(u-f_1(\sigma))^2+\int_{\xi_1}^{\sigma}g_1(\sigma)\,d\sigma. \tag{8}$$

Линия уровня T_1 функции V_1, проходящая через точку $A_1(\delta,f_1(\delta))$, выходит на луч L_1 в точке $B_1(-\delta,\ u_1)$, где

$$u_1=f_1(-\delta)-\sqrt{2\int_{-\delta}^{\delta}g_1(\sigma)\,d\sigma}<f_1(-\delta).$$

Заметим, что при $b>0$ интеграл под корнем в выражении для u_1 положителен, поскольку равен половине площади петли гистерезиса, умноженной на коэффициент a^2b:

$$\int_{-\delta}^{\delta}g_1(\sigma)\,d\sigma=a^2\int_{-\delta}^{\delta}(\beta\sigma+b\varphi_1(\sigma))\,d\sigma=a^2b\int_{-\delta}^{\delta}\varphi_1(\sigma)\,d\sigma.$$

$V_1(\xi_1,\ f_1(\xi_1))=0$ и $V_1(\sigma,u)>0$, если $(\sigma,u)\neq(\xi_1,\ f_1(\xi_1))$. Производная функции (8) в силу системы (5)

$$\dot V_1(\sigma,u)=-f_1'(\sigma)(u-f_1(\sigma))^2 \tag{9}$$

положительна на множестве $\Omega_1=\mathrm{P}_1\cap\{(\sigma,u):\ -\delta\le\sigma<\sigma^*\}$ в силу условия (4).

Очевидно, что $\dot\sigma\le0$, $\dot u>0$ на отрезке $B_1A_2\subset L_1$ и $\dot\sigma\ge0$, $\dot u<0$ на симметричном отрезке $B_2A_1\subset L_2$, поэтому замкнутый контур $A_1B_1A_2B_2$ является искомым внутренним контуром, который траектории системы (2) пересекают изнутри наружу.

Теперь построим внешний контур, который траектории системы (2) пересекают снаружи внутрь.

Возьмем на луче L_2 точку $C_1(\delta,\ u_2)$, где u_2 достаточно велико, $u_2>f_1(\tilde\sigma)$. Функция $f_1(\sigma)$ непрерывна и возрастает на промежутке $(\sigma^*,\ +\infty)$, поэтому существует значение $\sigma_2\in(\sigma^*,\ \tilde\sigma)$ такое, что

$$-f_1(\sigma^*)<f_1(\sigma_2)<f_1(\tilde\sigma)<u_2. \tag{10}$$

Горизонтальный отрезок $\{(\sigma,\ u_2),\ \delta\le\sigma\le\sigma_2\}\subset P_1$, соединяющий точки $C_1(\delta,\ u_2)$ и $D_1(\sigma_2,\ u_2)$, траектории системы (5) пересекают сверху вниз (рис. 3), поскольку на этом отрезке $\dot\sigma>0$, $\dot u<0$.

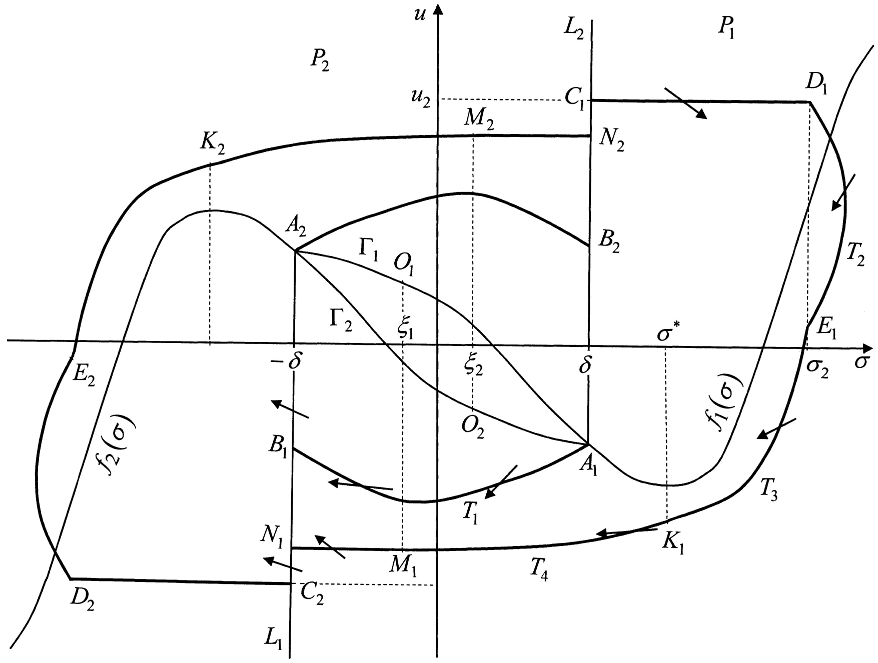

Рис. 3

Далее на множестве $\Omega_2 = \mathrm{P}_1 \cap \{(\sigma, u): \ \sigma \geq \sigma_2\}$ построим линию уровня T_2 функции Ляпунова

$$V_2(\sigma, u) = \frac{1}{2}(u - f_1(\sigma_2))^2 + \int_{\xi_1}^{\sigma} g_1(\sigma)\, d\sigma,$$

проходящую через точку D_1. Линия T_2 второй раз пересекает прямую $\{(\sigma, u) : \sigma = \sigma_2\}$ в точке $E_1(\sigma_2, u_3)$, где

$$u_3 = 2f_1(\sigma_2) - u_2. \tag{11}$$

$V_2(\sigma, u) > 0$, если $(\sigma, u) \neq (\xi_1, \ f_1(\sigma_2))$, и $V_2(\xi_1, \ f_1(\sigma_2)) = 0$. Производная функции $V_2(\sigma, u)$ в силу системы (5)

$$\dot{V}_2(\sigma, u) = -g_1(\sigma)(f_1(\sigma) - f_1(\sigma_2))$$

отрицательна на Ω_2, поскольку $g_1(\sigma) > 0$ и $f_1(\sigma) \geq f_1(\sigma_2)$ на множестве Ω_2 в силу условий (3) и (4).

На множестве $\Omega_3 = \mathrm{P}_1 \cap \{(\sigma, u): \ \sigma^* \leq \sigma \leq \sigma_2\}$ построим линию уровня T_3 функции Ляпунова (8), проходящую через точку E_1.

Линия уровня T_3 достигает прямой $\{(\sigma, u) : \sigma = \sigma^*\}$ в некоторой точке

$K_1\left(\sigma^*,\, u_4\right) \in P_1$. Из условия $V_1\left(\sigma_2, u_3\right) = V_1\left(\sigma^*, u_4\right)$ находим:

$$u_4 = f_1\left(\sigma^*\right) - \sqrt{\left(u_3 - f_1\left(\sigma_2\right)\right)^2 + 2\int_{\sigma^*}^{\sigma_2} g_1\left(\sigma\right) d\sigma}$$

или, учитывая (11),

$$u_4 = f_1\left(\sigma^*\right) - \sqrt{\left(u_2 - f_1\left(\sigma_2\right)\right)^2 + 2\int_{\sigma^*}^{\sigma_2} g_1\left(\sigma\right) d\sigma}. \qquad (12)$$

Согласно (9) производная функции V_1 в силу системы (5) отрицательна на множестве Ω_3, т.к. $f_1\left(\sigma\right)$ возрастает при $\sigma \in \left(\sigma^*,\, \sigma_2\right)$.

Далее на множестве $\Omega_4 = \mathrm{P}_1 \cap \left\{\left(\sigma, u\right) :\ \xi_1 \le \sigma \le \sigma^*\right\}$ построим линию уровня T_4 функции Ляпунова

$$V_3\left(\sigma, u\right) = \frac{1}{2}\left(u - f_1\left(\sigma^*\right)\right)^2 + \int_{\xi_1}^{\sigma} g_1\left(\sigma\right) d\sigma,$$

проходящую через точку K_1. Линия T_4 пересекает прямую $\left\{\left(\sigma, u\right) : \sigma = \xi_1\right\}$ в точке $M_1\left(\xi_1, u_5\right) \in P_1$. Из условия $V_3\left(\sigma^*, u_4\right) = V_3\left(\xi_1, u_5\right)$ получаем:

$$u_5 = f_1\left(\sigma^*\right) - \sqrt{\left(u_4 - f_1\left(\sigma^*\right)\right)^2 + 2\int_{\xi_1}^{\sigma^*} g_1\left(\sigma\right) d\sigma},$$

или, с учетом равенства (12),

$$u_5 = f_1\left(\sigma^*\right) - \sqrt{\left(u_2 - f_1\left(\sigma_2\right)\right)^2 + 2\int_{\xi_1}^{\sigma_2} g_1\left(\sigma\right) d\sigma}. \qquad (13)$$

$V_3\left(\xi_1,\ f_1\left(\sigma^*\right)\right) = 0$ и $V_3\left(\sigma, u\right) > 0$ при $\left(\sigma, u\right) \ne \left(\xi_1,\ f_1\left(\sigma^*\right)\right)$. Производная функции $V_3\left(\sigma, u\right)$ в силу системы (5)

$$\dot{V}_3\left(\sigma, u\right) = -g_1\left(\sigma\right)\left(f_1\left(\sigma\right) - f_1\left(\sigma^*\right)\right)$$

отрицательна на Ω_4, поскольку $g_1\left(\sigma\right) > 0$ и $f_1\left(\sigma\right) > f_1\left(\sigma^*\right)$ на этом множестве в силу условий (3) и (4).

Горизонтальный отрезок $\left\{\left(\sigma,\ u_5\right),\ -\delta \le \sigma \le \xi_1\right\} \subset P_1$, соединяющий точки $M_1\left(\xi_1,\ u_5\right)$ и $N_1\left(-\delta,\ u_5\right) \in L_1$, траектории системы (5) пересекают снизу вверх (рис. 3), поскольку на этом отрезке $\dot{\sigma} < 0$, $\dot{u} > 0$.

Таким образом, на листе P_1 построена кривая $C_1D_1E_1K_1M_1N_1$, сшитая из двух отрезков и кусков линий уровня T_j, $j = 2, 3, 4$. Симметричную ей кривую, лежащую на листе P_2, обозначим через $C_2D_2E_2K_2M_2N_2$.

Сравним расстояние от оси $u = 0$ до точек N_1 и C_2, используя равенство (13).

$$u_5 + u_2 = f_1(\sigma^*) + u_2 - \sqrt{(u_2 - f_1(\sigma_2))^2 + 2\int_{\xi_1}^{\sigma_2} g_1(\sigma)\,d\sigma} =$$

$$= f_1(\sigma^*) + \frac{2u_2 f_1(\sigma_2) - f_1^2(\sigma_2) - 2\int_{\xi_1}^{\sigma_2} g_1(\sigma)\,d\sigma}{u_2 + \sqrt{(u_2 - f_1(\sigma_2))^2 + 2\int_{\xi_1}^{\sigma_2} g_1(\sigma)\,d\sigma}} \underset{u_2 \to +\infty}{\to} f_1(\sigma^*) + f_1(\sigma_2).$$

$f_1(\sigma^*) + f_1(\sigma_2) > 0$ по нашему выбору точки σ_2 (10), следовательно, при достаточно больших u_2 верно неравенство $u_5 > -u_2$, и точка N_1 лежит на луче L_1 выше точки C_2.

На отрезке $N_1C_2 \subset L_1$ следующее направление поля: $\dot{\sigma} < 0$, $\dot{u} > 0$, и на симметричном отрезке $N_2C_1 \subset L_2$: $\dot{\sigma} > 0$, $\dot{u} < 0$.

Следовательно,
построенный замкнутый контур $C_1D_1E_1K_1M_1N_1C_2D_2E_2K_2M_2N_2$ является искомым внешним контуром, который траектории системы (2) пересекают снаружи внутрь.

Теорема доказана.

4. Теорема об отсутствии предельных циклов в системе (2).

Теорема 2. При сделанных выше предположениях

если для всех $\sigma > \sigma^*$

$$f_1(\sigma) < f_1(\delta), \tag{14}$$

то в системе (2) нет предельных циклов. Траектории с любыми начальными данными при $t \to +\infty$ либо выходят на границу многообразия в точках множества

$$(\Gamma_1 \cap \{(\sigma, u):\ -\delta < \sigma \le \xi_1\}) \cup (\Gamma_2 \cap \{(\sigma, u):\ \xi_2 \le \sigma < \delta\}),$$

либо стремятся к бесконечности.

Доказательство теоремы 2.

Для доказательства теоремы построим на фазовой поверхности семейство вложенных друг в друга замкнутых кривых, которые траектории системы (2) пересекают изнутри наружу.

На множестве $\Omega_5 = \mathrm{P}_1 \cap \{(\sigma, u) : \sigma \geq \delta\}$ построим линии уровня T_{u1} функции Ляпунова

$$V_4(\sigma, u) = \frac{1}{2}(u - f_1(\delta))^2 + \int_{\xi_1}^{\sigma} g_1(\sigma)\, d\sigma,$$

проходящие через каждую точку $A_{u1}(\delta,\, u_1) \in L_2,\ u_1 > f_1(\delta)$. Линия T_{u1} второй раз пересекает прямую $\{(\sigma, u) : \sigma = \delta\}$ в точке $B_{u1}(\delta, u_2)$ (рис. 4), где

$$u_2 = 2f_1(\delta) - u_1. \tag{15}$$

$V_4(\xi_1,\ f_1(\delta)) = 0$ и $V_4(\sigma, u) > 0$ при $(\sigma, u) \neq (\xi_1,\ f_1(\delta))$. Производная функции V_4 в силу системы (5)

$$\dot{V}_4(\sigma, u) = -g_1(\sigma)(f_1(\sigma) - f_1(\delta))$$

положительна на Ω_4, поскольку $g_1(\sigma) > 0$ и $f_1(\sigma) \leq f_1(\delta)$ на этом множестве в силу условий (3), (4) и (14).

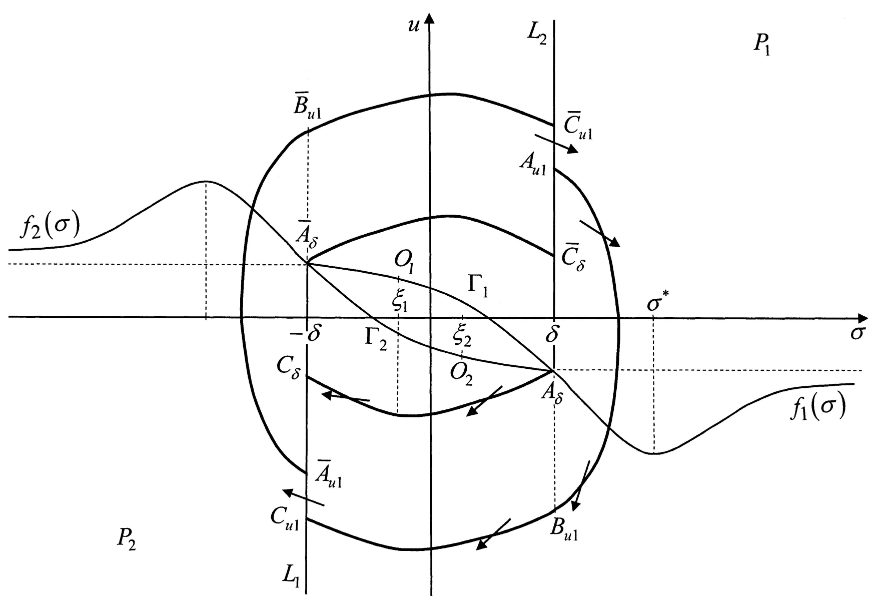

Рис. 4

Далее на множестве $\Omega_6 = \mathrm{P}_1 \cap \{(\sigma, u) : -\delta \le \sigma \le \delta\}$ построим линии уровня $\bar{T}_{u1}$ функции Ляпунова (8), производная которой (9) в силу системы (5) положительна на Ω_6.

Линия уровня $\bar{T}_{u1}$, проходящая через точку $B_{u1}(\delta, u_2)$, достигает луча L_1 в точке $C_{u1}(-\delta, u_3)$, где

$$u_3 = -f_1(\delta) - \sqrt{(u_2 - f_1(\delta))^2 + 2\int_{-\delta}^{\delta} g_1(\sigma)\, d\sigma},$$

или, с учетом равенства (15):

$$u_3 = -f_1(\delta) - \sqrt{(u_1 - f_1(\delta))^2 + 2\int_{-\delta}^{\delta} g_1(\sigma)\, d\sigma}.$$

Обозначим через $\bar{A}_{u1}\bar{B}_{u1}\bar{C}_{u1}$ кривую на листе P_2, симметричную построенной кривой $A_{u1}B_{u1}C_{u1} \subset P_1$.

Сравним расстояние от оси $u = 0$ до точек C_{u1} и $\bar{A}_{u1}$

$$u_3 + u_1 = u_1 - f_1(\delta) - \sqrt{(u_1 - f_1(\delta))^2 + 2\int_{-\delta}^{\delta} g_1(\sigma)\, d\sigma} =$$

$$= \frac{-2\int_{-\delta}^{\delta} g_1(\sigma)\, d\sigma}{(u_1 - f_1(\delta))^2 + \sqrt{(u_1 - f_1(\delta))^2 + 2\int_{-\delta}^{\delta} g_1(\sigma)\, d\sigma}}.$$

Интеграл, стоящий в числителе последней дроби положителен (это показано в доказательстве теоремы 1). Поэтому $u_3 < -u_1$, и точка C_{u1} лежит на луче L_1 ниже точки $\bar{A}_{u1}$ для всех $u_1 > f_1(\delta)$. Отрезок $C_{u1}\bar{A}_{u1}$ траектории системы (2) пересекают справа налево, а симметричный ему отрезок $\bar{C}_{u1}A_{u1}$ - слева направо.

Таким образом, через каждую точку $A_{u1}(\delta, u_1) \in L_2$, $u_1 > f_1(\delta)$, проходит замкнутый контур $A_{u1}B_{u1}C_{u1}\bar{A}_{u1}\bar{B}_{u1}\bar{C}_{u1}$, который траектории системы (2) пересекают изнутри наружу (рис. 4).

Через точку $A_\delta(\delta,\, f_1(\delta)) \in L_2$ построим на множестве Ω_6 линию уровня $\bar{T}_\delta$ функции Ляпунова (8). Кривая $\bar{T}_\delta$ пересекает луч L_1 в точке $C_\delta(-\delta,\, u_\delta)$, где

$$u_\delta = -f_1(\delta) - \sqrt{2\int_{-\delta}^{\delta} g_1(\sigma)\,d\sigma} < -f_1(\delta).$$

Обозначим через $\bar{A}_\delta\bar{C}_\delta$ кривую на листе P_2, симметричную кривой $A_\delta C_\delta \subset P_1$. Замкнутый контур $A_\delta C_\delta \bar{A}_\delta \bar{C}_\delta$ траектории системы (2) пересекают тоже изнутри наружу.

Траектории системы (2) с начальными данными $(\sigma_0,\, u_0) \in P$, лежащими на контуре $A_\delta C_\delta \bar{A}_\delta \bar{C}_\delta$ или вне этого контура, пересекая каждый из построенных контуров $A_{u1}B_{u1}C_{u1}\bar{A}_{u1}\bar{B}_{u1}\bar{C}_{u1}$ изнутри наружу, стремятся к бесконечности с ростом времени.

Рассмотрим теперь поведение траекторий системы (2) с начальными данными $(\sigma_0,\, u_0)$, лежащими внутри контура $A_\delta C_\delta \bar{A}_\delta \bar{C}_\delta$ на листе P_1. В этом случае $(\sigma_0,\, u_0)$ принадлежит множеству, ограниченному кривыми Γ_1, $A_\delta C_\delta$ и отрезком $C_\delta \bar{A}_\delta$. Направление поля на границе Γ_1 следующее: $\dot\sigma = 0$, $\dot u > 0$ на части границы $\Gamma_1 \cap \{(\sigma,\, u):\ -\delta < \sigma < \xi_1\}$, и $\dot\sigma = 0$, $\dot u < 0$ на $\Gamma_1 \cap \{(\sigma,\, u):\ \xi_1 < \sigma < \delta\}$ (рис. 4). Поэтому с ростом времени траектории системы (2) с такими начальными данными либо достигают множества $\Gamma_1 \cap \{(\sigma,\, u):\ -\delta < \sigma \le \xi_1\}$, либо достигают контура $A_\delta C_\delta \bar{A}_\delta \bar{C}_\delta$, и стремятся к бесконечности с ростом времени.

Аналогично поведение траекторий системы (2) с начальными данными $(\sigma_0,\, u_0) \in P_2$, лежащими внутри контура $A_\delta C_\delta \bar{A}_\delta \bar{C}_\delta$ на листе P_2.

Теорема доказана.

Литература

1. Андронов А.А., Баутин Н.Н. Об одном вырожденном случае общей задачи прямого регулирования. Доклады АН СССР. 1945. Т.46. № 7. С. 304-306.

2. Фельдбаум А.А. Простейшие релейные системы автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика. 1949. № 10. С. 249-260.

3. Методы исследования нелинейных систем автоматического управления. Под редакцией Нелепина Р.А. М., Наука, 1975. 447 с.

4. Попов В.М. Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика. 1961. № 8. С. 961-973.

5. Якубович В.А. Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями. Доклады АН СССР. 1963. Т.149. № 2. С. 288-291.

6. Якубович
В.А. Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. Автоматика и телемеханика. 1967. № 6. С. 5-30.

7. Якубович В.А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. III. Абсолютная устойчивость систем с гистерезисными нелинейностями. Автоматика и телемеханика. 1965. № 9. С. 753-768.

8. Барабанов Н.Е., Якубович В.А. Абсолютная устойчивость систем регулирования с одной гистерезисной нелинейностью. Автоматика и телемеханика. 1979. № 12. С. 5-11.

9. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука. 1978. 400 с.

10. Цыпкин Я.З. Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974, 575 с.

11. Красносельский М.А. Покровский А.В. Системы с гистерезисом. М.: Наука. 1983. 271 с.

12. Камачкин А.М., Шамберов В.Н. Отыскание периодических решений в нелинейных динамических системах. СПб.: Изд-во СПб университета. 2002. 86 с.

13. Шумафов М.М. Устойчивость систем дифференциальных уравнений с гистерезисными нелинейностями. Вестник Адыгейского гос. Университета. Сер. 4. № 3. 2012. С.1-12.

14. Леонов Г.А., Шумафов М.М., Тешев В.А. Устойчивость систем с гистерезисом. Майкоп. Изд-во Адыгейского гос. Университета. 2012. 178 с.

15. Звягинцева Т.Е. Критерии существования предельного цикла в двумерной системе с гистерезисом. Вестник СПбГУ. Серия 1. 2012. Выпуск 1. С. 18-26.

16. Звягинцева Т.Е. Глобальная устойчивость систем автоматического управления с гистерезисной нелинейностью. Эл. журнал «Дифф. уравнения и процессы управления». 2013. №4. С. 84-92 http://www.math.spbu.ru/diffjournal/RU/numbers/2013.4/article.1.4.html

17. Звягинцева Т.Е. Абсолютная устойчивость систем автоматического управления с гистерезисной нелинейностью. Эл. журнал «Дифф. уравнения и процессы управления». 2014. №2. С. 1-12 http://www.math.spbu.ru/diffjournal/RU/numbers/2014.2/article.1.1.html

18. Звягинцева Т.Е. Условия существования предельного цикла в одном классе систем с гистерезисной нелинейностью. Эл. журнал «Дифф. уравнения и процессы управления». 2014. №3. С. 1-10 http://www.math.spbu.ru/diffjournal/RU/numbers/2014.3/article.1.1.html